2024학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (1~14번)

2024년 7월 14일 일요일 오후 3:27

수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{1} = 2$

※ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5x-2$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

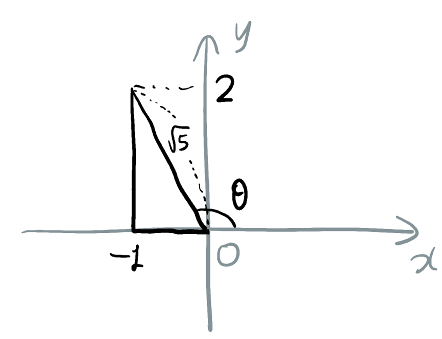
$f'(x) = 4x+5$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 9$

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=-2$일 때, $\sin(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

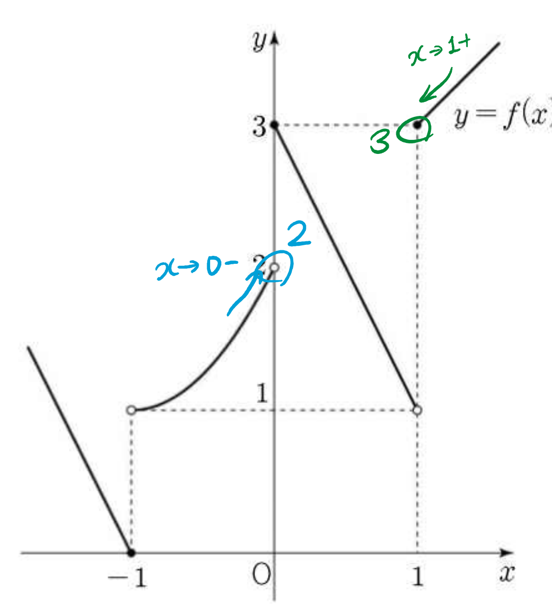
$\sin(\pi+\theta) = \underbrace{-\sin\theta}_{\text{구해야 할 것}}$



위 그림에서 $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$-\sin\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+3 = 5$

5. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)dx$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$$\int_1^2 f'(x)\,dx = [f(x)]_1^2 = \underbrace{f(2)-f(1)}_{\text{구해야 할 것}}$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-f(1)=14$

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\underbrace{\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=4}_{㉠}, \quad \underbrace{a_2a_4=1}_{㉡}$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

첫째항 $=a$, 공비 $=r$이라 하자.
모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

㉠에서 $\dfrac{ar^2+ar^3}{a+ar}=\dfrac{\cancel{a}r^2\cancel{(1+r)}}{\cancel{a}\cancel{(1+r)}}=r^2$

이므로 $r^2=4$이다. $\therefore r=2$

㉡에서 $(ar)(ar^3)=a^2r^4=16a^2$ ($r=2$)

이므로 $16a^2=1$이다. $\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_6+a_7=ar^5+ar^6$

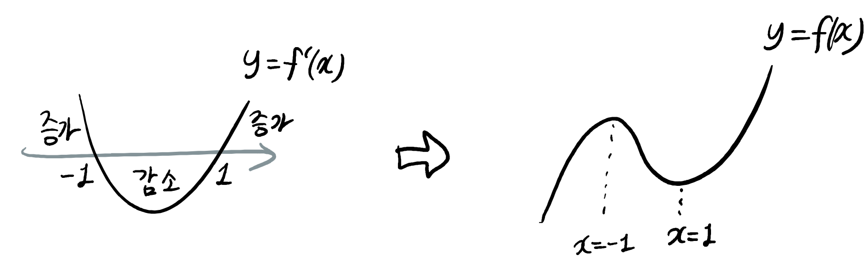
$=\frac{1}{4}\cdot 2^5+\frac{1}{4}\cdot 2^6$

$=8+16=24$

7. 함수 $f(x)=x^3-3x+2a$의 극솟값이 $a+3$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이다.



따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)$이고, 극솟값은 $f(1)$이다.

$f(1)=2a-2$와 $a+3$이 같으므로 $a=5$

↳ $f(x)=x^3-3x+10$

극댓값은 $f(-1)=12$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$xf'(x)$는 상수항을 갖지 않으므로 $f(0)+1=0$ 이다.

$\therefore f(0)=-1$

$xf'(x)=6x^3-x$ 이므로 $f'(x)=6x^2-1$ 이다.

$f(x)=\int f'(x)\,dx = 2x^3-x+C$ 인데

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$ 이다.

따라서 $f(x)=2x^3-x-1$이므로 $f(-1)=-2$

9. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0, -\log_2 9)$, $B(2a, \log_2 7)$, $C(-\log_2 9, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b, \log_8 7)$일 때, 2^{a+3b}의 값은? [4점]

① 63　② 72　③ 81　④ 90　⑤ 99

삼각형의 무게 중심 = (꼭짓점 x좌표 평균, 꼭짓점 y좌표 평균)

$\dfrac{0+2a-\log_2 9}{3}=b$ 이므로 $2a-3b=\log_2 9$ …㉠

$\dfrac{-\log_2 9+\log_2 7+a}{3}=\log_8 7$이므로

$-\log_2 9+\log_2 7+a=3\log_8 7 \rightarrow a=\log_2 9$ …㉡

$\log_8 7^3=\log_{2^{\cancel{3}}} 7^{\cancel{3}}$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=\frac{1}{3}\log_2 9$

따라서 $a+3b=2\log_2 9=\log_2 81$이므로

$2^{a+3b}=2^{\log_2 81}=81$

※ $3\log_8 7=\log_2 7$인 구체적인 이유

$3\log_8 7=\log_{2^3} 7^3=k$라 하면 $2^{3k}=7^3$ 이다.

$(2^k)^3=7^3$이므로 $2^k=7$ $\therefore k=\log_2 7$

10. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

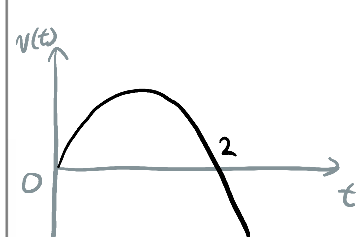
① 54　② 58　③ 62　④ 66　⑤ 70

시각 t에서 점 P의 위치를 $S(t)$라 하자.

$S(t)=\int v(t)\,dt=\int(-3t^2+3at)\,dt=-t^3+\frac{3}{2}at^2+C$

이때, $S(0)=16$이므로 $C=16$이다. $\therefore S(t)=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16$

$S(2a)=0$ 이므로 $-2a^3+16=0$　$\therefore a=2$



$0<t<2$일 때 $v(t)>0$ 이고, $t>2$일 때 $v(t)<0$ 이다.

$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt = \int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^5 v(t)\,dt$

$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2-\left[-t^3+3t^2\right]_2^5$

$=4-(-54)=58$

11. 공차가 $d\,(0<d<1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_5는 자연수이다.
(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8=\frac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은? [4점]

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

$a_n = dn + b$ (b는 상수) 라 하자.

(가) $5d+b$는 자연수 ㉠

(나) $S_8 = \sum_{n=1}^{8}(dn+b)$

$= d\sum_{n=1}^{8} n + \sum_{n=1}^{8} b$

$= d \times \frac{8\times 9}{2} + 8b = 36d + 8b$

$36d+8b=\frac{68}{3}$이므로 $b=-\frac{9}{2}d+\frac{17}{6}$ ㉡

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$이다.

$0<d<1$이므로 $\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$이 자연수라면 그 값은 3이다.

$\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}=3$이므로 $d=\frac{1}{3}$

이를 ㉡에 대입하면 $b=\frac{4}{3}$

$\therefore a_n=\frac{1}{3}n+\frac{4}{3}$

따라서 $a_{16}=\frac{20}{3}$

12. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<4$일 때, $f(x)=x^3+ax^2+bx$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이다.

$\int_4^7 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

$f(x)$는 $x=4$에서 연속이므로 $f(4)=\lim_{x\to4-}f(x)$이다.

- $\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x^3+ax^2+bx)=16a+4b+64$
- (나)의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(4)=f(0)+16=16$

$16a+4b+64=16$이므로 $4a+b=-12$ ㉠

$f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하므로 $f'(4)=\lim_{x\to4-}f'(x)$이다.

