1번 문항 (2022년도 한양대 모의논술)

평면 위의 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=2:1:2$이다.

$\left|\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right|=2$ 인 경우 $\overline{AB}$의 값을 구하시오.

2번 문항 (2022년도 중앙대 논술기출)

$x \geq 1$에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{1}{14+8\sqrt{3}} \ln x(\ln x - 1)^2$에 대하여, 원점이 O인 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$가 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭시킨 점을 B라 할 때, 두 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$와 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$의 내적의 최댓값을 구하시오. (단, $x \geq 1$에서 $f(x) \leq \sqrt{x}$이다.)

3번 문항 (2022년도 중앙대 논술기출)

좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{C}(0,2)$가 있고, 점 P가 다음을 만족한다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$

(나) 두 실수 x, y에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$이다.

$\dfrac{x+y}{x+3y}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $mM^2 + Mm^2$의 값을 구하시오.

4번 문항 (2022년도 부산대 메디컬 모의논술)

(가) 평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ② $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$이 성립한다.

중심이 $\mathrm{O}(0, 0)$이고 점 $\mathrm{A}(2, 0)$을 지나는 원 C가 있다. $\overline{\mathrm{OA}}$ 위에 $\overline{\mathrm{OP}}=t$ $(0 \le t \le 2)$인 점 P와 원 C 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PR}}$를 만족하는 $\overline{\mathrm{OQ}}$ 위의 점 R가 존재한다. 다음 물음에 답하시오.

[1] 점 R가 나타내는 도형의 방정식을 t에 관한 식으로 나타내시오.

[2] $0<t<2$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 t에 관한 식으로 나타내시오.

[3] $t=1$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RM}}=\overrightarrow{\mathrm{TR}}$를 만족하는 y축 위의 점 T가 존재한다. 이 때,
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$의 값을 구하시오.

5번 문항 (2020년도 한양대 모의논술)

삼각형 ABC 의 변 AB 의 중점을 G , 변 AC 의 중점을 F 라 하자. 변 BC 를 삼등분하는 BC 위의 두 점 중 점 B 에 가까운 것을 D , 점 C 에 가까운 것을 E 라 하고, 두 선분 EG 와 DF 의 교점을 H 라 하자.

[1] 다음 두 등식을 만족하는 실수 a, b, c, d 의 값을 구하시오.

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{FD}} = c\overrightarrow{\mathrm{AB}} + d\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

[2] 문항 [1]의 두 등식을 이용하여 선분의 길이의 비 $\overline{\mathrm{GH}} : \overline{\mathrm{HE}}$ 를 구하시오.

[3] 변 BC 를 n 등분하는 $n-1$ 개의 점들을 점 B 로부터 점 C 로의 방향으로 차례대로 각각 I_1, I_2, $\cdots$, I_{n-1} 이라 하자. 두 선분 $\overline{\mathrm{FI}_k}$ 와 $\overline{\mathrm{GI}_{k+l}}$ 의 교점을 J 라 할 때, 선분의 길이의 비 $\overline{\mathrm{FJ}} : \overline{\mathrm{JI}_k}$ 를 구하시오. (단, $1 \le k < k+l \le n-1$)

6번 문항 (2017년도 단국대 모의논술)

(가) 평면에서 한 점 O를 고정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$인 점 P의 위치가 하나로 정해진다. 역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$가 하나로 정해진다. 이와 같이 좌표평면에서 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 P에 대한 위치 벡터라고 한다.

(나) 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 Q라 하면, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$ 이다.

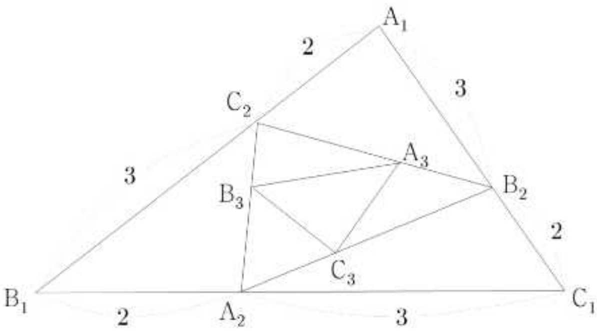
※ 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n, B_n, C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

① 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는 625 이다.

② $\overrightarrow{OA_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OB_n}+2\overrightarrow{OC_n}\right)$

$\overrightarrow{OB_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OC_n}+2\overrightarrow{OA_n}\right)$

$\overrightarrow{OC_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OA_n}+2\overrightarrow{OB_n}\right)$



[1] $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=a\overrightarrow{A_1B_1}+b\overrightarrow{A_1C_1}$을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

[2] 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 구하시오.

[3] 다음 조건을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 PA_1B_1의 넓이를 구하시오.

$n\to\infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{A_nP}$, $\overline{B_nP}$, $\overline{C_nP}$가 모두 0으로 수렴한다.

7번 문항 (2017년도 부산대 논술기출)

(가) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{AC}}\ \sin\angle \mathrm{A}$$

이다.

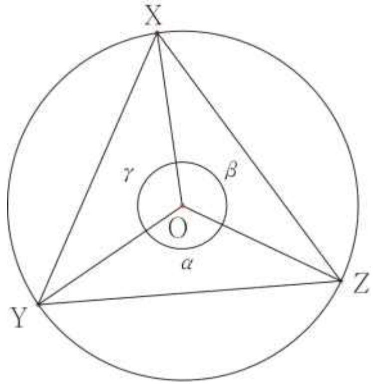
[1] 아래의 [그림 1]과 같이 삼각형 XYZ는 원점 O를 중심으로 하는 단위원에 내접하는 삼각형이고, 그 삼각형의 내부에 원점이 있다고 하자.

$$\angle \mathrm{YOZ} = \alpha,\quad \angle \mathrm{ZOX} = \beta,\quad \angle \mathrm{XOY} = \gamma$$

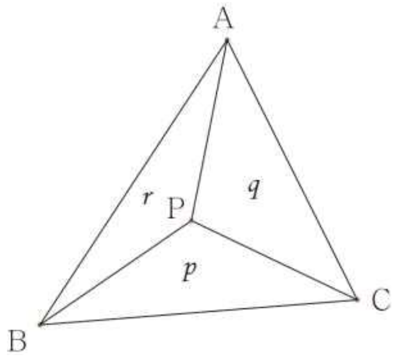
라고 할 때, 등식

$$\sin\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OX}} + \sin\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OY}} + \sin\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \vec{0}$$

가 성립함을 보이시오.



