약점보완 테스트 6회

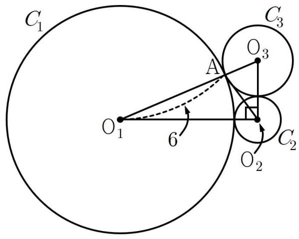
학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 함수 $f(x)=[[x]-x]$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기
ㄱ. $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=x$는 오직 하나의 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 그림과 같이 $\angle O_1O_2O_3=90°$이고, 넓이가 24인 직각삼각형 $O_1O_2O_3$가 있다. 중심이 O_1인 원 C_1과 중심이 O_2인 원 C_2가 선분 O_1O_2위의 한 점에서 만나고, 원 C_2와 중심이 O_3인 원 C_3가 선분 O_2O_3위의 한 점에서 만난다. 두 원 C_1, C_2가 선분 O_1O_3위의 한 점 A에서 만나고 $\overline{O_1A}=6$일 때, $\overline{O_2A}^2$의 값은?



① $\frac{116}{5}$ ② $\frac{117}{5}$ ③ $\frac{118}{5}$
④ $\frac{119}{5}$ ⑤ $\frac{121}{5}$

3. n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x+4n}{2x-p}$이

$f(1)< f(5)< f(3)$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하자.

자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}$이

$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자.

이때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

4. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 두 명제

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-2x>0$이다.',

'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x \in A$이다.'

가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. (단, $n(A) \le 2$)

5. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
(나) 구간 $[k,\infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) 답 ⑤

풀이

ㄱ. $x=[x]+h\,(0\le h<1)$라고 하면

$x\to1-0$일 때, $h\to1-0$이므로

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}[[x]-x]=\lim_{x\to1-0}[-h]=-1$

$x\to1+0$일 때, $h\to+0$이므로

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}[[x]-x]=\lim_{x\to1+0}[-h]=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $x=[x]+h\,(0\le h<1)$라고 하면 $[x]-x=-h$이므로

$f(x)=[[x]-x]=[-h]$

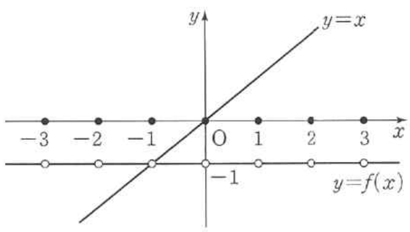
한편, $0\le h<1$에서 $-1<-h\le0$이므로

$-h=0$, 즉 x가 정수일 때, $f(x)=[-h]=0$

$-1<-h<0$ 즉 x가 정수가 아닐 때, $f(x)=[-h]=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이다. (참)

ㄷ.

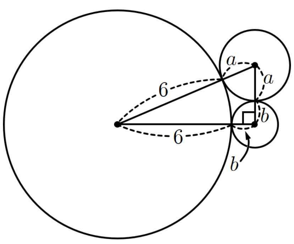


위 그래프에서 방정식 $f(x)=x$는 $x=0$의 오직 하나의 실근을 가진다. (참)

참고

ㄷ의 그래프에서 $\lim_{x\to1}f(x)=-1$이고 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이다.

2) [정답] ①

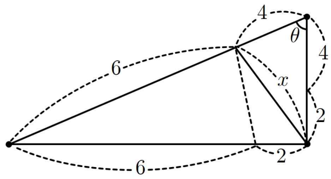


$\frac{1}{2}(6+b)(a+b)=24$ ⋯ ㉠

$(6+a)^2=(6+b)^2+(a+b)^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=4,\ b=2$



$\cos\theta=\frac{16+36-x^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{3}{5}$

$x^2=\frac{116}{5}$

3) [정답] 740

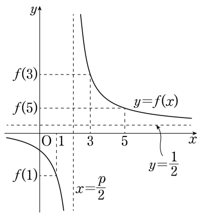
[해설]

$f(x)=\frac{x+4n}{2x-p}=\frac{\frac{1}{2}(2x-p)+\frac{p}{2}+4n}{2x-p}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{p}{2}+4n}{2x-p}$

이고 $\frac{p}{2}+4n>0$이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ …… ㉠

이 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\frac{p}{2}<3$이어야 하므로 $2<p<6$에서 자연수 p의 최솟값 m은 3이고 최댓값 M은 5이다.