- $\lim_{x\to4-}f'(x)=\lim_{x\to4-}(x^3+ax^2+bx)'$

$=\lim_{x\to4-}(3x^2+2ax+b) = 8a+b+48$

- (나)의 양변을 미분하면 $f'(x+4)=f'(x)$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f'(4)=f'(0)=b$

$8a+b+48=b$이므로 $a=-6$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 b를 구하면 $b=12$

$\therefore$ $0\le x<4$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+12x$

$f(x+4)=f(x)+16$이므로

$\int_4^7 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x+4)\,dx=\int_0^3\{f(x)+16\}\,dx$

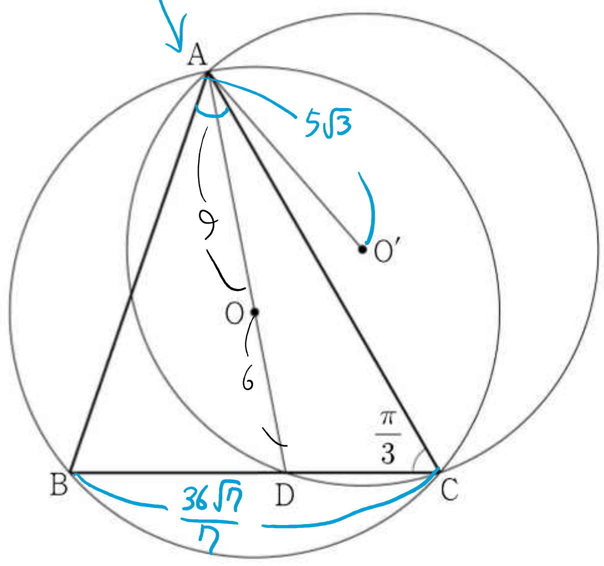
$=\int_0^3(x^3-6x^2+12x+16)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2+16x\right]_0^3=\frac{273}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\quad \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\quad \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC 의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{OO'}^2$ 의 값은? (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

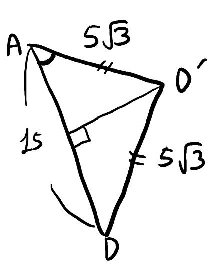
원 O의 반지름을 R이라 하면

$$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin(\angle BAC)}=\frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{2\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}}=9$$

그리고 $\overline{AB}=2R\sin\frac{\pi}{3}=2\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

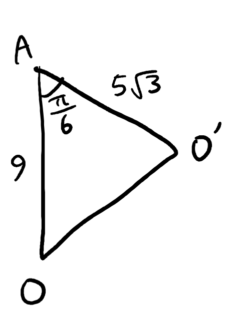
삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해

$$\overline{AD}=2\times\underbrace{5\sqrt{3}}_{\text{원 O′ 반지름 길이}}\times\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin(\angle ACD)}=15$$



왼쪽 그림을 통해 $\cos(\angle O'AD)=\frac{\left(\frac{15}{2}\right)}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 임을 알 수 있다.

$\therefore \angle O'AD=\frac{\pi}{6}$



삼각형 OO′A 에서 제2코사인법칙에 의해

$$\overline{OO'}^2=\overline{OA}^2+\overline{O'A}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{O'A}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=81+75-135=21$$

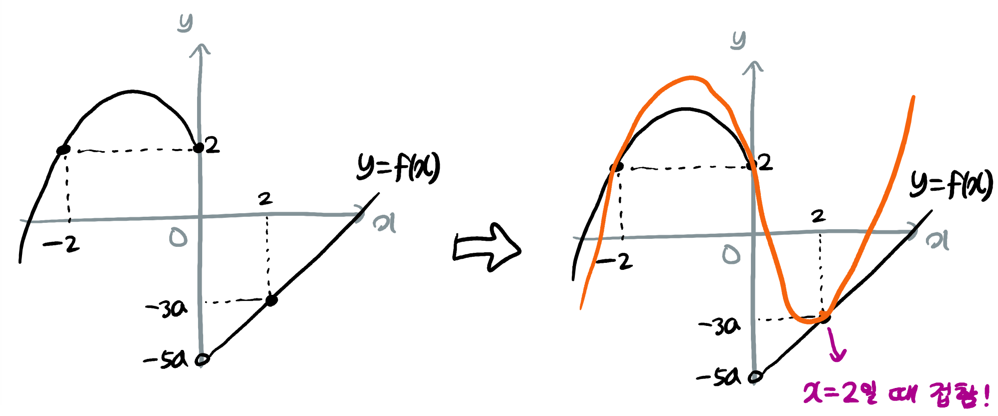
14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+4 & (x\le 0)\\ a(x-5) & (x>0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 $-2,\ 0,\ 2$일 때, $g(2a)$의 값은? [4점]

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

$y=f(x)$의 그래프를 먼저 그리고, 조건을 만족시키는 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 덧붙여 그리면 다음과 같다.



따라서 함수 $g(x)$는 다음 조건들을 만족시킨다.

• $g(-2)=g(0)=2$ • $g(2)=-3a$ • $g'(2)=a$

$g(-2)=g(0)=2$이고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $\underbrace{g(x)=x(x+2)(x-k)+2}_{㉠}$ (k는 상수)

$\therefore g(x)=x^3+(2-k)x^2-2kx+2$

$g'(x)=3x^2+(4-2k)x-2k$이고 $g'(2)=a$이므로

$20-6k=a$ $\therefore k=\frac{10}{3}-\frac{a}{6}$

이를 ㉠에 대입하면 $g(x)=x(x+2)\left(x+\frac{a}{6}-\frac{10}{3}\right)+2$

$g(2)=2\times4\times\left(-\frac{4}{3}+\frac{a}{6}\right)+2=-\frac{26}{3}+\frac{4}{3}a$이고,

이 값은 $-3a$와 같으므로 $-\frac{26}{3}+\frac{4}{3}a=-3a$

$\therefore a=2$

따라서 $g(x)=x(x+2)(x-3)+2$이고 $2a=4$이므로

$g(2a)=g(4)=4\times6\times1+2=26$

2024학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (15~22번)

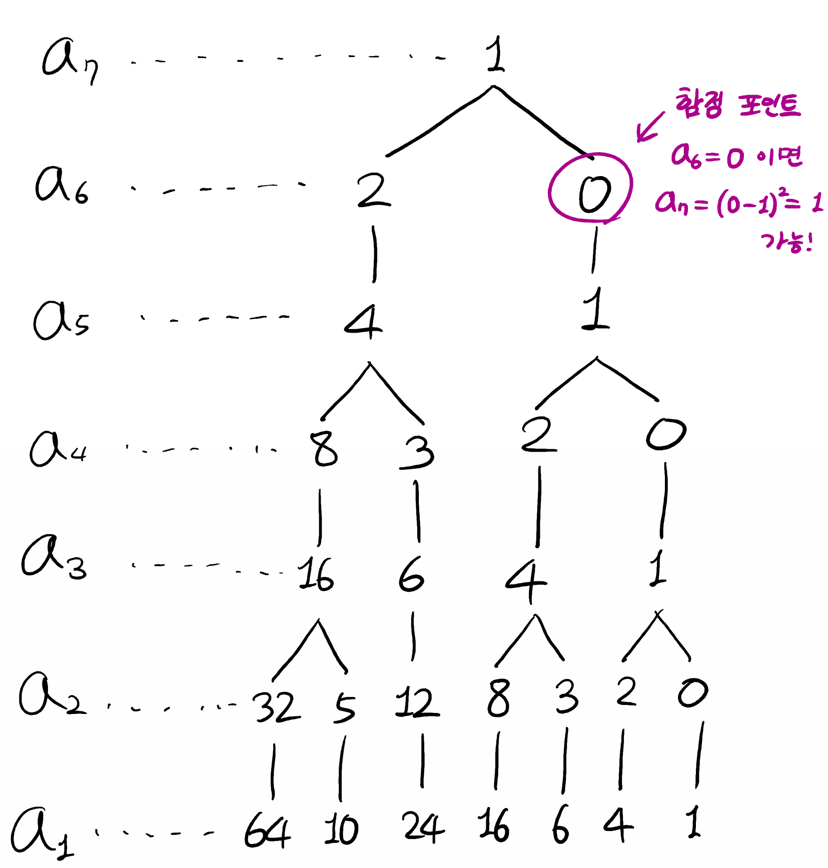
2024년 7월 14일 일요일 오후 3:47

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right)\\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140



$64+10+24+16+6+4+1=125$

- a_{n+1}이 1이거나 짝수인 제곱수일 때만 두 가지 케이스로 나뉜다.
  그 외의 경우는 모두 $a_n=2a_{n+1}$ 이다.