[그림 1]



[그림 2]

[2] 위의 [그림 2]와 같이 임의의 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $\triangle$PBC, $\triangle$PCA, $\triangle$PAB의 넓이를 각각 p, q, r이라 할 때, 등식

$$p\,\overrightarrow{\mathrm{PA}} + q\,\overrightarrow{\mathrm{PB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

가 성립함을 보이시오.

8번 문항 (2017년도 시립대 모의논술)

좌표평면 위에 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이 주어져 있다. 원점 O와 타원 위의 점 A에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 수직이고 원점을 지나는 직선이 주어진 타원과 만나는 점을 B, C라 하자. $k=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(a) $k=0$이 되는 점 A를 구하여라.

(b) k의 최솟값과 최댓값을 구하여라.

9번 문항 (2017년도 중앙대 논술기출)

좌표평면 위의 원점 O와 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 $\mathrm{Q}(r,\ s)$가 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 만족한다. 이때 $s-r$의 최솟값을 구하시오.

10번 문항 (2017년도 서울시립대 논술기출)

삼각형 ABC에서 $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{AC}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ 이고 $a \le b \le c$이다. 삼각형 ABC의 내부 또는 경계에 있는 점 P에 대하여 내적

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

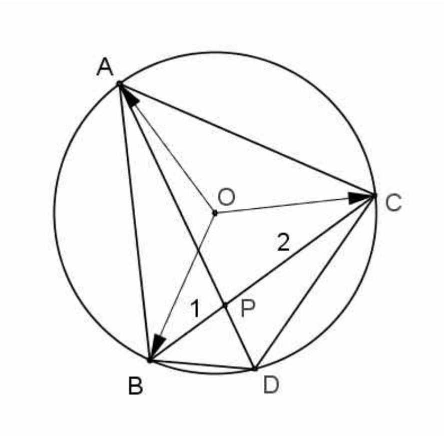
의 최댓값과 최솟값을 a, b, c 에 관한 식으로 나타내시오.

11번 문항 (2016년도 안하대 모의논술)

아래 그림과 같이 반지름이 1 이고 점 O 를 중심으로 하는 원이 있다. 원에 내접하는 사각형 ABDC 는 다음의 조건을 만족한다고 하자.

(조건1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(조건2) AD 와 BC 의 교점 P 는 선분 BC 를 1 : 2 로 내분한다.



[1] 삼각형 ABC 는 정삼각형임을 보이시오.

[2] 벡터 $\overrightarrow{AD}$ 를 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 로 나타내시오.

12번 문항 (2015년도 부산대 모의논술)

벡터는 크기와 방향을 동시에 나타내는 물리량을 나타내는 수학적인 표현이다. 예를 들면 변위, 힘, 속도, 가속도 등은 크기와 방향을 동시에 나타내는 벡터이다. 벡터는 평면이나 공간에서 도형의 성질이나 수학적인 성질을 밝히는데 다양하게 활용된다.

[1] 평면에 놓인 볼록 사각형에서 각 변의 중점을 차례로 연결하여 얻어진 새로운 사각형은 평행사변형이 됨을 벡터를 이용하여 보여라.

[2] 평면에 놓은 삼각형 $\triangle ABC$ 가 놓여 있다. 벡터 $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}$ 의 끝점이 삼각형의 내부에 놓이도록 x 의 범위를 구하여라.

13번 문항 (2015년도 한양대 논술기출)

<가> 두 벡터 $\vec{v}$, $\vec{w}$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\vec{v} \cdot \vec{w}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$$

<나> 두 점 $\mathrm{E}_1(1,0)$, $\mathrm{E}_2(0,1)$가 나타내는 벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라 한다.

<다> 평면 위에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{e_1}$이 이루는 각은 θ_1이다.
(단, $0 < \theta_1 < \pi$)

<라> $\vec{b} = \vec{a} + \vec{e_1}$과 $\vec{e_1}$이 이루는 각은 θ_2이다.

[1] 제시문에서 주어진 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오.

[2] 제시문에서 주어진 벡터 $\vec{a}$의 x성분과 y성분을 θ_1과 θ_2를 이용해 나타내시오.
(단, θ_1과 θ_2는 제시문 <다>와 <라>에 주어진 각이다.)

[3] 제시문에서 주어진 θ_1과 θ_2에 대하여 부등식

$\sin(\pi - \theta_1) + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$가 성립함을 보이시오.

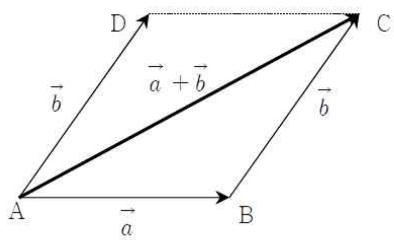
14번 문항 (2019년도 단국대학교 모의논술)

(가) 벡터의 덧셈

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AC}$를

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고,

기호 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$로 나타낸다.



(나) 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

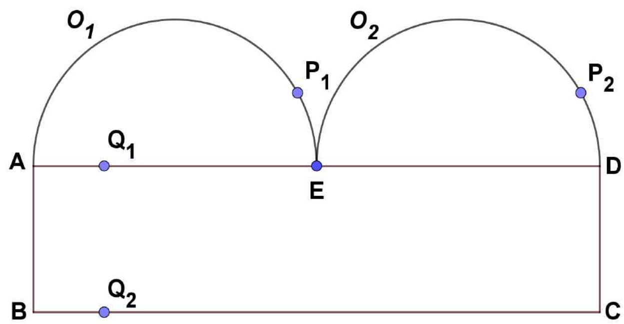
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

이 성립한다.

