제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

Comment) 계산 문제

평가원은 1번 부터 왜 이런 문제를 낼까?
암산해서 실수하지 말라는 뜻이 아닌가 싶다.

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Comment) 계산 문제

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum\limits_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

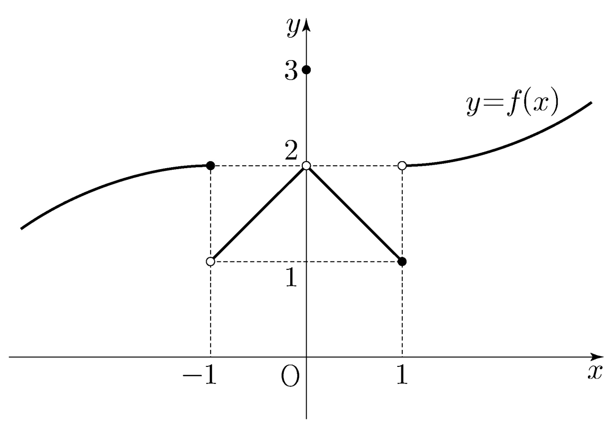
Comment) 계산 문제, 풀이 참조

Sol)

a_1+1
a_2+1
a_3+1
a_4+1
$+\ a_5+1$
$\cdots = 9$

$\sum\limits_{k=1}^{5} a_k = 4$
$+\ a_6 = 4$
$7 = 8$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Comment) 계산 문제

해설 : 제태훈 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Comment) 계산 문제

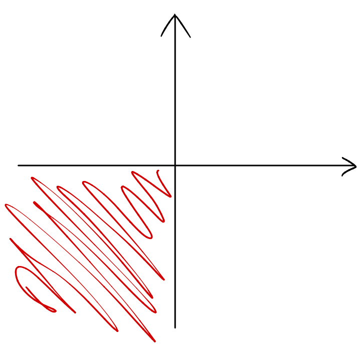
6. $\boxed{\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi}$ 인 θ 에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

Comment) 계산 문제, 풀이 참조

삼각함수의 개념과 부호는 단위원을 기준으로
계산은 간편하게 삼각형을 바탕으로

Sol)

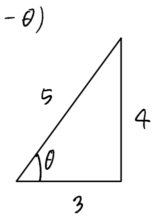


$\sin(-x)=-\sin x$

$\therefore \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=-\cos\theta$

$\rightarrow \cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\pm\frac{4}{5}$



$\boxed{\sin\theta=-\frac{4}{5}}$

7. x 에 대한 $\boxed{\text{방정식}}$ $x^3-3x^2-9x+k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [3점]

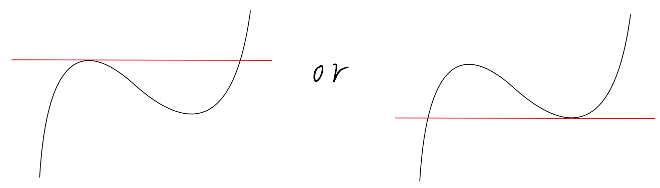
① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

Comment) 삼차함수가 '접하는' 특수한 경우

방정식의 근을 함수의 교점으로

Sol)

$x^3-3x^2-9x=-k$



$\rightarrow$ $\boxed{\text{극대}}=-k$ or $\boxed{\text{극소}}=-k$

$(x^3-3x^2-9x)'=3x^2-6x-9$
$=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1) \rightarrow$ $x=-1$ 극대, $x=3$ 극소

$-k=5$ or -27

$\therefore k=-5$ or 27

+ 아래 두 함수 관계를 봐도 된다.

$\begin{cases} y=x^3-3x^2-9x+k \\ y=0 \end{cases}$

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

8. $a_1 a_2 < 0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

r<0

2칸

$a_6 = 16$, $2a_8 - 3a_7 = 32$

1칸

일 때, $a_9 + a_{11}$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

Comment) 항 사이의 간격

$2(16r^2) - 3(16r) = 32$

$\rightarrow 2r^2 - 3r = 2$

$2r^2 - 3r - 2 = 0$

$(2r+1)(r-2) \longrightarrow r = -\frac{1}{2}$

$16\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{32}\right)$

$= -2 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$

9. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & (x < 0) \\ -x^2 + 3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\boxed{(f(x) + a)}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

Comment) 굳이 따지자면… 합성함수의 연속?

