7회수학 가형 정답

1	④	*2*	②	*3*	①	*4*	②	*5*	①
6	②	*7*	④	*8*	③	*9*	①	*10*	②
11	④	*12*	②	*13*	③	*14*	⑤	*15*	⑤
16	④	*17*	④	*18*	⑤	*19*	⑤	*20*	②
21	②	*22*	16	*23*	78	*24*	15	*25*	27
26	83	*27*	225	*28*	17	*29*	27	*30*	147

해 설

1. 답 ④

$f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+4)=7$$

$\therefore\ f(3)=a=7$

2. 답 ② 준식

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=2\cdot4=8$$

3. 정답 ①

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt3$에서

(주어진 식)$=(2+2\cdot\frac{\sqrt3}{2})(2-\sqrt3)$

$=(2+\sqrt3)(2-\sqrt3)$

$=2^2-(\sqrt3)^2=4-3=1$

4. 정답 ②

점 $P(a,\ b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ …… ㉠

또, 점 P에서의 접선은 $by=2(x+a)$이므로

이 접선이 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 $Q(-a,\ 0)$

이때, $\overline{PQ}=4\sqrt5$에서 $\overline{PQ}^2=80$

$4a^2+b^2=80$, $4a^2+4a=80$ ($\because$ ㉠)

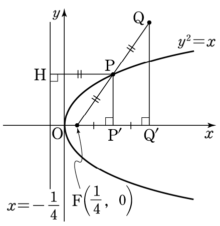
$a^2+a-20=0$, $(a-4)(a+5)=0$

$\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

㉠에서 $b^2=16$

$\therefore\ a^2+b^2=16+16=32$

5. 답 ①



$\overline{HP}=4$이므로 $P'\left(\frac{15}{4},\ 0\right)$

또한, $\overline{FP'}=\overline{P'Q'}$이므로 $Q'\left(\frac{29}{4},\ 0\right)$

6. 답 ②

점 P의 좌표를 $(3,\ t,\ 1)$(t는 실수)로 놓으면

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+t^2+1^2}=\sqrt{t^2+10}$이므로

$t=0$일 때, $\overline{OP}$의 최소값은 $\sqrt{10}$이다.

7. 답 ④

$P(A\cap B)=2P(A\cap B^C)$

$P(A)\times P(B)=2P(A)\times P(B^C)$ ($\because A, B$는 독립)

$P(B)=2P(B^C)$ ($\because\ P(A)\neq0$)

$P(B)=2(1-P(B))$

$3P(B)=2$, $P(B)=\frac{2}{3}$ …… ㉠

또 $P(A^C\cap B)=\frac{1}{12}$, $P(A^C)\times P(B)=\frac{1}{12}$

㉠에서 $P(A^C)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

$P(A^C)=\frac{1}{8}$

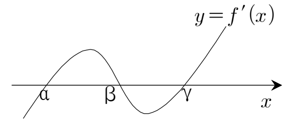
$\therefore\ P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

8. 답 ③

ㄱ. $f'(x)=0$은 최고차항의 계수가 양수인 삼차방정식

이고, 서로 다른 세 실근을 가지므로

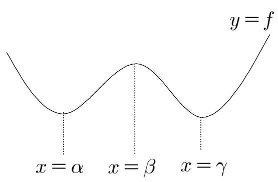
$y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로

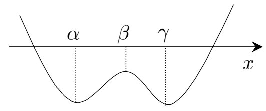
바뀌므로 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극대값을 갖는다. (참)

ㄴ. 사차함수$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

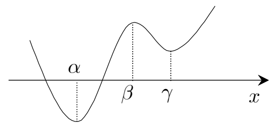


따라서, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$인 경우는 다음과 같다.

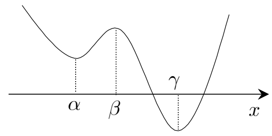
(ⅰ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)<0$



(ⅱ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)>0$



(ⅲ) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$



그러므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을

갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ의 (ⅲ)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 모두

β보다 크다. (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9. 정답 ①

철수가 받은 전자우편이 '여행'을 포함할 사건을 A,

철수가 받은 전자우편이 광고인 사건을 B라 하자.