※ 아래 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=8$인 직사각형 ABCD의 변 AD의 중점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 반원 O_1 과 선분 ED를 지름으로 하는 반원 O_2가 있다. 반원 O_1 위의 점 P_1에 대하여, P_1을 지나고 직선 BC와 평행인 직선이 반원 O_2와 만나는 점 중 P_1로부터의 거리가 4인 점을 P_2라 하자. 선분 AD 위의 점 Q_1에 대하여, Q_1을 지나고 직선 AD와 수직인 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Q_2라 하자.



[1] $\angle P_1AD=30^\circ$이고 $\overline{AQ_1}=1$일 때, $\left|\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2$의 값을 구하시오.

[2] 내적 $\overrightarrow{P_1Q_1}\cdot\overrightarrow{P_2Q_2}$ 의 최솟값을 구하시오.

15번 문항 (2019년도 광운대학교 논술기출)

(1) 영벡터 $\vec{0}$는 크기가 0이고 그 방향은 생각하지 않는다.

(2) 양의 실수 t와 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 대하여 $t\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고, 그 크기가 $t|\overrightarrow{AB}|$인 벡터이다.

(3) 세 점 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$$

(4) 선분 AB를 $m:n$ ($m>0,\ n>0$)으로 내분하는 점을 P라 하면 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$ (단, O는 원점)

[2] 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 5)$, $B(7, 2)$와 원점 O에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 선분 AB의 길이를 구하시오.

(2) $(1-s)\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PO}=\vec{0}$ $(0\le s\le 1)$을 만족하고 $\triangle OAB$의 경계 및 내부에서 움직이는

점 P 가 그리는 선분의 길이를 구하시오.

16번 문항 (2020년도 동국대학교 논술기출)

[가] 삼각형 ABC에서 각 $\angle BAC$를 θ라고 할 때, 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AC}\sin\theta$$

이다.

[나] 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 두 벡터의 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

[다] 사인함수와 코사인함수는

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

을 만족한다.

[라] 좌표평면 위의 점 $A(a_1, a_2)$를 시점으로 하고 점 $B(b_1, b_2)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내어 보자. 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1, b_2)-(a_1, a_2)=(b_1-a_1, b_2-a_2)$$

이다.

[마] 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때, 두 벡터의 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이다.

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$으로 만들어진 삼각형 ABC의 넓이를 제시문 [가]~[마]를 이용하여 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 로 나타내시오.

그리고 이 공식을 이용하여 $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

17번 문항 (2022년도 광운대학교 논술기출)

[1] 타원 $\dfrac{x^2}{a}+y^2=1$ $(a>0)$의 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에 대하여, 점 P에서의 접선이 x축과 점 A에서 만나고 y축과 점 B에서 만난다고 하자. 원점 O와 두 점 A와 B가 꼭짓점인 삼각형 OAB가 직각이등변삼각형일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 P의 좌표를 a에 관한 식으로 나타내시오.

(2) 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배가 되는 타원의 방정식을 구하시오.

(3) (2)의 타원의 두 초점 F와 F′에 대하여 다음을 만족시키는 타원에 있는 점 Q의 좌표를 모두 구하시오.

$$\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=0$$

18번 문항 (2022년도 광운대학교 논술기출)

n이 자연수일 때, 좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하는 두 점의 위치벡터 $\overrightarrow{a_n}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ 0\right)$과

$\overrightarrow{b_n}=\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{p_n}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\overrightarrow{p_n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b_k}\right)$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 원점 O를 시점으로 하는 위치벡터 $\overrightarrow{p_n}$의 종점을 점 $\mathrm{P_n}$이라고 할 때, n의 값이 커짐에 따라 점 $\mathrm{P_n}$이 한없이 가까워지는 점 P의 좌표를 구하시오.

(2) $n\geq 2$일 때, 점 $\mathrm{P_n}$이 선분 $\mathrm{P_{n-1}P_{n+1}}$을 $\alpha:\beta$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$로 내분한다고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오.

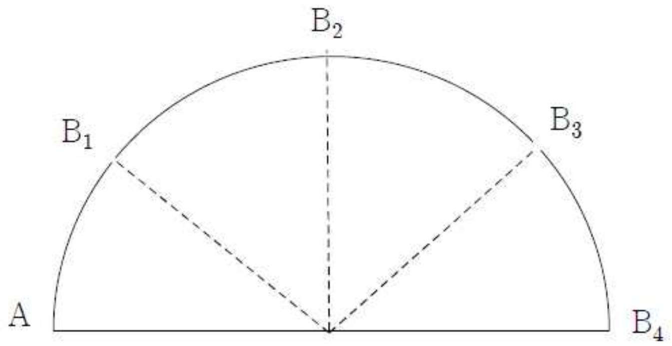
(3) 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$과 (1)의 점 P에 대해 다음을 만족시키는 좌표평면의 점 Q가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=1$$

(4) 점 $\mathrm{P_n}$을 x축에 관해 대칭이동하고 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{R_n}$이라 하고 원점 O를 시점으로 하는 두 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR_n}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OR_{n+1}}}$이 이루는 예각의 크기를 θ_n이라 할 때, $\cos\theta_n$의 최솟값을 구하시오.

19번 문항 (2023년도 고려대학교 모의논술)

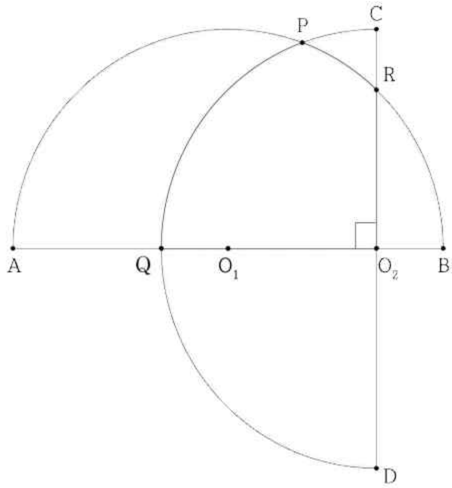
다음 그림과 같이 반경이 1인 반원 위에 $\overline{AB_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}$를 만족시키는 4개의 점 B_1, B_2, B_3, B_4가 순서대로 놓여있다.



t의 범위가 실수 전체일 때, $\left(\left|\overrightarrow{AB_2}-t\overrightarrow{AB_1}\right|+\left|\overrightarrow{AB_3}-t\overrightarrow{AB_1}\right|\right)^2$의 최솟값을 구하고, 그 근거를 설명하시오.