Sol)

애가 연속이려면 f가 연속이면 되지 않나?

근데 f가 $x=0$에서 좀 이상하네

아 그럼 애가 0에서만 연속이면 되겠넹

$(f(0^+)+a)^2 = (f(0^-)+a)^2$

$\Rightarrow (3+a)^2 = (-\frac{1}{2}+a)^2$

$\therefore a = -\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

$\rightarrow R=3$

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

Comment) 외접원 조건 읽자마자 조건반사적으로 사인법칙 떠올리기

비율 조건과 길이 조건의 섬세한 차이
삼각함수는 **길이에 대한 값이 아니라 비율에 대한 값**이므로 한 변의 길이가 결정되지 않아도 그 값을 알 수 있다.

또한,

(가) 조건 - '길이비는 곧 사인비다.'
(나) 조건 - 이등변 삼각형

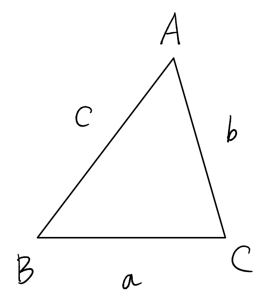
(가) 조건이 아니더라도 **'사인법칙' 자체가 곧 길이비=사인비 임을 시사**한다.

3. 활용

[편집]

- 각을 변으로 바꾸기

$\sin A = \frac{a}{2R}$
$\sin B = \frac{b}{2R}$
$\sin C = \frac{c}{2R}$



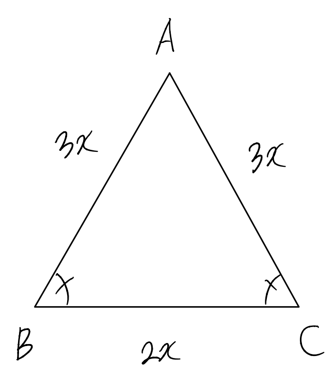
- 변을 각으로 바꾸기

$a = 2R\sin A$
$b = 2R\sin B$
$c = 2R\sin C$

- 변의 비와 각에 따른 사인값의 비

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

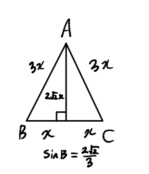
Sol)



$\frac{3x}{\sin B} = 6 \quad (\because 2R = 6)$

$\sin B$
- A에서 $\overline{BC}$에 수선을 내려 구하기
- 코사인 법칙으로 $\cos B$ 구한 뒤 $\sin B$ 구하기

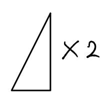
'비율에 대한 함수에서 그 값이 결정됨'



$\cos B = \frac{9x^2 + 4x^2 - 9x^2}{2(3x)(2x)}$
$= \frac{4x^2}{12x^2} = \frac{1}{3}$
$\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\longrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

넓이
- A에서 $\overline{BC}$에 수선을 내려 구하기
- $\frac{1}{2}ab\sin\theta$



해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3} \longrightarrow f(a)=1,\ f'(a)=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$(0, 4)$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

Comment) 그런갑다 하고 조건을 뽑아보면 계산문제가 된다.

마지막에 끝처리를 여러 방법으로 할 수 있다.

접선과 삼차함수가 만나는 점은 인수 두 개로 나타나므로
삼차함수와 접선을 연립하여 처리하는 게 가장 깔끔할 것이다.

Sol) $f(a)=1$

$f'(a)=3$

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$=3(x-a)+1$

얘가 $(0,4)$ 지난다.

$4=-3a+1$

$\therefore a=-1$

$\boxed{\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(-1)=1 \\ f'(-1)=3 \end{array}} \longrightarrow$ "미지수 3개 식 3개 f 결정 가능"

$f(x)-(3x+4)=(x+1)^2(x+\square)$ 으로 쓸 수 있다.

