7회수학 나형 정답

1	⑤	*2*	②	*3*	③	*4*	①	*5*	②
6	④	*7*	④	*8*	①	*9*	①	*10*	②
11	③	*12*	①	*13*	②	*14*	⑤	*15*	④
16	②	*17*	⑤	*18*	⑤	*19*	④	*20*	③
21	④	*22*	38	*23*	22	*24*	16	*25*	28
26	40	*27*	11	*28*	12	*29*	27	*30*	147

해 설

1. 정답 ⑤

$\int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

2. 답 ② 준식

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=2\cdot 4=8$

3. [정답] ③

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

$= 6a = 4$

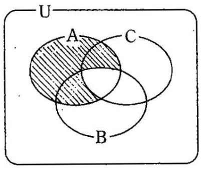
$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

4. 답 ①

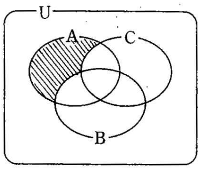
$(ab)^2=a^2b^2=(\sqrt{2})^2\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^2=2\times 3^{\frac{1}{3}}$

5.정답 ②

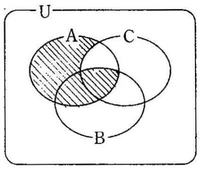
① $A\cap(B\cap C)^c$



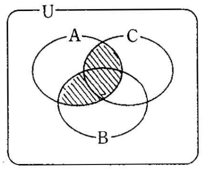
② $A\cap(B\cup C)^c$



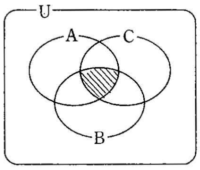
③ $A\cap(B^2\cap C)^c$



④ $A\cap(B^c\cap C^c)^c=A\cap(B\cup C)$



⑤ $A\cap(B^c\cup C^c)^c=A\cap(B\cap C)$



6. 답 ④

$P(A\cap B)=2P(A\cap B^C)$

$P(A)\times P(B)=2P(A)\times P(B^C)$ $(\because A, B$는 독립)

$P(B)=2P(B^C)$ $(\because P(A)\neq 0)$

$P(B)=2(1-P(B))$

$3P(B)=2,\ P(B)=\frac{2}{3}$ …… ㉠

또 $P(A^C\cap B)=\frac{1}{12},\ P(A^C)\times P(B)=\frac{1}{12}$

㉠에서 $P(A^C)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

$P(A^C)=\frac{1}{8}$

$\therefore\ P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

7.정답 ④

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+6}=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서 주기가 6인 수열을 이룬다.

① $b_n=a_{2n+1}$

$\{b_n\}$: $a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9,\ a_{11},\ a_{13},\ \cdots$
∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □
$a_3,\ a_5,\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_1,\ \cdots$

② $b_n=a_{3n+1}$

$\{b_n\}$: $a_4,\ a_7,\ a_{10},\ a_{13},\ a_{16},\ a_{19},\ \cdots$
∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □
$a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ \cdots$

③ $b_n=a_{4n+1}$

$\{b_n\}$: $a_5,\ a_9,\ a_{13},\ a_{17},\ a_{21},\ a_{25},\ \cdots$
∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □
$a_5,\ a_3,\ a_1,\ a_5,\ a_3,\ a_1,\ \cdots$

④ $b_n=a_{5n+1}$

$\{b_n\}$: $a_6,\ a_{11},\ a_{16},\ a_{21},\ a_{26},\ a_{31},\ \cdots$
∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □
$a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ \cdots$

⑤ $b_n=a_{6n+1}$

$\{b_n\}$: $a_7,\ a_{13},\ a_{19},\ a_{25},\ a_{31},\ a_{37},\ \cdots$
∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □∥ □
$a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$중 n의 값이 모두 나타나는 것은 ④이다.

<참고>에서 a_{5n+1}의 계수 5는 6과 서로소이다.

8.정답 ①

철수가 받은 전자우편이 '여행'을 포함할 사건을 A,
철수가 받은 전자우편이 광고인 사건을 B라 하자.