20번 문항 (2024학년도 경희대 논술기출)

아래 그림과 같이 중심이 O_1이고 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 중심이 O_2이고 선분 CD를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB와 선분 CD는 수직이고, $\overline{AB}=\overline{CD}=2$이다. 호 AP와 호 QP 위에서 각각 움직이고 있는 점 M과 점 N에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_2N}\right|$의 최솟값이 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다. 다음 물음에 답하시오. (단, 점 O_2는 선분 AB 위에 있다.)



[1] 선분 O_1O_2의 길이를 구하시오.

[2] $\left|\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_2N}\right|$이 최소일 때 $\overline{MR}^2$의 값을 구하시오.

21번 문항 (2022학년도 중앙대 논술기출)

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 다음의 조건을 만족하면서 연속적으로 움직인다고 하자.

(가) 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 시각 $t=0$일 때, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$에서 출발하여 타원 $x^2+2y^2=2$를 따라 반시계방향으로 움직이기 시작한다.

(나) 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 시각 t $(t \geq 0)$일 때, 타원 $x^2+2y^2=2$의 두 초점 A, B에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{t^2+2}{2\left(t^2+t+1\right)}$를 만족시킨다.

삼각형 PAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 최댓값을 구하시오.

22번 문항 (2022학년도 중앙대 논술기출)

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2)$가 있고, 점 P가 다음을 만족한다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$

(나) 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$이다.

$\dfrac{x+y}{x+3y}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, mM^2+Mm^2의 값을 구하시오.

23번 문항 (2022학년도 부산대 논술기출)

좌표평면에 두 타원 $E_1 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, $E_2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 이 있다. 제1사분면에서 타원

E_1위의 임의의

한 점을 $\mathrm{P}(t, s)$라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 타원 E_2의

교점을 Q라 하자.

점 P에서 타원 E_1의 접선과 점 Q에서 타원 E_2의 접선의 교점을 R라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1). $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}}$ 의 값을 구하시오.

(2). 삼각형 PQR의 넓이를 S_1, 삼각형 QRH의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값을 구하시오.

(3). $\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{QRH}$ 를 만족시키는 점 R의 좌표를 구하시오.

24번 문항 (2022학년도 부산대 모의논술)

포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)\,(y_1<y_2)$에 대하여, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선의 교점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

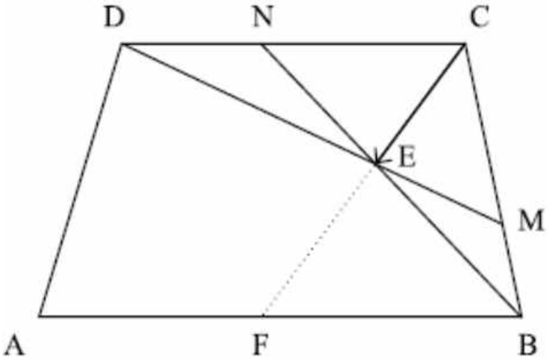
(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x, y)\,(y_1<y<y_2)$에 대하여 삼각형 ABQ의 넓이의 최대가 되도록 하는 점 Q의 좌표를 y_1, y_2를 이용하여 나타내시오.

(2) 점 P를 지나고 y축에 수직인 직선이 포물선 $y^2=4px$와 만나는 점을 R, 선분 AB와 만나는 점을 S라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$로 나타내시오. (단, $x_1 \neq x_2$이고 O는 원점이다.)

(3) 점 $\mathrm{T}(t, 0)\,(t>2p)$와 포물선 $y^2=4px$ 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 포물선 위의 한 점을 C라 하고, 점 C에서의 접선이 x축과 만나는 점을 E라 하자. 점 T를 중심으로 하고 선분 CT를 반지름으로 하는 원의 넓이를 $S_1(t)$, 선분 ET를 지름으로 하는 원의 넓이를 $S_2(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{t\times S_1(t)}{S_2(t)}$의 값을 구하시오.

25번 문항 (2019학년도 가톨릭대 모의논술)

그림과 같이 선분 AB와 선분 CD가 서로 평행인 사다리꼴 ABCD에서 선분 BC를 삼등분한 점 중 B에 가까운 점을 M, 선분 CD를 $3:2$로 내분한 점을 N, 선분 BN과 선분 DM의 교점을 E, 선분 CE를 포함하는 직선과 AB를 포함하는 직선의 교점을 F라고 하자.



상수 m, n에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=m\overrightarrow{\mathrm{CB}}+n\overrightarrow{\mathrm{CD}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=k\overrightarrow{\mathrm{CE}}$일 때, m, n, k의 값을 구하시오.

26번 문항 (2019학년도 한양대 모의논술)

(가) 매개변수 t로 나타낸 곡선

$$x(t)=A\sin T,\ \ y(t)=B\cos(2t+\theta)$$

가 있다. (단, A, B는 양수, θ는 실수이다.)

(나) 매개변수 t로 나타낸 곡선

$$x(t)=\sin t,\ \ y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$$

가 있다.

(1) $A=2$, $B=3$, $\theta=0$일 때, 제시문 (가)의 곡선이 x축과 만나는 점을 각각 F, F$'$이라 하고, y축과 만나는 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 두 초점이 F, F$'$이고 선분 PQ가 단축인 타원의 방정식을 구하시오.

(2) $A=1$, $B=3$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$일 때, 제시문 (가)의 곡선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 이 곡선에서 y좌표가 최소가 되는 점을 T, 점 T를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 U라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{RU}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{ST}}$를 $f(\theta)$라 할 때, $\theta=\frac{5}{6}\pi$에서의 미분계수 $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$를 구하시오. (단, $0\le t\le\frac{3}{8}\pi$이다.)

(3) 점 P에서 제시문 (나)의 곡선에 그은 접선이 두 개이고 서로 수직으로 만난다. 이러한 점 P의 자취가 어떤 곡선인지 설명하시오.