$f(0)=0$ 이니,

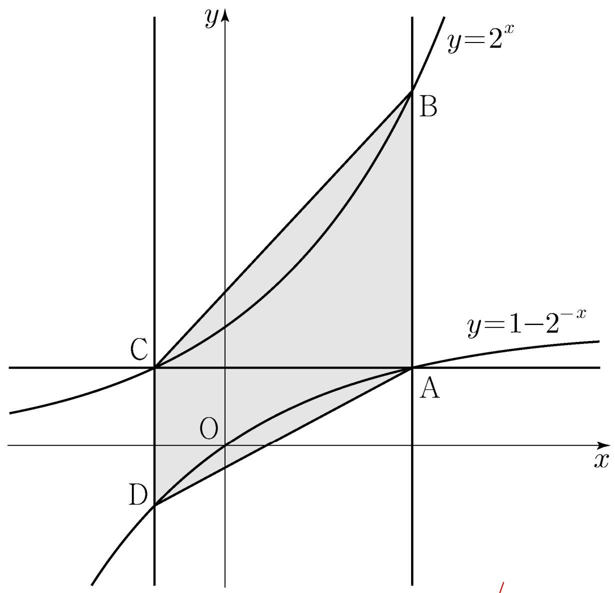
$-4=\square$

$f(x)-(3x+4)=(x+1)^2(x-4)$

$f(1)-7=4\cdot(-3)$

$f(1)=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

Comment) 두 함수가 (0, 1/2)에 대해 점대칭 관계를 갖지만,
이 문제에서는 쓰이지 않았다.

점 B, C, D가 A를 기준으로 만들어진 점이니 A를 미지수로 잡자.

이 문제에서 얻어갈 교훈은 두 가지다.

1. 지수함수에서 y 좌표를 알 때 x 좌표는 로그를 이용하여 나타낸다.
2. (고 1수학) 복잡한 식을 조작할 때는 반복되는 구조가 있는지에 주목한다.

위 문제와 연계하여
'2023학년도 고3 3월 21번'도 풀어보자.

Sol)

$A(t, \boxed{1-2^{-t}})$

$B(t, 2^t)$

$C(\log_2(1-2^{-t}), \boxed{1-2^{-t}})$

$D\left(\log_2(1-2^{-t}), 1-\frac{1}{\boxed{1-2^{-t}}}\right)$

$2^t=x$로 두면 식이 너무 더러워진다.

$\boxed{}$ 구조가 반복되니

$1-2^{-t}=x$로 두자

$\frac{1}{1-x}=2^t$ 이다.

$\overline{AB}=\frac{1}{1-x}-x=\frac{1-x(1-x)}{1-x}=\frac{x^2-x+1}{1-x}$

$\overline{CD}=x-\left(1-\frac{1}{x}\right)=x-\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^2-x+1}{x}$

$\overline{AB}=2\overline{CD}$

$\left(\frac{\cancel{x^2-x+1}}{1-x}\right)=2\left(\frac{\cancel{x^2-x+1}}{x}\right)$

$x=2(1-x)$

$3x=2$

$x=\frac{2}{3}$

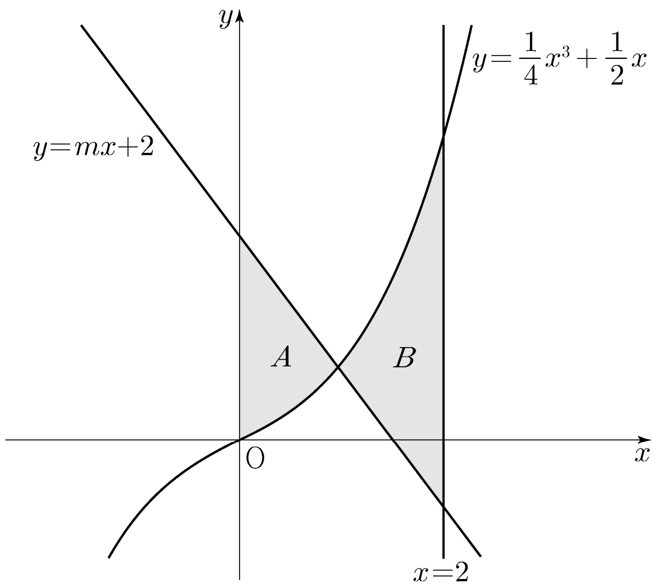
$\vdots$

$t=\log_2 3$ 이후 계산 생략

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



Comment) 계산 문제

m은 정적분 내에서 변수가 아니니
0부터 2까지 곡선 사이의 정적분으로 좌변을 써주고
그 값을 B-A로 확정해 줬으므로
좌변은 m에대한 일차식, 우변은 상수
구하는 값이 m이니 일차방정식을 풀어주면 된다.