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{20}+\frac{9}{50}=\frac{23}{100}$

$\therefore\ P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{23}{100}}=\frac{5}{23}$

9. 답 ①

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는
직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로
$f(2)=g(2)$가 성립한다.
따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서 $2b-1=1-2b$, $4b=2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$f(4)=g(0),\ g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0,\ (a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

10. 답 ②

A에서 H로 가는 경로와 필요한 작업일수를 나열하면
다음과 같다.

A → B → D → F → H : 22일
A → B → E → F → H : 18일
A → B → E → G → H : 19일

A → C → E → F → H : 16일
A → C → E → G → H : 17일
따라서, 작업을 모두 마치는데 필요한 최소의 작업일수
는 22일이다.

11. 정답 ③

Ⅰ. 10의 약수 : 1, 2, 5, 10
$f(10) = 1+2+5+10 = 18$ <참>
Ⅱ. $f(n) = n+1$이면 n 의 약수가 1, n뿐이므로
n 은 소수이다. <참>
Ⅲ. <반례>
$m = n = 3$일 때,
$f(3) = 4,\ f(9) = 1+3+9 = 13$
$\therefore\ f(9) \neq f(3)f(3)$ <거짓>

12.답 ①

주어진 조건에서 $a \neq 1,\ b \neq 1$이다.
자연수 n에 대하여 $a^n < b^n$이므로 $a < b$
$0 < a < b < 1$ 또는 $1 < a < b$일 때,
i) $m > n$이면 $a^m > a^n,\ b^m > b^n$이고,
ii) $m < n$이면 $a^m < a^n,\ b^m < b^n$이다.
그런데, i), ii)는 모두 주어진 조건에 모순이다.
$\therefore\ 0 < a < 1 < b$
주어진 조건에서 $b^n < b^m$이므로 $n < m$이어야 하고,
이 때 $a^m < a^n$이 성립한다.
$\therefore\ n < m$
이상에서 $0 < a < 1 < b,\ m > n$이다.

13. 답 ②

$b_n = n,\ c_n = n+1$이라 하면
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n+1}{2}$$ 이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k} = 2$$
그런데 $\sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} c_k$이므로
$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = 2$$

14.정답 ⑤

Ⅰ. $x*a = x$에서 a 는 가장 작은 수이다.
Ⅱ. $c*d < c*b$에서
① $c \geq d,\ c \geq b$이면 $c*d < c*b\ \Rightarrow c < c$<모순>
② $c \geq d,\ c \leq b$이면 $c*d < c*b\ \Rightarrow c < b$
③ $c \leq d,\ c \geq b$이면 $c*d < c*b\ \Rightarrow d < c$<모순>
④ $c \leq d,\ c \leq b$이면 $c*d < c*b\ \Rightarrow d < b$
①, ②, ③, ④에서 가장 큰 수는 b이다.
따라서, $a < c < b$거나 $a < d < b$이다.

15. 답 ④

주어진 조건을 만족하려면 3개의 가로 행에는 각각
적어도 하나의 검은 색 유리상자가 들어가야 하고,
4개의 세로 열에도 각각 적어도 하나의 검은 상자가
들어가야 한다.
따라서 3개의 가로 행 중에서 2개의 검은 색 유리상자
가 포함될 1개의 행을 택하는 방법의 수는 3가지이고,
이 행의 4개의 유리 상자 중에서 검은 색 유리상자로
바뀔 2개의 상자를 택하는 경우는 수는 ${}_4C_2 = 6$(가지)이다.
이제 위의 $3\times6 = 18$가지 경우의 수 중의 하나가
아래의 그림과 같다고 하자.