27번 문항 (2024학년도 경희대 논술기출)

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 서로 다른 세 점 A, B, C가 있고, 점 O와 점 A를 잇는 선분의 중점을 O′이라고 하자. 점 O′으로부터 세 점 A, B, C로의 세 벡터가 상수 $-3 \leq k \leq 3$에 대해 다음 식을 만족한다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

$$k\overrightarrow{\mathrm{O'A}} = \overrightarrow{\mathrm{O'B}} + 3\overrightarrow{\mathrm{O'C}}$$

(1) 점 O로부터 두 점 B, C로의 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) (1)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$의 값이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

28번 문항 (2024학년도 한양대 모의논술)

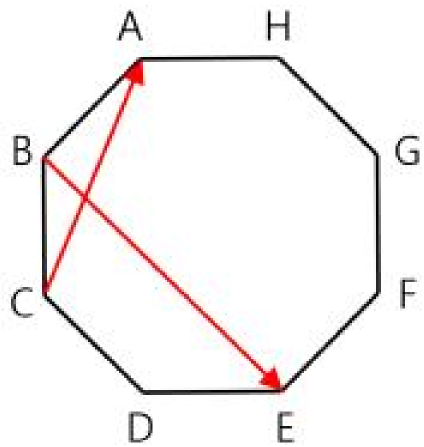
좌표평면에서 선분 AB를 아랫변으로 하는 사다리꼴 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{CD}}=1$, $\overline{\mathrm{DA}}=5$
(나) $\cos\angle\mathrm{DAB}=\frac{3}{5}$, $\cos\angle\mathrm{BCD}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

점 P가 $\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right)=\frac{67}{8}$을 만족시킬 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$의 최댓값을 구하시오.

28번 문항 (2024학년도 한양대 모의논술)

정팔각형 ABCDEFGH에서 $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BE}|=2$일 때, 이 정팔각형의 넓이를 구하시오.



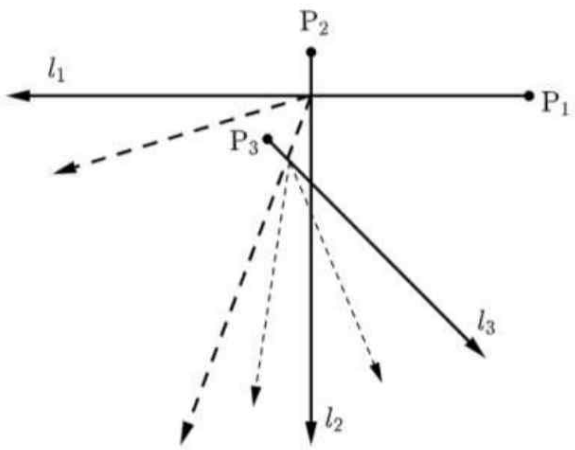
29번 문항 (2024학년도 연세대 논술기출)

좌표평면 위의 점 P와 평면벡터 $\vec{v}$에 대하여, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ $(t \geq 0)$을 만족하는 점 Q가 그리는 반직선을 생각하자. 네 점 $P_1(6, 4)$, $P_2(1, 5)$, $P_3(0, 3)$, $P_4(0, -1)$과 네 벡터 $\overrightarrow{v_1} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, -1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1, -1)$, $\overrightarrow{v_4} = (1, 1)$에 대하여 $\overrightarrow{OQ_i} = \overrightarrow{OP_i} + t\overrightarrow{v_i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$를 만족시키는 점 Q_i가 그리는 반직선 l_i가 주어져 있다. 다음 제시문을 참고하여 물음에 답하시오.

서로 다른 두 개의 반직선이 만났을 때, 양의 실수 a에 대하여 다음 규칙을 따라 새로운 반직선들이 생성된다고 하자.

(가) 서로 다른 두 반직선 l_i, l_j $(1 \leq i,\ j \leq 4)$가 시작점 P_i 또는 P_j가 아닌 점 P에서 만날 때, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\left(a\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 R이 그리는 반직선과 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t\left(\overrightarrow{v_i} + a\overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 S가 그리는 반직선이 각각 생성된다.
(나) 새로 생성된 반직선들을 포함하여 임의의 서로 다른 두 반직선이 시작점이 아닌 점에서 만날 때에도 (가)의 규칙이 계속 적용된다.

※ 아래는 위 과정을 통해 생성된 일부 반직선들을 나타낸 그림이다.



(1). 두 반직선 l_1, l_2에 대하여 제시문의 (가)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $A(2, 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

(2). 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4에 대하여 제시문의 (가), (나)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $A(2, 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

30번 문항 (2024학년도 서울시립대 논술기출)

두 곡선 $y=x^4-2x^2+1$과 $y=-x^2+x+2$가 만나는 두 점 중 x좌표가 음수인 점을 P, x좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 점 $A(0,-1)$에 대하여 $k \le \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA} < k+1$을 만족시키는 정수 k를 구하여라.

1번 문항 해설

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=4$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-3(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})=4$

$\cos\mathrm{B}=\frac{1}{4}$ 이다. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4d$ 라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2d$ 이므로

위의 등식으로부터 $19d^2=4$ 임을 알 수 있다. 따라서, $\overline{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{8}{\sqrt{19}}$ 이다.

2번 문항 해설

두 벡터의 내적이 $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \cdot \dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \cos\theta$ 임을 알 수 있다. 곡선 $f(x) = \dfrac{1}{14+8\sqrt{3}} \ln x(\ln x - 1)^2$ 은 $x=1$, $x=e$ 에서 x 축과 만나고, $x \geq e$ 에서 증가한다. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선 중 기울기가 최대인 경우에 내적 $\cos\theta$ 가 최댓값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 원점을 지나면, $0-f(a) = f'(a)(0-a)$ 이므로 $f(a) = af'(a)$을 얻는다. 즉,
$\ln a(\ln a - 1)^2 = (\ln a - 1)^2 + 2\ln a(\ln a - 1)$ 이고, 이 식을 정리하면
$(\ln a)^2 - 4(\ln a) + 1 = 0$, 따라서 $\ln a = 2 \pm \sqrt{3}$ 이다.
$\ln a = 2 - \sqrt{3}$ 에 대응하는 접점의 좌표는 $\left(e^{2-\sqrt{3}}, \dfrac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right)$,
$\ln a = 2 + \sqrt{3}$ 에 대응하는 접점의 좌표는 $\left(e^{2+\sqrt{3}}, 1\right)$ 이다.
위의 두 접점에서 접선의 기울기를 비교하면,
$e^{2\sqrt{3}} < e^4 < 3^4 = 81$ 을 이용하여

$$\frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})e^{2-\sqrt{3}}} < \frac{1}{e^{2+\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} = (7+4\sqrt{3})^2 = 97+56\sqrt{3}$$