Sol)

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x$

$g(x)=mx+2$

$\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx = B-A$

$\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx=\frac{2}{3}$

$\left[\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2=\frac{2}{3}$

$1-1-2m-4=\frac{2}{3}$

$\therefore m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Comment) 읽는데 오래 걸리는 문제

k에 따라 n의 개수가 결정되는 함수 관계이다.

문제가 헷갈리면 가장 간단한 상황을 설정한다음
뭘 말하고 있는 건지 확인해보는 것도 좋은 방법이다.

가령 문제에서 n은 확정값이 아니라 개수를 논하고 있고,
반면 k는 확정값이 중요해 보이니 k=1넣고
그때 n개수가 몇 개 나오는지 확인해보는 것도 좋은 접근.

로그 나오면 진수 조건부터 파악하는 건 말할 필요도 없다.

Sol) $k=1$ 일때 … 해봤다고 가정

$-n^2+10n+75>0 \Rightarrow -5<n<15$ … ㉠

$75-kn>0 \Rightarrow \frac{75}{k}>n$ … ㉡

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}>\log_2\sqrt{75-kn}$

$-n^2+10n+75>75-kn$

$-n^2+(10+k)n>0$

$0<n<10+k$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 다 만족시키는 n 개수가 12가 되려면

$k=3, 6$

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_0^x g(t)\left\{|t(t-1)|+t(t-1)\right\}dt \geq 0\text{이고}$$
> $$\int_3^x g(t)\left\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\right\}dt \geq 0\text{이다.}$$

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$　② $5-\sqrt{6}$　③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$　⑤ $8-\sqrt{6}$

Comment) (가), (나)로 조건을 주는 문제는
(가)에서 뽑아낼 거 다 뽑아낸 뒤 (나)로 넘어가고
(나)에서 뽑아낼 거 다 뽑아낸 뒤 (가), (나)를 통합해서 보도록 하자

복잡해 보이거나 당연해 보인다고 그냥 넘어간 다음
통합해서 이해하려고 하면 뇌에 과부화 오기 쉽다.

(나) 조건에 대해 첨언하자면 정적분과 부호에 대한 관계를 줬고,
정적분의 부호는 적분방향과 속함수의 부호와 연관되어 있다.

속함수가 복잡해보이지만
'g(t)랑 곱해진 애가 기껏해봐야 이차함수랑 절댓값 조합인데
한번 그려볼까?'
라는 호기로운 마음가짐으로 접근하는 게 좋다.

g(k+1)의 최솟값을 구하라고 했고
g(k+1)=f(k+1)이니
'삼차함수의 하한선이 정해지든 경우가 나눠지든 하겠구나~'
라고 생각할 수 있으면 Best

Sol) 여백이 부족하니 아래 영상을 참조하자.

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

Comment) 진수 조건을 주의할 것

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

Comment) 계산 문제

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

Comment) 계산 문제, 풀이 참조

시그마 합 공식은 n(n+1)/2로 묶어주면 편하다.

Sol)

$a\left(\frac{9\cdot10\cdot19}{2\cdot3}\right)-10\left(\frac{9\cdot10}{2}\right)$

$=45\left(\frac{19}{3}a-10\right)=120$

$\frac{19}{3}a-10=\frac{8}{3}$

$\frac{19}{3}a=\frac{38}{3}$

$\boxed{a=2}$

$\boxed{2}$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\le t\le 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

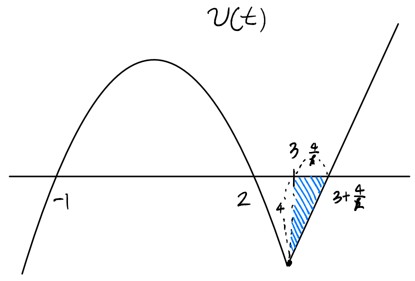
이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

Comment) 기하적 관점, 수식적 관점을 모두 챙겨야 하는 문제

속도 혹은 위치 함수에서 ‘t ≥ 0’, ‘연속’은 디폴트
두 번째 항 적분할 때 그대로 적분하면 편하다.