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

11

$$\log_5(x+9)=\log_5\{4(x-6)\}$$

$$x+9=4(x-6)$$

$$\therefore x=11$$

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

50

$$f'(x)=(x-3)'(x^2+x-2)+(x-3)(x^2+x-2)'$$

$$=(x^2+x-2)+(x-3)(2x+1)$$

$$f'(5)=28+2\times 11=50$$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=45, \quad 2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$$

㉠ ㉡

일 때, a_{15}의 값을 구하시오. [3점] 37

㉠에서 $3\sum_{k=1}^{15}a_k+\underbrace{\sum_{k=1}^{15}2}_{2\times 15=30}=45$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=5$

㉡에서 $2\times 5=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$

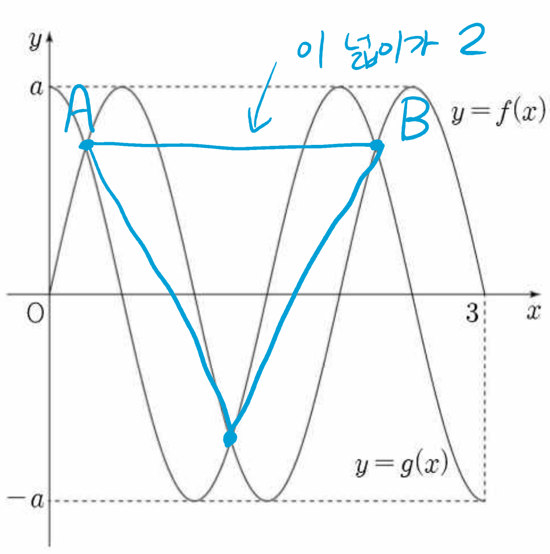
$\therefore \sum_{k=1}^{14}a_k=-32$

$\therefore a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_k=5-(-32)=37$

19. 양수 a에 대하여 $0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\pi x, \quad g(x)=a\cos\pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점] 2

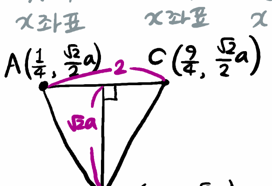


$f(x)=g(x)$이면 $\sin\pi x=\cos\pi x$이다.

$\sin\pi x=\cos\pi x$인 양수 x를 작은 것부터 나열하면

$\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{4}$, ...

A의 x좌표, B의 x좌표, C의 x좌표



왼쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$ 이고, 이 값이 2이므로 $\sqrt{2}a=2$

$\therefore a=\sqrt{2} \rightarrow a^2=2$

20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\ne 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

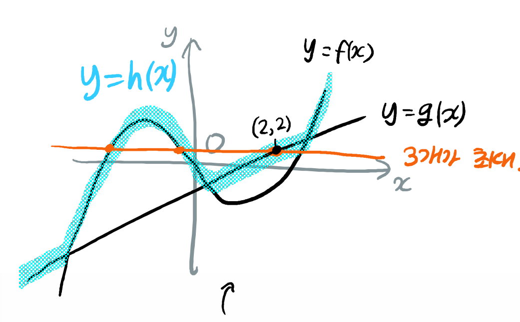
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

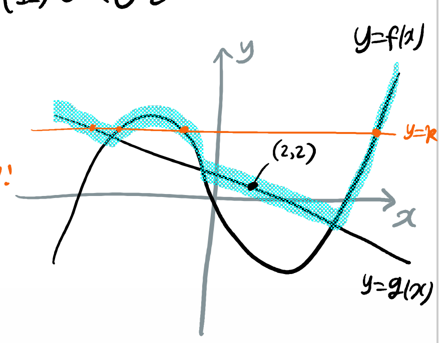
$10\times(M-m)$의 값을 구하시오. [4점] 35

(i) $a>0$일 때



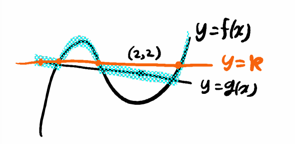
$h(x)=k$의 서로 다른 실근이 4개 될 수 없음

(ii) $a<0$일 때



$h(x)=k$의 서로 다른 실근이 4개가 되는 것 가능

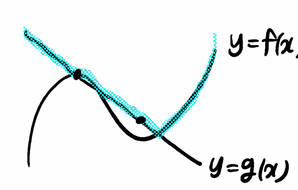
(1) M 구하기



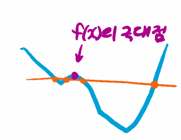
$y=g(x)$를 최대한 완만하게 그려도 조건을 만족시키는 실수 k가 존재하므로

$a<0$ $\therefore M=0$

(2) m 구하기



$y=g(x)$가 $y=f(x)$의 극대점을 지나면 조건을 만족시키는 k가 존재하지 않는다. 여기서 직선이 조금만 완만해져도 $y=h(x)$의 그래프가 다음과 같이 된다.



따라서 $a=m$일 때는 직선 $y=g(x)$가 직선 $y=f(x)$의 극대점 $(-2, 16)$을 지난다.

직선 $y=m(x-2)+2$가 점 $(-2, 16)$을 지나므로

$-4m+2=16$ $\therefore m=-\frac{7}{2}$

이상으로 $10(M-m)=10\{0-(-\frac{7}{2})\}$

$=35$

21. $m\le -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

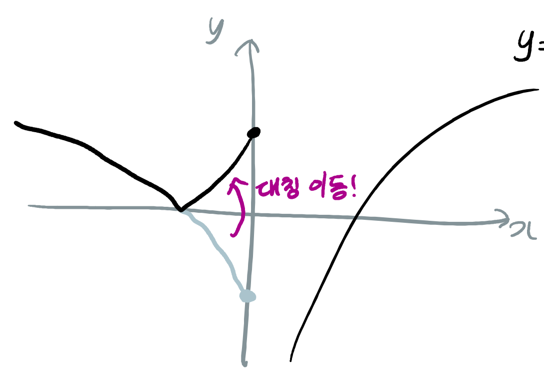
22. 두 자연수 a, $b\ (a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

21. $m \leq -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

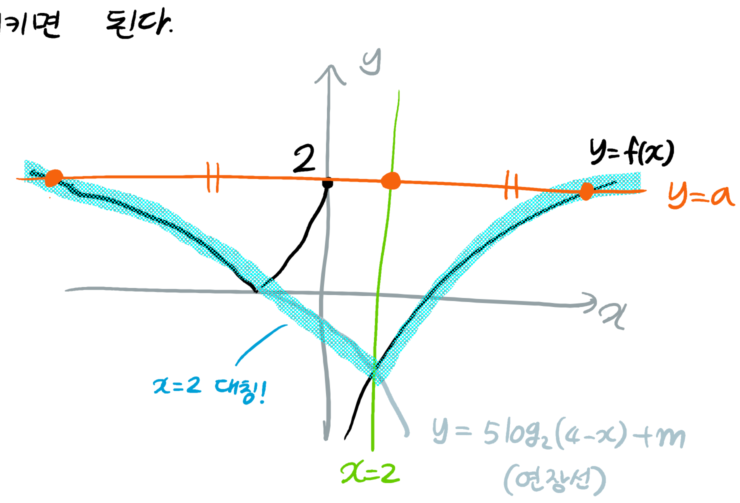
$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \leq 0) \\ 5\log_2 x+m & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오. [4점] 8

$t \geq a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.



주어진 조건을 만족시키려면 다음 조건을 만족시키면 된다.



두 곡선 $y=5\log_2(4-x)+m$과 $y=5\log_2 x+m$은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $f(0)=2$로 설정하면 대칭성에 의해 $a\geq 2$인 모든 실수 a에 대해 $f(x)=a$의 모든 실근의 합이 4로 유지된다.

$f(0)=2$이므로 $|\underbrace{5\log_2 4}_{10}+m|=2$ 이므로

$m=-8$ 또는 $m=-12$인데, 처음에 그린 그림에 따르면 $x=0$일 때 원래 값은 음수이지만 절댓값에 의해 양수가 된 것이므로 $m=-12$이다.