$e^{2\sqrt{3}} < 81 < 97+56\sqrt{3} = (7+4\sqrt{3})^2 = \dfrac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$ 이므로

$$\frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})e^{2-\sqrt{3}}} < \frac{1}{e^{2+\sqrt{3}}} \text{ 이다.}$$

따라서 $\mathrm{A}(e^{2+\sqrt{3}}, 1)$, $\mathrm{B}(1, e^{2+\sqrt{3}})$ 일 때, 최댓값 $\dfrac{2e^{2+\sqrt{3}}}{1+e^{4+2\sqrt{3}}}$ 을 갖는다.

3번 문항 해설

조건 ㈎에 의해서 점 P 는 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점이라는 것을 얻는다.
$\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 조건 ㈏를 이용하면, $(a,b-2)=x(a-1,b)+y(a-3,b)$ 에서
$a=ax+ay-x-3y$ 에서 $x+3y=a(x+y-1)$ 이고,
$b-2=bx+by$ 에서 $x+y=1-\frac{2}{b}$ 이다.

이를 정리하면, $x+3y=-\frac{2a}{b}$ 이고 $x+y=1-\frac{2}{b}$ 를 얻는다.

그러므로, $\frac{x+y}{x+3y}=\frac{1-\frac{2}{b}}{-\frac{2a}{b}}=\frac{b-2}{-2a}$

$\frac{x+y}{x+3y}=k$ 로 두면, $\frac{b-2}{-2a}=k$ 즉 $b=-2ak+2$ 라는 직선의 기울기가 $-2k$ 임을 알 수 있다. 중심이 $(2,0)$ 이고 반지름이 1 인 원에 접할 때, 기울기가 최댓값과 최솟값을 가지므로, 직선 $b=-2ak+2$ 와 점 $(2,0)$ 까지의 거리가 1 이 되어야 한다.

즉, $1=\frac{|4k-2|}{\sqrt{4k^2+1}}$ 이 식을 정리하면, $12k^2-16k+3=0$ 이다.

이 이차방정식의 두 근이 바로 k 의 최댓값과 최솟값이 되므로 $mM^2+m^2M=Mm(M+m)$ 이고, 근과 계수의 관계에 의해 합은 $\frac{4}{3}$, 곱은 $\frac{1}{4}$ 이므로 $mM^2+m^2M=Mm(M+m)=\frac{1}{3}$ 이다.

4번 문항 해설

[1] $\overline{OQ}=2$이고, $\overline{OQ}=\overline{OR}+\overline{RQ}=\overline{OR}+\overline{PR}$이므로 $\overline{OR}+\overline{PR}=2$이다. 따라서 점 R은 두 점 O, P 로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이다.

ⅰ) $t=0$이면 점 P가 원점이 되므로 점 R이 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원과 같다. 따라서 $x^2+y^2=1$이다.

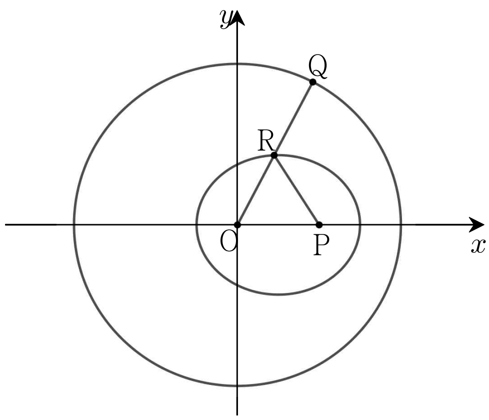
ⅱ) $t=2$이면 점 P가 점 A가 되고 $2=\overline{OA}\le\overline{OR}+\overline{AR}\le\overline{OR}+\overline{PR}=2$이므로 점 Q가 점 A가 아닌 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $(0,0)$이고, 점 Q가 점 A의 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $y=0\ (0\le x\le 2)$이다.

ⅲ) $0<t<2$이면 점 R은 서로 다른 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이 되어 타원 위의 점이 된다. 즉, $\mathrm{O}(0,0)$과 $\mathrm{P}(\mathrm{t},0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인 타원의 방정식은, 두 점 $\mathrm{O}'\left(-\frac{t}{2},0\right)$과 $\mathrm{P}'\left(\frac{\mathrm{t}}{2},0\right)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인 타원을, x축 방향으로 $\frac{t}{2}$만큼 평행이동한 방정식과 같다. 따라서

$$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\frac{t^2}{4}}=1$$

이다.

[2]



$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ})=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}$과 같다. ⋯ ①

한편 $|\overrightarrow{OR}|=k\ (0<k<2)$라 두면, $|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{PR}|=2-k$이다.

또한, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{RP}-\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{PR}$이므로 $|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{PR}|^2$이다.

$$t^2=k^2+(2-k)^2-2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}$$

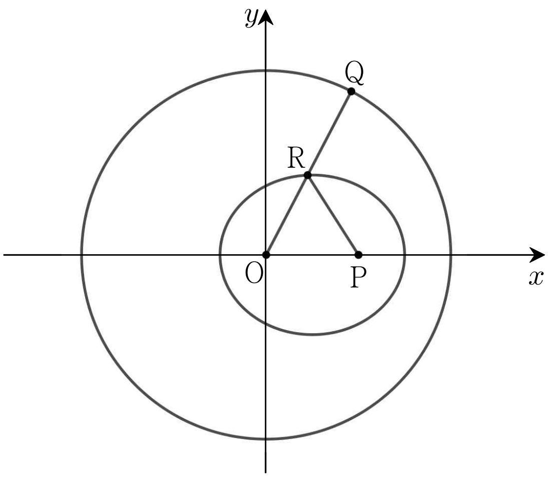
이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}=k^2-2k+2-\dfrac{t^2}{2}$ 이다.