Sol 1) 기하적 관점

$-t^2+t+2$
$=-(t^2-t-2)=-(t-2)(t+1)$



$P(t)=\begin{cases}-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t \\ t=3 \rightarrow \frac{3}{2} \\ \ldots\end{cases}$

$\therefore$ (삼각형) $=\frac{1}{2}\times\frac{4}{k}\times4=\frac{1}{2}$

$\therefore k=16$

Sol 2) 수식적 관점

$P(t)=\begin{cases}-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t \\ \frac{1}{2}k(t-3)^2-4t+C\end{cases}$

i) $t=3$에서 연속

$-12+C=\frac{3}{2}$

$C=\frac{27}{2}$

ii) $t=3+\frac{4}{k}\rightarrow 1$

$\frac{1}{2}k\left(\frac{4}{k}\right)^2-4\left(3+\frac{4}{k}\right)+\frac{27}{2}$

$\frac{8}{k}-12-\frac{16}{k}+\frac{27}{2}=1$

$-\frac{8}{k}+\frac{3}{2}=1$

$\frac{1}{2}=\frac{8}{k}$

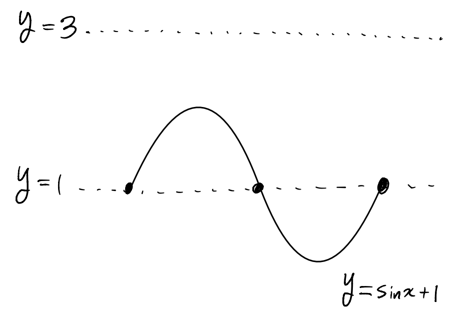
$k=16$

$\boxed{16}$

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\,2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

Comment) **열린구간이라는 조건이 무척 중요하다.**

닫힌구간이면 아래와 같이 최솟값 m=2가 된다.



$a=1,\ b=1$ 가능

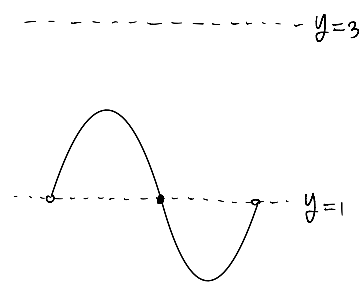
$\rightarrow a+b=2$

이 문제는 접근하는 방법이 다양하고, 모두 가치롭다.

(i) ‘구하는 것이 무엇인가?’에 집중하여 최대 최소 부근 관찰하기
(ii) B, C 원소 개수 기준으로 경우 나누기

Sol 1)

$a=1, b=1$ 일 때 어떻게 될까?



$a=1,\ b=1$ 안 됨

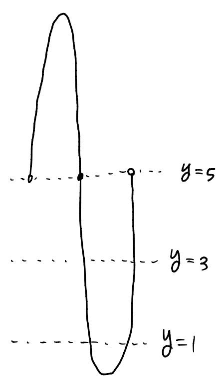
$\rightarrow a=2,\ b=1$
$a=1,\ b=2$ ─ 둘 다 가능

$m=3$

참고

$y=1$, $y=3$ 그려놓고,
가장 특수한 이런 그래프를 먼저 그려본 뒤
상황을 파악하는 것도 훌륭하다.

$a=5, b=5$ 일 때 어떻게 될까?



ERROR

$\rightarrow a=4,\ b=5$
$a=5,\ b=4$ ─ 로 하나씩 줄이면 합이 최대가 되겠으나,
그래프에서 알 수 있듯 둘 다 문제가 생긴다.

$\rightarrow a=4,\ b=4$

$a=5,\ b=3$

$\boxed{a=3,\ b=5}\rightarrow$ 이 친구 된다.

$M=8$

$m\times M=24$

$\boxed{24}$

위에서 알 수 있듯,
우리가 궁금한 건 a, b의 합이고 가능한 그래프 개형은 하나면 충분하니
실질적인 경우의 수는 10가지이다.