따라서 $f(m)=f(-12)=|5\log_2 16-12|$

$=|20-12|=8$

22. 두 자연수 a, $b\,(a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<a) \\ x-10 & (a \leq x < b) \\ |x-9|-1 & (x \geq b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$의 값을 구하시오. [4점] 96

(가)에서 $f(x)f(x+k)$가 연속이 되도록 신경써야 할 부분은

$\underbrace{x=a}_{(iii)}$ 또는 $\underbrace{x=b}_{(ii)}$ 또는 $\underbrace{x+k=a}_{(i)}$ 또는 $\underbrace{x+k=b}_{(iv)}$

총 4개의 x값에서 $f(x)f(x+k)$가 연속이 되도록 설정해야 한다.

(i) $x=a-k$일 때

$x=a-k$일 때 $f(x)f(x+k)$의 좌극한과 함숫값을 일치시킨다.

좌극한 : $\displaystyle\lim_{x\to(a-k)-} f(x)f(x+k)=f(a-k)\lim_{x\to a-}f(x)=f(a-k)(|a+3|-1)$

함숫값 : $f(a-k)f(a)=f(a-k)\cdot(a-10)$

이므로 $\boxed{f(a-k)(|a+3|-1)=f(a-k)\cdot(a-10)}$을 만족시키려면

$f(a-k)=0$이거나 $|a+3|-1=a-10$이면 된다. 그러나 a가 자연수이므로

후자를 만족시킬 수는 없다. 따라서 $f(a-k)=0$이므로

$\therefore a-k=-4$ 또는 -2 ⋯ ㉠

(ii) $x=b$일 때

(i)과 유사한 방법으로 $\boxed{(b-10)f(b+k)=(|b-9|-1)f(b+k)}$ (좌극한=함숫값)

$f(b+k)=0$ 또는 $b-10=|b-9|-1$을 만족시키면 된다는 결론을 얻는다.

그러나 $b<8$이므로 후자를 만족시킬 수는 없고 전자를 택한다.

$\therefore b+k=8$ 또는 10 ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 a, b와 양수 k로 가능한 것들을 모두 나열하자. ㉠+㉡을 해서 $a+b$를 먼저 구하고 그 다음에 k를 설정하면 된다.

① $a-k=-4$이고 $b+k=8$이면 $a=1$, $b=3$, $k=5$ ✗ (나) 조건 위배 → $f(k)=3$이 되므로

② $a-k=-4$이고 $b+k=10$이면 $\begin{cases} a=1,\ b=5,\ k=5 \text{ ✗} \\ a=2,\ b=4,\ k=6 \text{ ✗} \end{cases}$ 둘 다 (나) 조건 위배

③ $a-k=-2$이고 $b+k=8$이면 $\begin{cases} a=1,\ b=5,\ k=3 \text{ O} \\ a=2,\ b=4,\ k=4 \text{ ✗ (나) 조건 위배} \end{cases}$

④ $a-k=-2$이고 $b+k=10$이면 $\begin{cases} a=1,\ b=7,\ k=3 \text{ O} \\ a=2,\ b=6,\ k=4 \text{ O} \\ a=3,\ b=5,\ k=5 \text{ ✗} \end{cases}$

이 세 가지만 검사하면 된다!

(1) $a=1$, $b=5$, $k=3$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x)f(x+3)=-18$이고 $f(1)f(4)=54$이므로 $\underbrace{x=1}_{x=a}$에서 불연속 ✗

(2) $a=1$, $b=7$, $k=3$이면 마찬가지로 $\underbrace{x=1}_{x=a}$에서 불연속됨 ✗

(3) $a=2$, $b=6$, $k=4$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 2-} f(x)f(x+4)=f(2)f(6)=-16$이므로 $\underbrace{x=2}_{x=a}$에서 연속이고,

$a+k=b$인데 이미 $x=b$에서 연속이 되도록 설정했으므로 $x=a+k$에서도 당연히 연속이다.

따라서 $a=2$, $b=6$, $k=4$이므로

$f(a)=f(2)=-8$, $f(b)=f(6)=2$, $f(k)=f(4)=-6$이다.

$f(a)\times f(b)\times f(k)=(-8)\times 2\times(-6)=96$

2024학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (확률과 통계)

2024년 7월 14일 일요일 오후 3:47

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

일반항 : ${}_5C_r \cdot (2x)^r \cdot 1^{5-r}$

$= {}_5C_r \cdot (2x)^r$

$r=2$이면 이차항이 나온다.

${}_5C_2 \cdot (2x)^2 = 40x^2$

24. 두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2},\quad P(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$$

일 때, $P(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{13}{24}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{17}{24}$

A와 B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}$에서 $P(A)P(B)=\frac{1}{2}$ … ㉠

$P(A^c\cap B)=\frac{1}{4}$에서 $P(A^c)P(B)=\frac{1}{4}$ … ㉡

㉡에서 $P(A^c)=1-P(A)$이므로

$P(B)-P(A)P(B)=\frac{1}{4}$ … ㉢

㉠+㉢을 하면 $P(B)=\frac{3}{4}$

이를 ㉠에 대입하여 $P(A)$를 구하면

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

25. $0<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	a	b	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{18}$일 때, ab의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

확률의 합은 1이므로 $\boxed{a+b=\frac{2}{3}}$

$E(X) = 0\times\frac{1}{3} + a\times a + b\times b = a^2+b^2$

이고 이 값이 $\frac{5}{18}$이므로

$\boxed{a^2+b^2=\frac{5}{18}}$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 이므로

$$ab = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$$

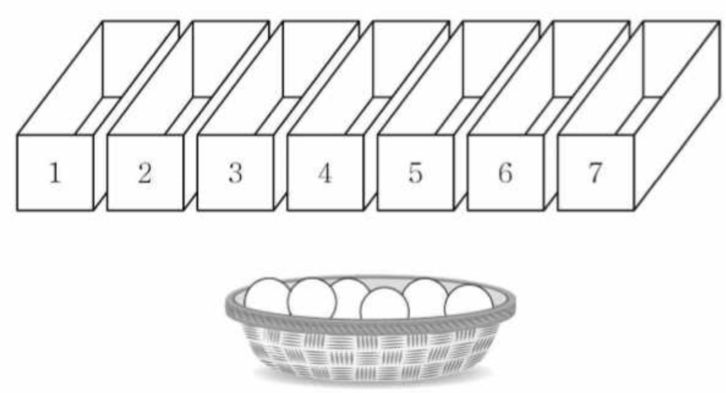
$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{5}{18}}{2} = \frac{1}{12}$$

26. 공이 3개 이상 들어 있는 바구니와 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적힌 7개의 비어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 $n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$일 때,
>
> 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있지 않으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 n이 적힌 상자에 넣고,
>
> 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 7이 적힌 상자에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



주사위를 3번 던졌을 때, 똑같은 주사위 눈이 나오는 경우가 존재하면 7번 상자에 공이 하나 이상 들어가게 된다.
이는 주사위의 눈이 모두 다르게 나오는 경우의 여사건이다.

주사위 눈이 모두 다르게 나올 확률은

$\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{9}$이므로

여사건의 확률은 $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

27. 세 문자 P, Q, R 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

나열된 8개의 문자 중에서 세 문자 P, Q, R의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때 $1 \le p < q < r$이다.

① 440 ② 448 ③ 456 ④ 464 ⑤ 472

$p+q+r=8$ 과 $1 \le p < q < r$ 을 만족시키는 모든 경우에 대해 케이스 분류를 한다.

(i) $p=1$, $q=2$, $r=5$일 때

P 1개, Q 2개, R 5개를 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{2!5!} = 168$

(ii) $p=1$, $q=3$, $r=4$일 때

P 1개, Q 3개, R 4개를 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{3!4!} = 280$

이 외의 경우는 없다.

이상으로 구하는 경우의 수는 $168+280=448$

28. 주머니에 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 4번 꺼내어 나온 공에 적혀 있는 수를 꺼낸 순서대로 a, b, c, d라 하자. $a \times b + c + d$가 홀수일 때, 두 수 a, b가 모두 홀수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\dfrac{5}{26}$ ② $\dfrac{3}{13}$ ③ $\dfrac{7}{26}$ ④ $\dfrac{4}{13}$ ⑤ $\dfrac{9}{26}$

(i) a, b가 모두 홀수일 때

$a \times b$가 홀수이므로 $c+d$는 짝수가 되어야 한다.