한편, 함수 $g(x)=\frac{2x+n}{x+q}=\frac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\frac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 방정식은

$x=-q,\ y=2$

$p=3$일 때 $f(x)=\frac{x+4n}{2x-3}$에 대하여

$x_1=f(1)=-4n-1$

$x_2=f(5)=\frac{4n+5}{7}$

$x_3=f(3)=\frac{4n+3}{3}$

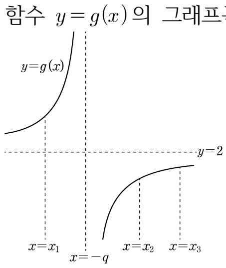
이라 하면 ㉠으로부터

$x_1<x_2<x_3$

이때 문제의 조건에서

$g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$이 성립해야 하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$이고 $n-2q<0$이어야 한다.

즉 $-4n-1<-q<\frac{4n+5}{7}$이고 $q>\frac{n}{2}$이어야 하므로

$\frac{n}{2}<q<4n+1$

(ⅰ) $n=2l-1$ (l은 자연수)일 때

$\frac{2l-1}{2}<q<4(2l-1)+1$에서

$l-\frac{1}{2}<q<8l-3$이므로

$q=l,\ l+1,\ \cdots,\ 8l-4$

그러므로 정수 q의 개수는 $7l-3$

(ⅱ) $n=2l$ (l은 자연수)일 때

$\frac{2l}{2}<q<4\times 2l+1$에서

$l<q<8l+1$이므로

$q=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ 8l$

그러므로 정수 q의 개수는 $7l$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_{2l-1}=7l-3,\ a_{2l}=7l$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})\\&=\sum_{l=1}^{10}(7l-3+7l)\\&=\sum_{l=1}^{10}(14l-3)\\&=14\sum_{l=1}^{10}l-\sum_{l=1}^{10}3\\&=14\times\frac{10\times 11}{2}-30\\&=770-30=740\end{aligned}$$

4) [정답] 120

[해설]

조건 $x^2-2x>0$의 진리집합을 P라 하면

$x(x-2)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>2$이므로

$P=\{3,\ 4,\ 5\}$

명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-2x>0$이다.' 가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다. $\{3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 진부분집합의 개수는 $2^3-2=6$

그 중 원소의 개수가 1인 집합의 개수는 3, 원소의 개수가 2인 집합의 개수는 3이다.

명제 '집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'

가 참이 되기 위해서는 $A\cap B\neq\varnothing$ 이어야 한다.

(ⅰ) $n(A)=1$인 경우

집합 A의 원소를 a라 하자. a는 3, 4, 5 중 하나다.

집합 B는 a를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는 $2^4=16$

따라서, 순서쌍의 개수는 $3\times 16=48$

(ⅱ) $n(A)=2$인 경우

집합 A의 서로 다른 원소를 $a,\ b$라 하자. $a,\ b$는 3, 4, 5 중 서로 다른 두 개이다.

집합 B는 a 또는 b를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

ⅲ-가) a를 원소로 갖고, b를 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^3=8$

ⅲ-나) b를 원소로 갖고, a를 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^3=8$

ⅲ-다) $a,\ b$를 모두 원소로 갖는 집합 B의 개수는 $2^3=8$

이 때, 집합 B의 개수는 $8+8+8=24$이므로

순서쌍의 개수는 $3\times 24=72$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 $48+72=120$

5) 정답 ③

출제의도

도함수를 이용하여 함수 $f(x)$가 항상 증가하거나 감소하도록 하는 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x$

$f''(x)=9ae^{3x}+be^x$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)&=9ae^{3\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}\\&=9ae^{\ln\frac{8}{27}}+be^{\ln\frac{2}{3}}\\&=9a\times\frac{8}{27}+b\times\frac{2}{3}\\&=\frac{8a}{3}+\frac{2b}{3}=0\end{aligned}$$

$b=-4a$

즉, $f'(x)=a(3e^{3x}-4e^x)=ae^x(3e^{2x}-4)$

이때 조건 (나)에서 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 구간 $[k,\ \infty)$에서 $f'(x)$의 값이 항상 0 이상이거나 항상 0 이하이어야 한다. 이때 k의 최솟값이 m이므로

$f'(m)=ae^m(3e^{2m}-4)=0,\ m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}f(2m)&=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)\\&=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}\\&=ae^{\ln\frac{64}{27}}-4a\times\frac{4}{3}\\&=a\times\frac{64}{27}-\frac{16a}{3}\\&=-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}\end{aligned}$$

따라서 $a=3,\ b=-12$이고 $f(0)=a+b=-9$