따라서 ①에

$$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ})=k(2-k)+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}=2-\frac{t^2}{2}$$

이다.

[3] $t=1$ 이면 점 R은 타원 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ 위에 있다.



$\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{TR}$ 에서 $\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RT}=\vec{0}$ 이므로 점 R은 두 점 M, T 의 중점이어야 한다. ⋯ ①

ⅰ) 점 Q의 좌표를 (a,b) 라 하자. 그러면 $a^2+b^2=4$ 이다.

ⅱ) 점 M은 $\overline{PQ}$ 의 중점이므로 $M\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ 이다. 한편, 점 R은 두 직선 OQ와 MR의 교점이다.

직선 OQ의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x\ \cdots\ ②$$

이고, 직선 MR은 점 M을 지나고 직선 PQ에 수직이다. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{b}{a-1}$ 이므로 직선 MR의 방정식은

$$y=\frac{1-a}{b}\left(x-\frac{a+1}{2}\right)+\frac{b}{2}\ \ 즉,\ y=\frac{1-a}{b}x+\frac{3}{2b}\ \cdots\ ③$$

이다. 따라서 ②, ③에 의해서 $\frac{b}{a}x=\frac{1-a}{b}x+\frac{3}{2b}$가 되어 $x=\frac{3a}{2(4-a)}$ 즉, 점 R의 x좌표는 $\frac{3a}{2(4-a)}$이다.

ⅲ) ①에 의해서 점 R의 x좌표의 2배가 점 M의 x좌표가 된다.
따라서 $2\times\frac{3a}{2(4-a)}=\frac{a+1}{2}$을 만족하는 $a=1$이다$(-2\le a\le 2)$.
이를 만족하는 점 Q의 좌표는 $(1,\ \sqrt{3})$이 된다.
따라서 점 R은 타원의 단축 위의 꼭짓점이 되어

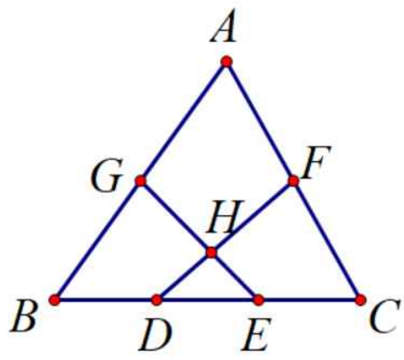
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

이다.

5번 문항 해설

[1]

문제의 조건을 그림으로 구성하면 다음과 같다.



<그림 3>

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{6}$ 따라서 $a=-\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{2}{3}$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{6}$ 따라서 $c=\dfrac{2}{3}$, $d=-\dfrac{1}{6}$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}+\dfrac{2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{3}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}+\dfrac{2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})}{3}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

따라서 $a=-\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=\dfrac{2}{3}$, $d=-\dfrac{1}{6}$

[2]

$\overrightarrow{GH}=m\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{DH}=n\overrightarrow{FD}$ 라고 하자. (m, n은 실수)

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FH}$$

즉, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+m\left(-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+n\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)$이다. 이 식을 정리하면 다음 식을 구할 수 있다. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{6}=\dfrac{2n}{3}$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{6}=\dfrac{2m}{3}$ 이 두 식을 연립하여 계산하면

$m=n=\dfrac{3}{5}$($\overline{GF}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 처음부터 $m=n$으로 두고 풀어도 된다.)

따라서 $\overline{GH}:\overline{HE}=\dfrac{3}{5}:\dfrac{2}{5}=3:2$

[3]

$$\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}}=\overrightarrow{\mathrm{AI}_{k+l}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{(n-k-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(k+l)\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}$$

$$=\frac{(n-2k-2l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2(\mathrm{k}+\mathrm{l})\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2n}$$

같은 방법으로 계산하면, $\overrightarrow{\mathrm{FI}_k}=\dfrac{(2n-2k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(-\mathrm{n}+2\mathrm{k})\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2n}$

$\overrightarrow{\mathrm{GJ}}=x\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}}$이라고 하자. $\overline{\mathrm{GF}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=x\overrightarrow{\mathrm{FI}_k}$ 이다.

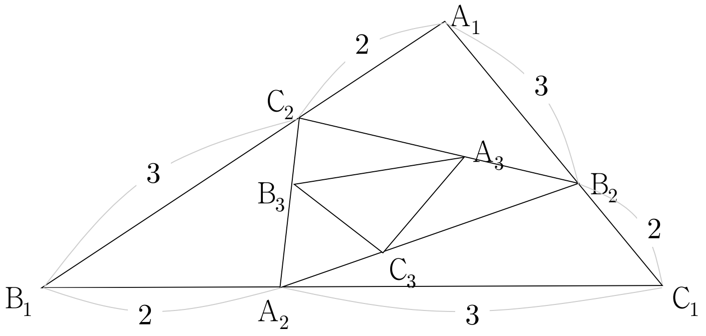
$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\overrightarrow{\mathrm{GJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+x\overrightarrow{\mathrm{GI}_{k+l}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+x\overrightarrow{\mathrm{FI}_k}$$

이제 위의 [2]와 같은 방법으로 계산하면 $x=\dfrac{n}{n+2l}$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{FJ}}:\overline{\mathrm{JI}_k}=\frac{n}{n+2l}:\frac{2l}{n+2l}=n:2l$$

6번 문항 해설

[1]
점 A_n, B_n, C_n의 정의로부터 점 A_{n+1}은 선분 B_nC_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 B_{n+1}은 선분 C_nA_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 C_{n+1}은 선분 A_nB_n을 $2:3$으로 내분하는 점임을 알 수 있다.



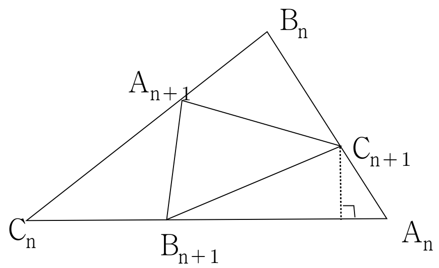
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{A_1B_1} + 2\overrightarrow{A_1C_1}\right)$$

이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_2} &= \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{B_1C_1} + 2\overrightarrow{B_1A_1}\right)\\ &= \frac{1}{5}\left\{3\left(\overrightarrow{A_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1}\right) - 2\overrightarrow{A_1B_1}\right\}\\ &= \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{A_1C_1} - 5\overrightarrow{A_1B_1}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$ 이다. 따라서 $a = -\frac{2}{5}$, $b = 1$이다.