즉, c와 d는 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수이다.

홀수만 2개 뽑고 나면 홀수는 3개, 짝수는 4개 남으므로

이 케이스의 확률은 $\dfrac{{}_5P_2}{{}_9P_2} \times \dfrac{{}_3P_2 + {}_4P_2}{{}_7P_2} = \boxed{\dfrac{5}{42}}$

홀수만 2개 홀수만 2개 짝수만 2개

a,b 뽑는 모든 경우의 수 c,d 뽑는 모든 경우의 수

(ii) a, b가 모두 짝수일 때

$a \times b$가 짝수이므로 $c+d$는 홀수가 되어야 한다.

즉, c와 d 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

짝수만 2개 뽑고 나면 홀수는 5개, 짝수는 2개 남으므로

이 케이스의 확률은 $\dfrac{{}_4P_2}{{}_9P_2} \times \dfrac{5\times2 + 2\times5}{{}_7P_2} = \boxed{\dfrac{5}{63}}$

(iii) a, b 중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수일 때

$a \times b$가 짝수이므로 $c+d$는 홀수가 되어야 한다.

즉, c와 d 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

홀짝을 하나씩 뽑고 나면 홀수는 4개, 짝수는 3개 남으므로

이 케이스의 확률은 $\dfrac{5\times4 + 4\times5}{{}_9P_2} \times \dfrac{4\times3 + 3\times4}{{}_7P_2} = \boxed{\dfrac{20}{63}}$

(i)~(iii)의 확률을 모두 더하면

$\dfrac{5}{42} + \dfrac{5}{63} + \dfrac{20}{63} = \dfrac{65}{126}$ 이므로

이 중에서 (i)이 발생할 확률은

$\dfrac{\left(\frac{5}{42}\right)}{\left(\frac{65}{126}\right)} = \dfrac{3}{13}$

단답형

29. 두 양수 m, σ에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m^2+2m+16,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 X, Y는

$$\mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}(Y \le 0)$$

을 만족시킨다. σ의 값이 최소가 되도록 하는 m의 값을 m_1이라 하자. $m = m_1$일 때, 두 확률변수 X, Y에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(Y \le k)$$

를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. [4점] 70

$P(X \le 0) = P(Y \le 0)$ 이므로

$$\frac{0-m}{1} = \frac{0-(m^2+2m+16)}{\sigma}$$

↳ $\sigma = m + \frac{16}{m} + 2$ 산술·기하 평균

$\ge 2\sqrt{m \cdot \frac{16}{m}} + 2$

$= 10$

따라서 σ의 최솟값은 10이고 이 때 $m=4$이다.

확률변수 X는 정규 분포 $N(4,\ 1^2)$을 따르고

확률변수 Y는 정규분포 $N(40,\ 10^2)$을 따른다.

$P(X \ge 1) = P(Y \le k)$

에서 X와 Y를 표준화시키면

$$P\left(Z \ge \frac{1-4}{1}\right) = P\left(Z \le \frac{k-40}{10}\right)$$

↳ $P(Z \ge -3) = P\left(Z \le \frac{k-40}{10}\right)$

따라서 $\frac{k-40}{10} = -(-3) = 3$이므로 $k = 70$

30. 두 집합

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\quad Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점] 198

(가) $f(1) \le f(2) \le f(1)+f(3) \le f(1)+f(4)$
(나) $f(1)+f(2)$는 짝수이다.

(나) 조건에 따라 케이스를 나누자.

(i) $f(1) = f(2)$일 때

$f(3) \le f(4)$이기만 하면 (가) 조건을 만족시킨다.

따라서 이 케이스에 해당하는 함수 f의 개수는

$$\underbrace{6}_{f(1)=f(2)\text{ 값 설정}} \times \underbrace{{}_6H_2}_{f(3),\,f(4)\text{ 값 설정}} = \boxed{126}$$

(ii) $f(2) = f(1)+2$일 때

$\underbrace{f(2)}_{f(1)+2} \le f(1)+f(3) \le f(1)+f(4)$이므로

$2 \le f(3) \le f(4)$를 만족시키면 된다.

이 케이스에 해당하는 함수 f의 개수는

$$\underbrace{4}_{f(1),\,f(2)\text{ 값 설정}} \times \underbrace{{}_5H_2}_{f(3),\,f(4)\text{ 값 설정}} = \boxed{60}$$

(iii) $f(2) = f(1)+4$일 때

$4 \le f(3) \le f(4)$이므로 이 케이스에 해당하는

함수 f의 개수는 $2 \times {}_3H_2 = \boxed{12}$

이상으로 구하는 함수 f의 총 개수는

$126 + 60 + 12 = 198$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (미적분)

2024년 7월 14일 일요일 오후 3:47

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\ln 5}{3}$ ② $\frac{1}{\ln 5}$ ③ $\frac{2}{3}\ln 5$ ④ $\frac{2}{\ln 5}$ ⑤ $\ln 5$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$= \ln 5 \times 1 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 5$$

24. 매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=3t-\frac{1}{t},\quad y=te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$$\frac{dy}{dt} = e^{t-1}+te^{t-1}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3+\frac{1}{t^2}$$

$t=1$일 때, $\frac{dy}{dt}=2$, $\frac{dx}{dt}=4$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6 \quad \cdots ㉠$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$$\sqrt{n^2+4}-n = \frac{(\sqrt{n^2+4}-n)(\sqrt{n^2+4}+n)}{\sqrt{n^2+4}+n}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{n^2+4}+n}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{\sqrt{n^2+4}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{a_n}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+1}$$

$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 6$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n^2}+6}{\frac{a_n}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

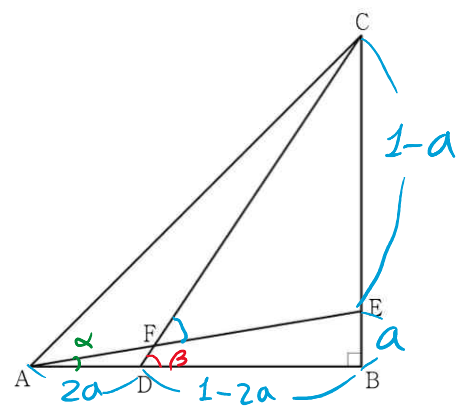
$$= \frac{0+6}{3+0} = 2$$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE} \quad (0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은?

(단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$\angle FAD=\alpha$, $\angle FDB=\beta$라 하자.

$\tan\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = a$이고 $\tan\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} = \frac{1}{1-2a}$이다.

$\beta = \alpha+\angle AFD = \alpha+\angle CFE$이므로

$\tan\beta = \tan(\alpha+\angle CFE)$이다.

- $\tan\beta = \frac{1}{1-2a}$ ⋯ ㉠

구해야 할 것

- $\tan(\alpha+\angle CFE) = \frac{a+\frac{16}{15}}{1-\frac{16}{15}a} = \frac{15a+16}{15-16a}$

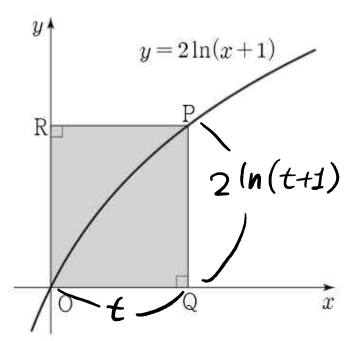
따라서 $\frac{1}{1-2a} = \frac{15a+16}{15-16a}$이므로 $a=\frac{1}{6}$

구해야 할 값은 $\tan\beta$이므로 ㉠에

$a=\frac{1}{6}$을 대입하면 $\tan\beta = \frac{3}{2}$

27. 양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-2+12\ln 2$ ② $-1+12\ln 2$ ③ $-2+16\ln 2$
④ $-1+16\ln 2$ ⑤ $-2+20\ln 2$



$f(t) = 2t\ln(t+1)$ 이므로

$$\int_1^3 f(t)\,dt = 2\int_1^3 t\ln(t+1)\,dt$$

$$= \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}t^2\ln(t+1)\right]_1^3 - \cancel{2}\int_1^3 \frac{t^2}{\cancel{2}(t+1)}dt$$

$$= 17\ln 2 - \int_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt$$

$$= 17\ln 2 - \int_2^4 \frac{(t-1)^2}{t}dt$$

$$= 17\ln 2 - \int_2^4 \frac{t^2-2t+1}{t}dt$$

$$= 17\ln 2 - \int_2^4 \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= 17\ln 2 - \left[\frac{1}{2}t^2-2t+\ln t\right]_2^4$$

$$= -2+16\ln 2$$

28. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 $k\ (k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k) \\ \dfrac{1}{3} & (x=k) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

(가) $h(0)=1$ (나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

(가)에서 $\dfrac{g(0)-k}{-k}=1$ 이므로 $g(0)=0$

(나)에서 $\lim_{x\to k} h(x) = h(k)$ 이므로 $g(k)=k$, $g'(k)=\frac{1}{3}$이다.