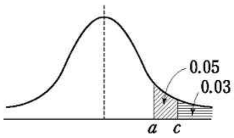
	a		c
	b		d

이제 $a,\ b$ 중에서 한 행을 택하고 $c,\ d$ 중에서 나머지
한 행을 택하는 방법의 수는 $2\times1 = 2$(가지)이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $18\times2 = 36$

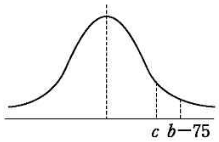
16. 정답 ②

$\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌
숫자가 나타나므로 $\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$의 지표가 -6이다.
$$-6 \leq \log\left(\frac{n}{10}\right)^{10} < -5$$
$-6 \leq 10(\log n - 1) < -5$
$-0.6 \leq \log n - 1 < -0.5$
$0.4 \leq \log n < 0.5$ …… ㉠
이때, $\log 2 = 0.3010$이고, $\log 4 = 0.6020$이므로
$\log 2 < \log n < \log 4$
따라서, ㉠을 만족시키는 10보다 작은 자연수 n은
$n = 3$

17. 답 ⑤



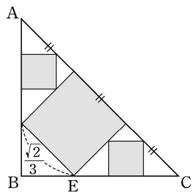
ㄱ. $\mathrm{P}(Z > c) = 0.03 < 0.05 = \mathrm{P}(Z > a)$이므로 $c > a$
∴참
ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X} \leq c+75) = \mathrm{P}(Z \leq c) = 0.97$ ∴참



ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{X} > b) = \mathrm{P}(Z > b-75)$
$= 0.01 < 0.03 = \mathrm{P}(Z > c)$
이므로 $b - 75 > c$ ∴참
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

18. 답 ⑤

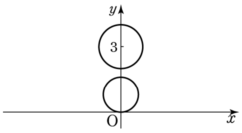
처음 정사각형 넓이를 a_1이라고 하면
$a_1 = \frac{2}{9}$
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 넓이의 비는
$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$이다.



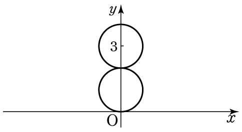
$\therefore\ a_2 = 2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)$
$\therefore\ a_n \therefore\ a_n = 2^{n-1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$
$= \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}$$

19. 답 ④

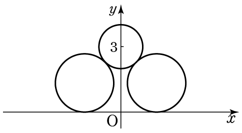
ⅰ) $0 < r < 1 \Rightarrow f(r) = 0$



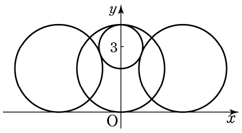
ii) $r=1 \Rightarrow f(r)=1$



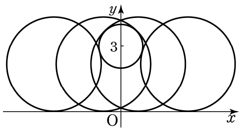
iii) $1<r<2 \Rightarrow f(r)=2$



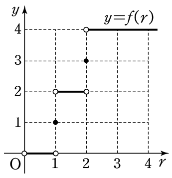
iv) $r=2 \Rightarrow f(r)=3$



iv) $r>2 \Rightarrow f(r)=4$



$$f(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<1) \\ 1 & (r=1) \\ 2 & (1<r<2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (r>2) \end{cases}$$



그래프에서

ㄱ. $f(2)=3$

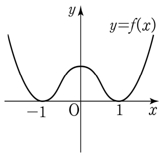
ㄴ. $\lim_{r\to 1+0} f(r)=2\neq f(1)=1$

ㄷ. 그래프에서, 구간 (0, 4)에서 불연속점은 2개 ($r=1, 2$일 때)

20. 정답 ③

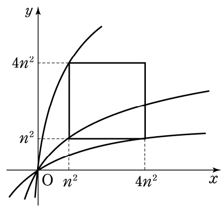
ㄱ. (참) $g(x+2)=g(x)$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는
$-1\le x<1$일 때의 함수 $f(x)$의 그래프가 주기적으로
반복된다.
한편, $f(-1)=f(1)$이므로 함수 $g(x)$는 연속이다.
또한, $-1<x<1$에서 $f(x)$는 다항함수이므로
미분가능하고, $f'(-1)=f'(1)$이므로
실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. (거짓) [반례] $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$이라 하면
$f(-1)=f(1)=0$,
$f'(-1)=f'(1)=0$이므로
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미 분 가 능 하 지 만
$f'(0)f'(1)=0$



ㄷ. (참) $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이므로 $f'(-1)>0$
한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$이므로 중간값의 정리에 의하여
구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 답 ④



$y=k\sqrt{x}$가 $(4n^2,\ n^2)$을 지나면

$n^2=k\cdot\sqrt{4n^2}$에서 $k=\frac{1}{2}n$

$y=k\sqrt{x}$가 $(n^2,\ 4n^2)$을 지나면

$4n^2=k\cdot\sqrt{n^2}$에서

∴ $y=k\sqrt{x}$가 주어진 정사각형과 만나려면

$\frac{1}{2}n\le k\le 4n$이어야 한다.