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{20}+\frac{9}{50}=\frac{23}{100}$

$\therefore\ P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{23}{100}}=\frac{5}{23}$

10. 답 ②

$f(a)=\int_1^a\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

$\sqrt{\ln x}=t$라 하면 $\ln x=t^2$

$x=1\to t=0$, $x=a\to t=\sqrt{\ln a}$

$\frac{1}{x}dx=2t\,dt$

$f(a)=\int_0^{\sqrt{\ln a}}2t^2\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot4^{\frac{3}{2}}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$

11. 답 ④

$P(X=0)+P(X=2)=1$이므로

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	계
$P(X)$	a	b	1

$E(X)=2b$이고 $E(X^2)=2^2b=4b$ 이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4b-4b^2$

따라서 $\{E(X)\}^2=2V(X)$ 에서

$4b^2=2\times(4b-4b^2)$, $b=2-2b$

$\therefore\ P(X=2)=b=\dfrac{2}{3}$

12. 답 ②

A에서 H로 가는 경로와 필요한 작업일수를 나열하면

다음과 같다.

A → B → D → F → H : 22일

A → B → E → F → H : 18일

A → B → E → G → H : 19일

A → C → E → F → H : 16일

A → C → E → G → H : 17일

따라서, 작업을 모두 마치는데 필요한 최소의 작업일수

는 22일이다.

13. 답 ③

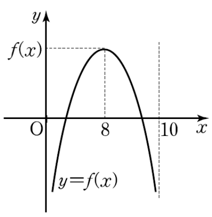
$f'(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{-1}{10-x}=\dfrac{-5(x-8)}{x(10-x)}$

진수 조건에서 $0<x<10$이므로

$f(x)$는 $x=8$에서 극대이고 최대이다.

또, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to10-0}f(x)=-\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



ㄱ. 최대값은 $f(8)=13\ln2$ (참)

ㄴ. 위 그래프에서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두

실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x)=\ln x^4(10-x)$이므로

$y=e^{f(x)}=x^4(10-x)=10x^4-x^5$

$y'=40x^3-5x^4$, $y''=120x^2-20x^3$

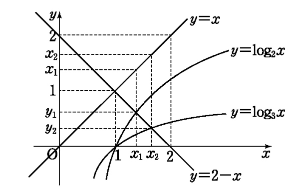
$\therefore\ y''=20x^2(6-x)$

따라서 $0<x<6$에서 $y''>0$이므로

$y=e^{f(x)}$는 아래로 볼록하다. (거짓)

14.답 ⑤

주어진 함수의 그래프를 그리면 아래와 같다.



ㄱ. $x_1>y_2$ $\quad\therefore$참

ㄴ. $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

$y_2-y_1=x_1-x_2$ $\quad\therefore$참

ㄷ. $F(x)=xy=x(2-x)=-x^2+2x$

$=-(x-1)^2+1$

$1<x_1<x_2<2$이므로 $F(x_1)>f(x_2)$

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$ $\quad\therefore$참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

15. 답 ⑤

$P(\dfrac{1}{4}<Y\le\dfrac{3}{4})=P(Y>\dfrac{1}{4})-P(Y>\dfrac{3}{4})$

$=0.8-0.2=0.6$

$P(X>k)=G(k)=-k+1=0.6$

$\therefore\ k=0.4=\dfrac{2}{5}$

16. 답 ④

$f(x)=\displaystyle\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$f'(x)=2+\sin x^2$이고

$f''(x)=\cos x^2(2x)=2x\cos x^2$이다.

이때 $f''(a)=2a\cos a^2=\sqrt{3}\,a$에서

$\cos a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ a^2=\dfrac{\pi}{6}$

한편, $f^{-1}(0)=b$로 놓으면

$f(b)=\displaystyle\int_a^b\{2+\sin(t^2)\}dt=0$에서 $b=a$이다.

이때 $f'(b)=f'(a)=2+\sin a^2$

$=2+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{2}$이므로

$(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{2}{5}$

17. 답 ④

A에서 B_n까지 가는 경우의 수를 a_n이라 하면

A에서 B_{n+1}까지 가는 경우의 수는

B_n을 거쳐가는 경우 a_n(가지)와 B_n을 거쳐가지 않는

경우 3가지가 있다.