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(0)=0$, $f(k)=k$, $f'(k)=\dfrac{1}{g'(k)}=3$이다.

$f(0)=0$, $f(k)=k$이므로 어떤 실수 a에 대해

$f(x)=x(x-k)(x-a)+x$ 이다.

이를 미분하면 $f'(x)=3x^2-2(a+k)x+ak+1$

$f'(k)=3$ 이므로 $k^2-ak+1=3$ $\therefore a=k-\frac{2}{k}$

$f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 증가함수이다.
따라서 방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\leq 0$이다.

$a=k-\frac{2}{k}$

$$\frac{D}{4}=(a+k)^2-3(ak+1)=\left(2k-\frac{2}{k}\right)^2-3(k^2-1)=k^2-5+\frac{4}{k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2}(k^4-5k^2+4)=\frac{1}{k^2}(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$$

$\therefore 1\leq k\leq 2$

이 중에서 $f'(0)=k^2-1$이 최대가 되는 k의 값은 2이다.

$\boxed{\therefore \alpha=2}$

$\alpha=2$일 때, $f(x)=x(x-1)(x-2)+x=x^3-3x^2+3x$

이므로 $f(3)=9$, $g(9)=3$이다.

따라서 $h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}=\dfrac{3-2}{7}=\boxed{\dfrac{1}{7}}$

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(3)}=\boxed{\dfrac{1}{12}}$ 이므로 $\alpha\times h(9)\times g'(9)=\dfrac{1}{42}$

단답형

29. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점] 12

$a_n = r^{n-1}$ $(-1<r<0)$이라 하자. ㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}20a_{2n} = 20\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1} = \boxed{\frac{20r}{1-r^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}21|a_{3n-1}| = 21\sum_{n=1}^{\infty}|r^{3n-2}|$$

$$= 21\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^{3n-2} = \frac{-21r}{1-(-r^3)} = \boxed{\frac{-21r}{1+r^3}}$$

$\frac{20r}{1-r^2}-\frac{21r}{1+r^3}=0$ 이므로

↳ $20(1+r^3)-21(1-r^2)=0$

↳ $20\cancel{(1+r)}(1-r+r^2)-21\cancel{(1+r)}(1-r)=0$

↳ $20r^2+r-1=0 \rightarrow (4r+1)(5r-1)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{4}$ $(\because -1<r<0)$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+b_n}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{3(-1)^{n-1}+b_n(-4)^{n-1}\right\}=0$$

$3(-1)^{n-1}+b_n\cdot(-4)^{n-1}=0$ 이 되면 극한값도 0이 되므로

$$b_n = -3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{이다.}$$

따라서 $b_1=-3$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-4$이므로

이므로 $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=(-3)\times(-4)=12$

30. 상수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln(e^{|t|}-a)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.
>
> (나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오. [4점] 144

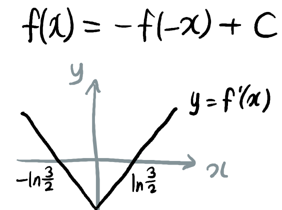
$f'(x)=\ln(e^{|x|}-a)$ 이다.

(가)에서 $f'(\ln\frac{3}{2})=0$이므로 $\ln(\frac{3}{2}-a)=0$

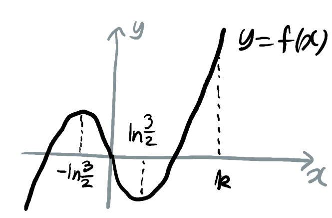
$\therefore a=\frac{1}{2}$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이므로

$f(x)=-f(-x)+C$이고, $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 기함수이다.



⇨



$$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx$$

$$=\int_{\ln\frac{3}{2}}^{k}\frac{f'(x)}{f(x)-f(-k)}dx+\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{-f'(x)}{f(x)-f(-k)}dx$$

$$=\Big[\ln|f(x)-f(-k)|\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^{k}-\Big[\ln|f(x)-f(-k)|\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$=\ln\{f(k)-f(-k)\}-2\ln\{f(\ln\tfrac{3}{2})-f(-k)\}+\ln\{-f(-k)\}$$

이때, (나)조건과 $f(x)$가 기함수라는 점을 이용하면

$f(k)=-6f(\ln\frac{3}{2})$, $f(-k)=6f(\ln\frac{3}{2})$ 이다. 이어서 계산하면

$$\ln\{-12f(\ln\tfrac{3}{2})\}-2\ln\{-5f(\ln\tfrac{3}{2})\}+\ln\{-6f(\ln\tfrac{3}{2})\}$$

$$=\ln\left[\frac{\{-12\cancel{f(\ln\frac{3}{2})}\}\cdot\{-6\cancel{f(\ln\frac{3}{2})}\}}{25\{\cancel{f(\ln\frac{3}{2})}\}^2}\right]=\ln\frac{72}{25}$$

따라서 $p=\ln\frac{72}{25}$이다.

$\therefore 100\times a\times e^p = 100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

2024학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (기하)

2024년 7월 14일 일요일 오후 3:47

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 0)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

$\vec{a}+\vec{b}=(2,1)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=|(2,1)|$

$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

24. 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2a^2}=1$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기가 -3일 때, a의 값은? (단, a는 양수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

접선의 방정식을 구하면

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{ay}{2a^2}=1$

↳ $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2a}=1$

↳ $y=\underbrace{-\dfrac{a}{2}}_{\text{기울기}}x+2a$

$-\dfrac{a}{2}=-3$이다. $a=6$

25. 좌표평면 위의 점 A(4, 2)에 대하여

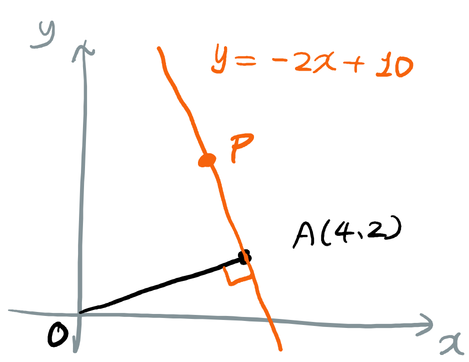
$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

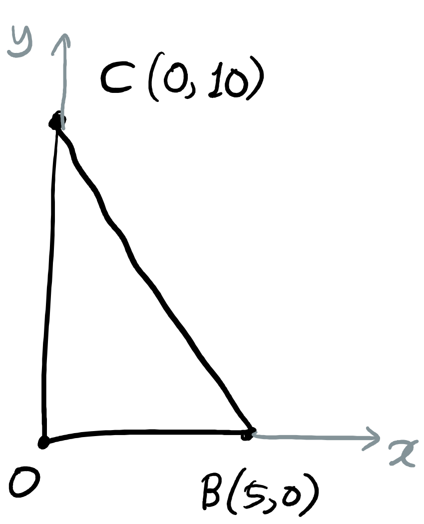
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}$ 이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$이다.

따라서 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{OA}$는 서로 수직이다.



점 P가 나타내는 도형은 점 A(4,2)를 지나며 $\overrightarrow{OA}$에 수직인 직선이다.