ㄱ. $n=5$일 때

$\frac{5}{2}\le k\le 20$이므로 $a_5=20-2=18$

ㄴ. n이 홀수일 때

$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}(n+1)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$

$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+3)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{15}{2}$

n이 짝수일 때

$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}n\right)+1=\frac{7}{2}n+1$

$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+2)\right)+1=\frac{7}{2}n+8$

∴ $a_{n+2}-a_n=7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5} a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k-1)+\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k)+1\right)$

$=200$

22. 답 38

$a_2=a+d=3$ …… ㉠

$a_5=a+4d=24$ …… ㉡

㉡-㉠을 하면 $3d=21$ ∴ $d=7,\ a=-4$

∴ $a_7=a+6d=(-4)+42=38$

23. 정답 22

$a,\ b,\ c$에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는
방법의 수는 $3^3=27$
여기서 a가 연속하여 있는 경우를 생각한다.
(i) a가 2개 연속할 때,
$aab,\ aac,\ baa,\ caa$ 즉, 4개
(ii) a가 3개 연속인 경우,
aaa 즉, 1개
따라서, 수신 가능한 단어의 수는
$27-(4+1)=22$(개)

24. 답 16

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$에서 무한급수의 합이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$$

25. 답 28

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$이어야 하므로 $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면

$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$

$=\frac{1}{4}f'(3)=5$

∴ $f'(3)=20$

∴ $f(3)+f'(3)=28$

26. 답 40

a가 대응된 꼭지점의 바로 위쪽에 있는 꼭지점을
b라 하면 (단, $a\neq1$)

$$b=\begin{cases}\frac{a}{2} & (a\text{가 짝수})\\ \frac{a-1}{2} & (a\text{가 홀수})\end{cases}$$ 가 성립한다.

$33\Rightarrow16\Rightarrow8\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow1$

$79\Rightarrow39\Rightarrow19\Rightarrow9\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow1$

따라서, $10k=10\times M(33,\ 79)=40$이다.

27. 답 11

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-$

의 $n-1$개다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$에서 $\dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$

$(n-1)n(n+1)>1000$,

$9\cdot 10\cdot 11=990<1000$

$10\cdot 11\cdot 12=1320>1000$이므로

구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

28. 답 12

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{10}{3}$

$\mathrm{V}(X)=20\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{9}$ …… ㉠

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=\dfrac{n}{2},\ \mathrm{V}(Y)=\dfrac{n}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{n}{4}\geq\dfrac{25}{9}$ $\quad\therefore\ n\geq\dfrac{100}{9}=11.\cdots$

따라서, n의 최소값은 12이다.

29. **[출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기**

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a,b,c는 상수)

라 하면

조건 (가)에 의하여 $c=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

조건 (나)에 의하여 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$

조건 (다)에 의하여 $b\geq 9$이고

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\geq\frac{27}{4}\ (\because\ b\geq 9)$$

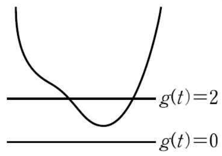
$b=9$일 때, 최솟값 $m=\dfrac{27}{4}$

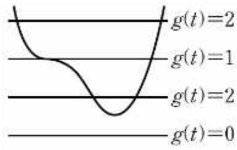
따라서 $4m=27$

30. 정답] 147

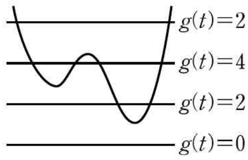
[해설]

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$, $f(x)=3$의 한 근이 0 이므로

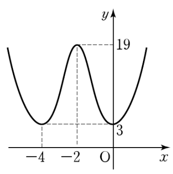
$f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

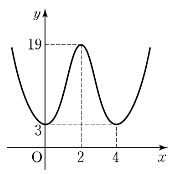
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$ 에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore\alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times 36+3=147$