$\therefore a_{n+1}=a_n+3$, $a_1=4$

$\therefore a_n=3n+1$

$a_3+a_7=10+22=32$

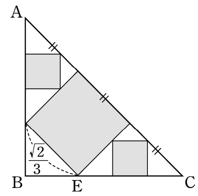
18. 답 ⑤

처음 정사각형 넓이를 a_1이라고 하면

$a_1=\dfrac{2}{9}$

$\overline{AB}:\overline{CD}=1:\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이므로 넓이의 비는

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$이다.



$\therefore\ a_2=2\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)$

$\therefore\ a_n\therefore\ a_n=2^{n-1}\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{2}{9}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{9}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{k-1}=\dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{2}{5}$

19. 답 ⑤

$y=g(x)$가 $f(x)$의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이므로

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

또, $g(x)$가 점 $B(b, f(b))$에서 $f(x)$에 접하므로

$f'(a)=g'(b)=f'(b)$

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ㄱ. $h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

ㄴ. $h(a)=h(b)=0$이고 $h(x)$가 미분가능하므로

로올의 정리에 의하여, $h'(c)=0$인 c가 개구간 (a, b)

에 적어도 하나 존재한다.

$\therefore\ h'(a)=h'(b)=h'(c)=0$이므로

$h'(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h''(x)=f''(x)$이고, $h''(a)=f''(a)=0$이다.

또한, 점 $(a, f(a))$는 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f''(x)$는 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대이다.

따라서, $h''(x)$도 같으므로

$(a, h(a))$는 $h(x)$의 변곡점이다.

20. 답 ②

A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리의 문자

열의 집합을 U라 하면 $n(U)=6!$이다.

한편, U의 원소 중에서
A의 바로 다음 자리에 B가 오는 문자열의 집합을 X,
B 바로 다음 자리에 C가 오는 문자열의 집합을 Y,
C 바로 다음 자리에 A가 오는 문자열의 집합을 Z라
하면 주어진 조건을 모두 만족시키는 문자열의 집합은
$X^C\cap Y^C\cap Z^C$이다.
따라서 포함배제의 원리에 의해

$$\begin{aligned}&n(X^C\cap Y^C\cap Z^C)\\&=n(U)-n(X)-n(Y)-n(Z)\\&\quad+n(X\cap Y)+n(Y\cap Z)+n(Z\cap X)\\&\quad-n(X\cap Y\cap Z)\\&=6!-3\times5!+3\times4!-0\\&=4!(6\times5-3\times5+3)=24\times18=432\end{aligned}$$

21. 정답 ②

$\overline{PQ}=\overline{RD}$ 이고 $\overline{PR}=\overline{QD}$ 이므로
$\square PQDR$ 은 평행사변형이다.
$\triangle PQR=\triangle DRQ$
점 S 에서 밑면에 내린 수선의 길이를 h 라 하면
점 A 에서 밑면에 내린 수선의 길이는 $2h$ 이므로
사면체 $SQDR$ 의 부피 V_1 은

$$V_1=\frac{1}{3}\times\triangle DRQ\times h$$

사면체 $APQR$ 의 부피는

$$V_2=\frac{1}{3}\times\triangle PQR\times 2h=2V_1$$

따라서, 구하는 부피의 비는 2 : 1이다

22. 답 16

양변에 $x=1$을 대입하면 $1-2a+a=0$
$\therefore\ a=1$
양변을 미분하면 $f(x)=3x^2-4x+1$
$\therefore\ f(3)=16$

23. 답 78

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$라 하면 구하는 길이는

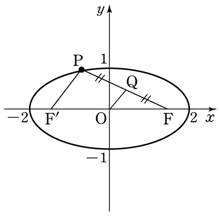
$$\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^6\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x\right\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^6\sqrt{1+\{x^2(x^2+2)\}}\,dx$$
$$=\int_0^6\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^6(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^6$$
$$=72+6=78$$

24.답 15

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$에서, $\overline{FP}$의 중점을 Q라고 하면

$$\left|\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}}{2}\right|=|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}$$

한편, $\overrightarrow{F'P}\,/\!/\,\overrightarrow{OQ}$이므로 $|\overrightarrow{F'P}|=\overline{PF'}=1$이다.
$\overline{PF'}+\overline{PF}=4$이므로, $\overline{PF}=k=3$
$\therefore\ 5k=15$



25. 답 27

포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y=x+3$이므로 $a=3$
포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+3$의 접점의 x좌표를
구하면 $(x+3)^2=12x$에서 $x^2-6x+9=0$,
$(x-3)^2=0\quad\therefore\ x=3$
따라서 구하는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^3(x+3)^2dx-\pi\int_0^3 12x\,dx$$
$$=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=9\pi$$