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\,2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

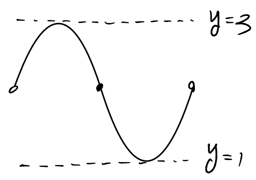
Sol2-1) 기하적 접근

참고

$B\cap C=\phi$

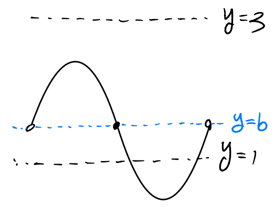
함수의 규칙은 '정의역의 x하나당 ① y하나가 ② 반드시 존재'
①, ② 두 가지이다.
$B\cap C\neq\phi$ 이면
$f(x)=1$
$f(x)=3$ 인 x가 존재한다는 기이한 결론이 나온다.

i) $n(B)=1$, $n(C)=1$, $n(A)=1$



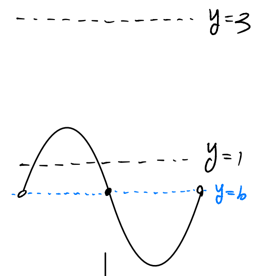
$a=1$, $b=2$

ii) $n(B)=2$, $n(C)=0$, $n(A)=1$



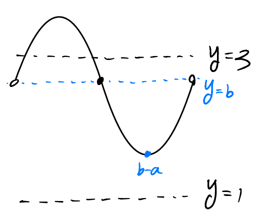
$b=2$
만족하는 a값 없음

or

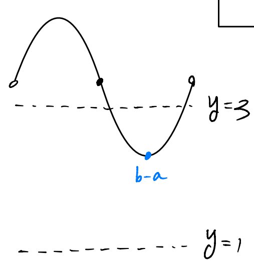


만족하는 b값 없음

iii) $n(C)=2$, $n(B)=0$, $n(A)=1$



$\left[\begin{array}{l}b=2\\ b-a=2\end{array}\right.$
모순



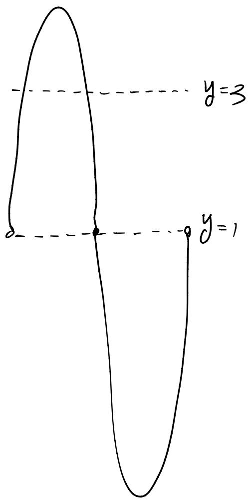
$b-a=2$
$b=4$ or 5
$a=2$ or 3

점끼리 안접치는 경우: i), ii), iii)

접치는 경우: iv), v)

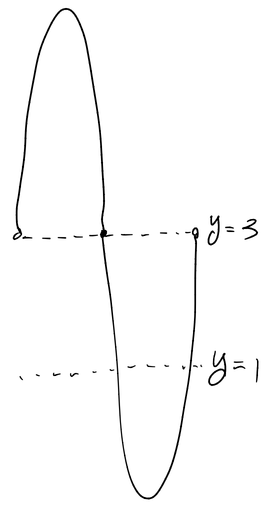
$n(A\cup B\cup C)=3$ 인 전체 집합

iv) $n(B\cup A)=1$, $n(C)=2$



$\left[\begin{array}{l}b=1\\ a=3,4,5\end{array}\right.$

v) $n(C\cup A)=1$, $n(B)=2$



$\left[\begin{array}{l}b=3\\ a=3,4,5\end{array}\right.$

가능한 (a,b)
i) $(1,2)$
ii) ×
iii) $(3,4)$, $(3,5)$
iv) $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$
v) $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$

$m=3$
$M=8$

$\boxed{24}$

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

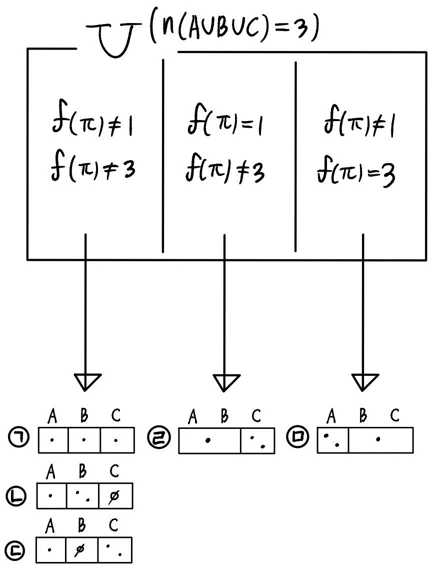
$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

20. $\boxed{5 \text{ 이하의 두 자연수 } a,\ b}$에 대하여 열린구간 $(0,\,2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 $\boxed{M}$, 최솟값을 $\boxed{m}$이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

Sol 2-2) 수식적 관점

$a\sin x+b=f(x)$라 하자.