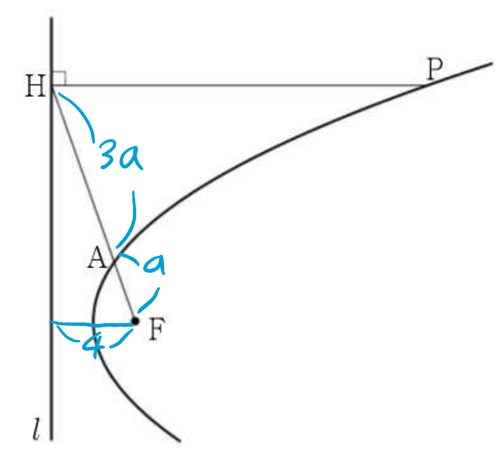
즉, $y=-2x+10$이다.



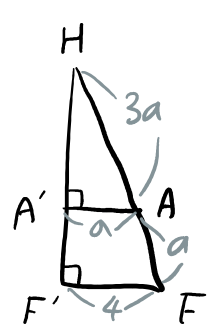
삼각형 OBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times10=25$

26. 점 F를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 있다. 이 포물선 위의 한 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 FH가 이 포물선과 만나는 점을 A라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리가 4이고 $\overline{HA}:\overline{AF}=3:1$일 때, 선분 PH의 길이는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



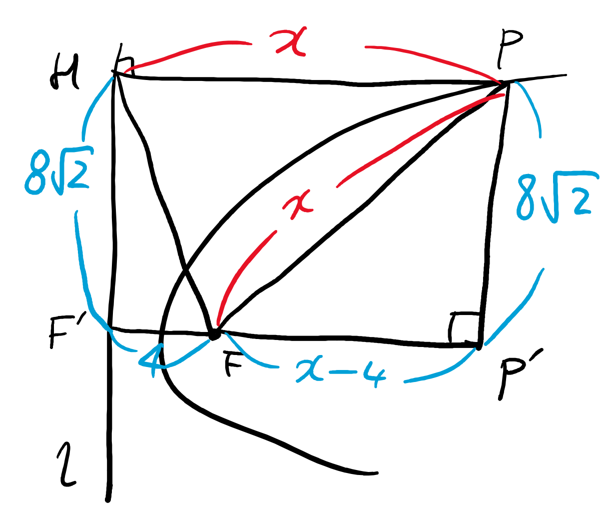
$\overline{FA}=a$라 하고



점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 A′ 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 F′이라 하자. $\triangle HA'A \backsim \triangle HF'F$이므로

$\overline{HA}:\overline{A'A}=\overline{HF}:\overline{F'F}$

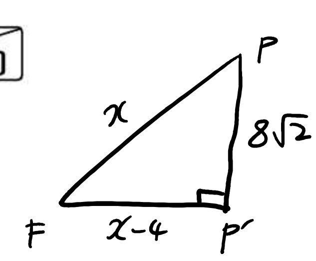
$3a:a=4a:4$ $\therefore a=3$



선분 F′H의 길이는 피타고라스의 정리를 이용해 $8\sqrt{2}$로 구할 수 있다.

$\overline{PH}=x$라 하고, 점 P에서 직선 F′F에 내린 수선의 발을 P′이라 하자. 삼각형 PFP′에서

구해야할 것

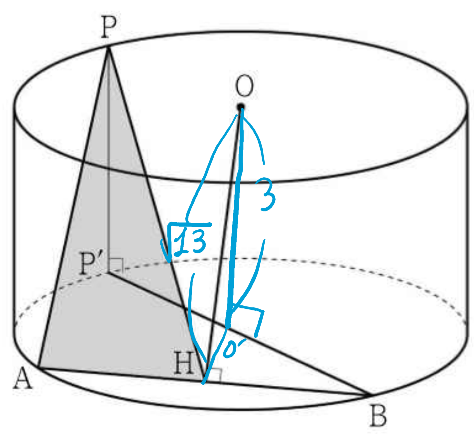


$(x-4)^2+(8\sqrt{2})^2=x^2$

$\therefore x=18$

27. 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 3인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 한 밑면의 둘레 위의 한 점 P에서 다른 밑면에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 점 P를 포함하는 밑면의 중심을 O라 하자. 점 P′을 포함하는 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{BP'}}=6$, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 PAH의 넓이는? [3점]

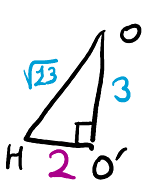
① $\sqrt{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{5}$



밑면의 반지름의 길이가 3인데 $\overline{BP'}=6$이므로

선분 BP′은 밑면의 지름이다.

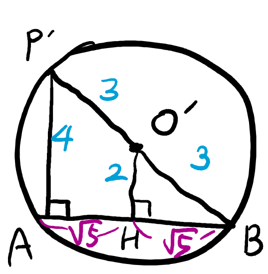
따라서 밑면의 중심 O′은 선분 BP′의 중심이다.



삼각형 OO′H에서 $\overline{O'H}=2$ 이다.

선분 OO′은 밑면과 수직이고 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로

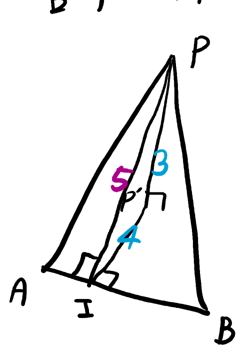
삼수선의 정리에 의해 $\overline{O'H}\perp\overline{AB}$이다.



따라서 왼쪽 그림을 통해

$\overline{AH}=\overline{BH}=\sqrt{5}$임을 알 수 있다.

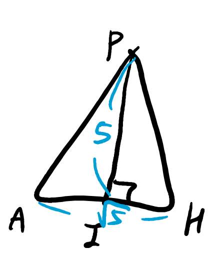
점 P′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하자.



삼각형 PP′I에서 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PI}=5$이다.

이번에도 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PI}\perp\overline{AB}$이므로

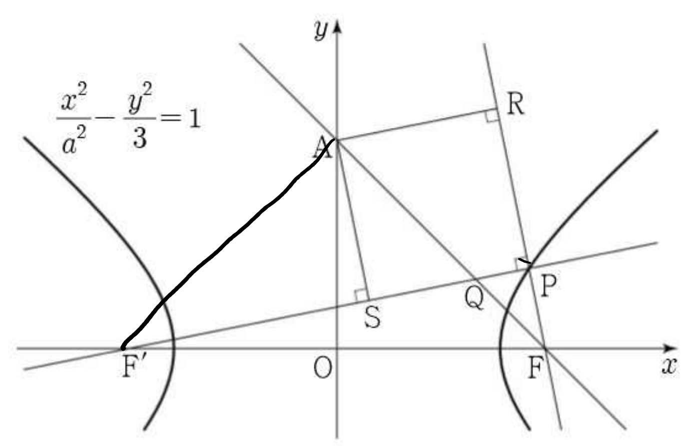


삼각형 PAH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times5=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ 이다.

28. 두 양수 a, c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$이 있다. 두 직선 PF, PF′이 서로 수직이 되도록 하는 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면 위의 점을 P, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{a}{3}$인 선분 PF′ 위의 점을 Q라 하자. 직선 QF와 y축이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서 두 직선 PF, PF′에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}$일 때, a^2의 값은? [4점]

① $\frac{18}{5}$ ② 4 ③ $\frac{22}{5}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{26}{5}$



$\overline{AS}=\overline{AR}$이고 $\overline{AF'}=\overline{AF}$이고 $\angle ASF'=\angle ARF=\frac{\pi}{2}$이므로

두 삼각형 AF′S와 AFR은 RHS 합동이다.

따라서 $\overline{F'S}=\overline{FR}$이다.

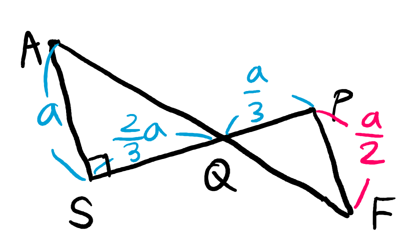
정사각형 ASPR의 한 변의 길이를 l이라 하자.

• $\overline{F'S}=\overline{F'P}-l$ • $\overline{FR}=\overline{FP}+l$

이고 $\overline{F'S}=\overline{FR}$이므로 $\overline{F'P}-l=\overline{FP}+l$

↳ $l=\frac{\overline{F'P}-\overline{FP}}{2}\overset{\text{쌍곡선의 정의}}{=}\frac{2a}{2}=a$

따라서 정사각형 ASPR의 한 변의 길이는 a이다.