$\therefore\ b=9$
$\therefore\ ab=3\cdot9=27$

26. 답 83

시각 t일 때, 선분 $\overline{OP}$와 x축의 양의 방향이 이루는
각을 θ라 하면 $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{40}$이고, 점 P의 좌표는 $(\cos\theta,\sin\theta)$이다.
이 때, 어두운 부분의 넓이 S는

$$S=\frac{\pi}{2}+\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{\pi}{2}+\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$$

점 P가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지날 때

$\theta=\frac{\pi}{6},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{dS}{dt}=(1+\cos2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{40}=\frac{3}{80}=\frac{b}{a}$$

$\therefore\ a+b=83$

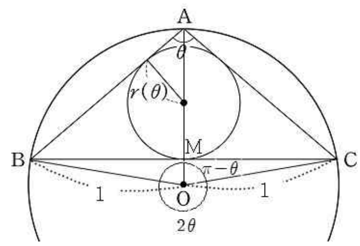
27. 답 225

모비율 p에 대한 신뢰구간

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}\right]$$

이 때, 주어진 신뢰구간이 $[0.701,\ 0.799]$이므로
신뢰구간의 양끝 값을 더하면
$2\hat{p}=0.701+0.799$
$\therefore\ \hat{p}=0.75$
300명의 학생 중에서 오전 8시 이전에 등교한 학생수
를 X라 하면 $\hat{p}=\frac{X}{300}$이므로 $\frac{X}{300}=0.75$
$\therefore\ X=225$

28. 정답 답 17



$\overline{BM}=\overline{CM}=\overline{OC}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{\overline{CM}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$r(\theta)=\frac{\triangle\mathrm{ABC}\text{ 의 넓이}}{\triangle\mathrm{ABC}\text{ 의 둘레의 절반}}=$$
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin\theta}{\sin\theta+2\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{4\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\pi-0}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}}{(\pi-\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{(\pi-\theta)^2}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}$$

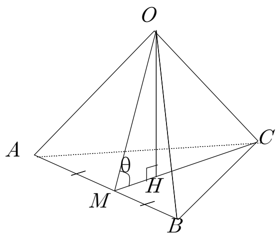
$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+1}$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+1}\right) = \frac{1}{4}$$

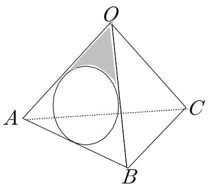
$\therefore p^2+q^2 = 1^2+4^2 = 17$

29. 답 27



두 평면 OAB, ABC가 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{CM}} = \frac{1}{3}$



위의 그림과 같이 $\triangle OAB$에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영시키고, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$에서도 같은 방법으로 정사영시키면 이들은 서로 겹치지 않고 S_1, S_2, S_3로 둘러싸인 부분과 일치한다.

$\triangle OAB$에서 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\frac{1}{2}r(6+6+6) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$

$\therefore\ r = \sqrt{3}$

따라서, 어두운 부분의 넓이는

$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2 - 3\pi\right) = 3\sqrt{3}-\pi$이므로

구하는 넓이 S는

$S = (3\sqrt{3}-\pi)\times\cos\theta\times 3$

$= (3\sqrt{3}-\pi)\times\frac{1}{3}\times 3$

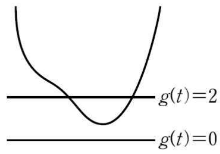
$= 3\sqrt{3}-\pi$

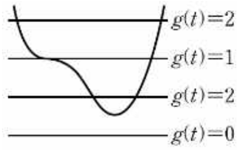
$\therefore\ (S+\pi)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$

30. 정답] 147

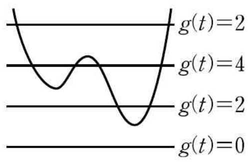
[해설]

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

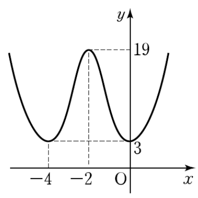
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

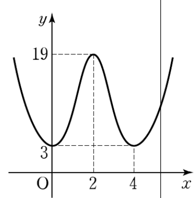
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

(극댓값)$=f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times 36+3=147$