$a+b$: 최대
$-a+b$: 최소
b : 중앙

㉠ $a+b=3$
$-a+b=1$
$b=2$
$\rightarrow a=1,\ b=2$

㉡ $b\neq 3$
$1<-a+b<3<a+b$
$\rightarrow -a+b=2$
$\rightarrow a=3,\ b=5$
$a=2,\ b=4$
~~$a=1,\ b=3$~~

㉢ $b\neq 1$
$-a+b<1<a+b<3$
$\rightarrow a+b=2$
~~$a=1,\ b=1$~~
에러..

㉣ $b=3$
$-a+b<1$
$a=3,4,5$

㉤ $b=1$
$a+b>3$
$a=3,4,5$

㉠ : $(1,2)$
㉡ : $(3,5),(2,4)$
㉢ : X
㉣ : $(3,3),(3,4),(3,5)$
㉤ : $(3,1),(4,1),(5,1)$
$\rightarrow$ 이전 논의와 결과가 같다.

$\boxed{24}$

Sol 3)
$5\times5=25$
경우의 수 25개 다 해보기...

삼각함수 그래프의 한 주기를 다룰 때는 폭과 최대 최소, 중심값에 주목한다.

이 문제는 x축 방향으론 이동하지 않으니 최대, 최소, 중심값에만 집중하면 충분하다.

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0) = 0$, $f'(1) = 0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

Comment) 문제를 푸는 세 단계를 요약해보면

(가) 'f'(x)가 연속이니 f'(2)=0이다.'
(나) '사차함수가 극댓값을 가진다.'
양자택일의 길로에서 f(0)=0, f'(0)=0 조건으로

그래프 개형이 하나로 결정될 것이라 생각하는 것이 중요하다.

Sol) 영상으로 대체한다.

$\boxed{15}$

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $\boxed{n \ge 2}$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \underline{\sqrt{n}} \times a_{\sqrt{n}} & (\underline{\sqrt{n}}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ \underline{a_n + 1} & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

n=4,9,16,25 … 일때 문제가 생기지 않을까?
그래서 15번째 항을 줬나? (16−1)
그냥 등차수열

를 만족시킨다. $a_{\boxed{15}} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

Comment) **무지성 역추적 금지** 역추적은 정방향 추적했을 때 경우의 수가 너무 많거나, 미지수를 잡기 곤란하거나 등

정방향보다 역추적이 더 편할 때 사용하는 방법이다.

이 문제에서 역주척 하면 a(10)→a(9)로 갈 때 a(9)와 a(3)을 동시에 미지수로 잡아야 하니 골치아파진다.

'갈림길은 4와 9에서 기껏해야 2번씩 생기니,
네 경우만 따져주면 되고 이게 훨씬 편하지 않을까..?'

Sol)

a_1	a_2	a_4	a_5	a_9	a_{10}	a_{15}	
$-x$	x	$x+2$	$-x+2$	$-x+6$	$-4x+3$	$-4x+8$	$\rightarrow x=\frac{7}{4}$
					$-x+7$	$-x+12$	$\rightarrow x=11$
			$x+3$	$x+7$	$-2x+4$	$-2x+9$	$\rightarrow x=4$
					$x+8$	$x+13$	$\rightarrow x=-12$

$x=\frac{7}{4}$ ↗ ↗ $a_4>0$, $a_9>0$ (0)

$x=11$ ↗ ↘ $a_4>0$, $a_9<0$ (0)

$x=4$ ↘ ↗ $a_4>0$ (×)

$x=-12$ ↘ ↘ $a_4<0$, $a_9<0$ (0)

$-\frac{7}{4} \times -11 \times 12$

$= 231$

$\boxed{231}$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

해설 : 제태흔 제작
Connect: wpxogms@snu.ac.kr