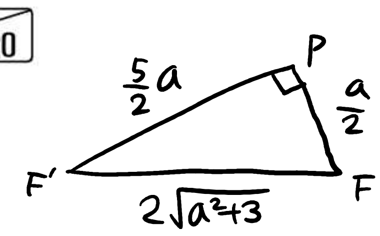


두 삼각형 ASQ와 FPQ는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{SQ}:\overline{PQ}=2:1$이므로

$\overline{FP}=\frac{1}{2}\overline{AS}=\frac{a}{2}$이다.

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{F'P}=\frac{a}{2}+2a=\frac{5}{2}a$이다.



삼각형 PF′F에서 피타고라스 정리를 이용하면 $\left(\frac{5}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{a^2+3}\right)^2$

$\frac{13}{2}a^2=4a^2+12$ $\therefore a^2=\frac{24}{5}$

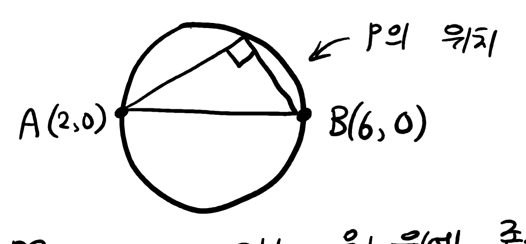
단답형

29. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(6, 0), C(0, 1)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

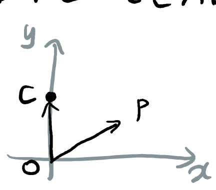
(가) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge 0$
(나) $\overrightarrow{QB}=4\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QA}$

$|\overrightarrow{QA}|=2$일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=k$이다. $20\times k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]　90

(가)에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$



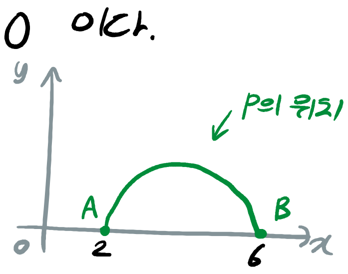
점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 존재한다.



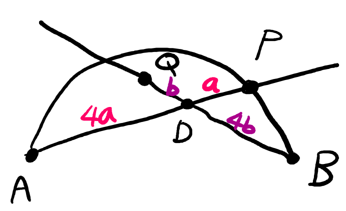
또한 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}\ge 0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각은 예각 또는 직각이다.

따라서 (점 P의 y좌표) ≥ 0 이다.

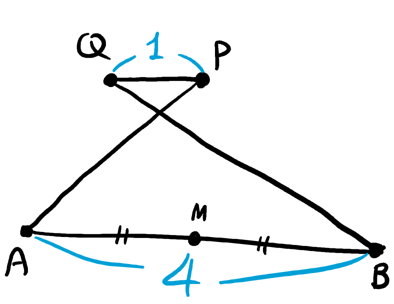
이를 종합하면 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



(나)에서 $\frac{1}{5}\overrightarrow{QB}=\frac{4\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QA}}{5}$ 이므로 선분 PA를 1:4로 내분하는 점 D에 대하여 $\frac{1}{5}\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QD}$ 이다.

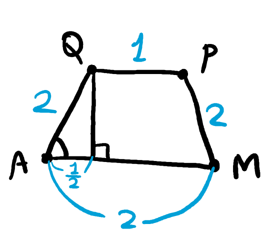


따라서 점 D는 선분 QB도 1:4로 내분한다.



두 삼각형 ADB와 PDQ는 AA닮음이고 닮음비는 4:1이다.

$\overline{AB}:\overline{PQ}=4:1$이고 $\overline{AB}=4$이므로 $\overline{PQ}=1$



점 P가 위치한 반원의 중심을 M이라 하면 $\overline{PM}=2$이다. (반지름) 따라서 $|\overrightarrow{QA}|=2$이면 사각형 AQPM은 왼쪽 그림과 같은 등변사다리꼴이다.

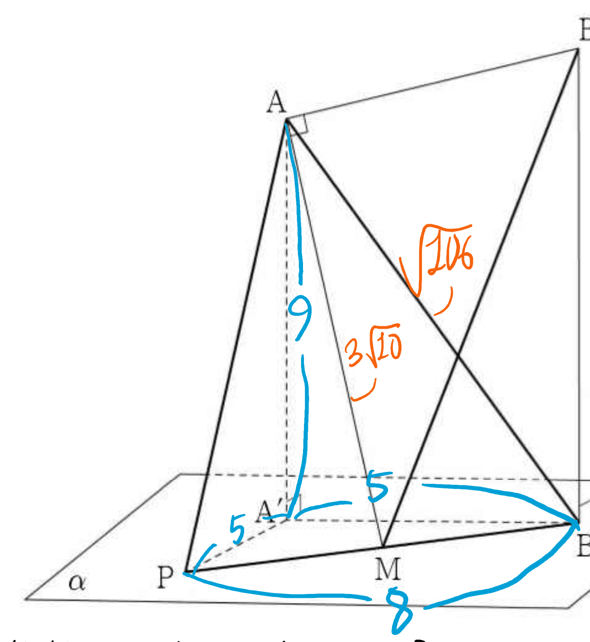
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|^2+\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=4+|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{AQ}|\cos(\angle QAM)=4+1\times2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$　　$\therefore k=\frac{9}{2}$

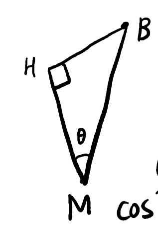
30. 공간에 점 P를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{AA'}=9,\quad \overline{A'P}=\overline{A'B'}=5,\quad \overline{PB'}=8$$

이다. 선분 PB′의 중점 M에 대하여 $\angle MAB=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 BM과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]　111

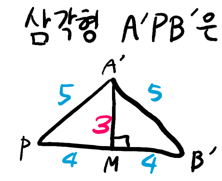


구해야 할 것

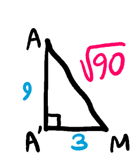


점 B에서 평면 APB′에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\theta=\angle BMH$이므로 $\cos^2(\angle BMH)=\frac{\overline{HM}^2}{\overline{BM}^2}$을 구하는 것이 목표이다.

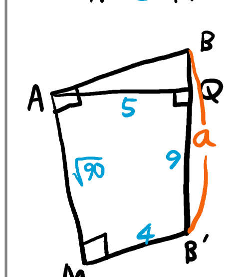
삼각형 A′PB′은 이등변삼각형이므로 $\overline{A'M}\perp\overline{PB'}$ 이다.



삼각형 A′PB′에서 $\overline{A'M}=\sqrt{\overline{A'P}^2-\overline{PM}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$



삼각형 AA′M에서 $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{A'M}^2}=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}$



점 A에서 선분 BB′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{BB'}=a$라 하자.

- $\overline{MB}^2=\overline{MB'}^2+\overline{BB'}^2=16+a^2$
- $\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2=\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{AM}^2$

$=25+(a-9)^2+90=a^2-18a+196$

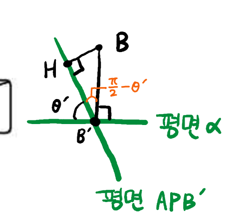
$16+a^2=a^2-18a+196$이므로　$a=10$

따라서 $\overline{BM}=\sqrt{\overline{BB'}^2+\overline{MB'}^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}$

평면 APB′과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ'라 하자.

삼각형 AMB′을 평면 α에 정사영한 것이 삼각형 A′MB′이므로

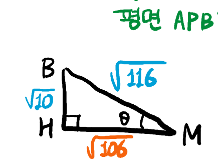
$\triangle A'MB'=\triangle AMB'\times\cos\theta'$ ⇨ $6=6\sqrt{10}\cos\theta'$　$\therefore \cos\theta'=\frac{\sqrt{10}}{10}$



점 B에서 평면 B에 내린 수선의 발을 H라 하자.

왼쪽 그림에서 선분 BB′과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta'$이므로

$\overline{BH}=\overline{BB'}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)=\overline{BB'}\times\cos\theta'=10\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\sqrt{10}$



삼각형 BMH에서 $\overline{HM}=\sqrt{\overline{BM}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{116-10}=\sqrt{106}$ 이다.

따라서 $\cos^2\theta=\frac{106}{116}=\frac{53}{58}$이므로　$p+q=58+53=111$