[2] 대학발표 예시답안



삼각형 ABC의 넓이를 $\triangle ABC$로 나타내자.
그림으로부터

$$\triangle A_nB_{n+1}C_{n+1} = \frac{1}{2}\overline{A_nB_{n+1}} \cdot \overline{A_nC_{n+1}} \sin\angle A_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\overline{A_nC_n}\right)\left(\frac{2}{5}\overline{A_nB_n}\right)\sin\angle A_n$$
$$= \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

이다. 같은 방법으로

$$\triangle B_nA_{n+1}C_{n+1} = \triangle C_nB_{n+1}A_{n+1} = \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} = \triangle A_nB_nC_n - 3\times\frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n = \frac{7}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

이므로

$$\triangle A_3B_3C_3 = \frac{7}{25}\triangle A_2B_2C_2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2\triangle A_1B_1C_1 = 49$$

이다.

(다른풀이)

$\triangle B_nC_nB_{n+1}$와 $\triangle B_nB_{n+1}A_n$에서 $\overline{C_nB_{n+1}} : \overline{B_{n+1}A_n} = 2:3$이므로

$\triangle B_nB_{n+1}A_n = \frac{3}{5}\triangle A_nB_nC_n$ 이다.

$\triangle A_nC_{n+1}B_{n+1}$와 $\triangle B_nB_{n+1}C_{n+1}$에서 $\overline{A_nC_{n+1}} : \overline{C_{n+1}B_n} = 2:3$이므로

$\triangle A_nC_{n+1}B_{n+1} = \frac{2}{5}\triangle B_nB_{n+1}C_{n+1} = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\triangle A_nB_nC_n = \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n$이다.

같은 방법으로

$$\triangle B_nA_{n+1}C_{n+1} = \triangle C_nB_{n+1}A_{n+1} = \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} = \triangle A_nB_nC_n - 3\times\frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n = \frac{7}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

이므로

$$\triangle A_3B_3C_3 = \frac{7}{25}\triangle A_2B_2C_2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2\triangle A_1B_1C_1 = 49$$

이다.

[3] 대학발표 예시답안

$\overrightarrow{\mathrm{OA_n}} = (p_n, q_n)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB_n}} = (\mathrm{r_n}, \mathrm{s_n})$, $\overrightarrow{\mathrm{OC_n}} = (\mathrm{t_n}, \mathrm{u_n})$이라 하면 주어진 조건 ②에 의하여 다음이 성립한다.

$$p_n + r_n + t_n = p_{n+1} + r_{n+1} + t_{n+1}$$
$$q_n + s_n + u_n = q_{n+1} + s_{n+1} + u_{n+1}$$

따라서 삼각형 $\mathrm{A_nB_nC_n}$의 무게중심과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B_{n+1}C_{n+1}}$의 무게중심은 동일하다.

조건으로부터 $n\to\infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{\mathrm{A_nP}}$, $\overline{\mathrm{B_nP}}$, $\overline{\mathrm{C_nP}}$가 모두 0으로 수렴하므로 점 P의 좌표를 (α, β)라 하면,

$$p_n\to\alpha,\ r_n\to\alpha,\ t_n\to\alpha,\ q_n\to\beta,\ s_n\to\beta,\ u_n\to\beta$$

이다. 따라서

$$\frac{p_1+r_1+t_1}{3} = \frac{p_n+r_n+t_n}{3} \to \alpha$$
$$\frac{q_1+s_1+u_1}{3} = \frac{q_n+s_n+u_n}{3} \to \beta$$

이므로 $\alpha = \dfrac{p_1+r_1+t_1}{3}$, $\beta = \dfrac{q_1+s_1+u_1}{3}$이다. 그러므로 점 P는 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 무게중심이고 삼각형 $\mathrm{PA_1B_1}$의 넓이는 $\dfrac{625}{3}$이다.

(다른 풀이)

삼각형 $\mathrm{A_nB_nC_n}$의 무게중심을 $\mathrm{G_n}$이라 하면 조건 ②에 의해

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_n}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_n}} + \overrightarrow{\mathrm{OB_n}} + \overrightarrow{\mathrm{OC_n}}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_{n+1}}} + \overrightarrow{\mathrm{OB_{n+1}}} + \overrightarrow{\mathrm{OC_{n+1}}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OG_{n+1}}}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{A_nB_nC_n}$의 무게중심과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B_{n+1}C_{n+1}}$의 무게중심은 동일하다.

조건으로부터 $n\to\infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{\mathrm{A_nP}}$, $\overline{\mathrm{B_nP}}$, $\overline{\mathrm{C_nP}}$가 모두 0으로 수렴하고

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{B_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{C_nP}}\right| \le \left|\overrightarrow{\mathrm{A_nP}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{B_nP}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{C_nP}}\right|$$

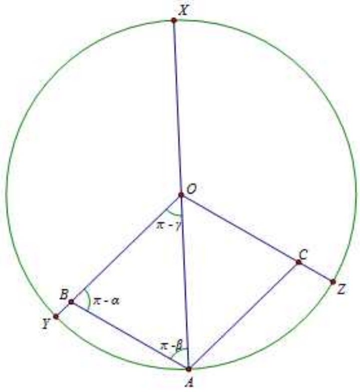
이므로 $n\to\infty$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{A_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{B_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{C_nP}}$는 $\vec{0}$에 수렴한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{B_nP}}+\overrightarrow{\mathrm{C_nP}} &= 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA_n}}+\overrightarrow{\mathrm{OB_n}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_n}}\right)\\ &= 3\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OG_n}}\right) = 3\overrightarrow{\mathrm{G_nP}}\end{aligned}$$

이므로 $n\to\infty$일 때 점 $\mathrm{G_n}$이 점 P에 수렴한다. 그런데 모든 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{G_n}$은 $\mathrm{G_1}$으로 동일한 점이므로 점 P는 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 무게중심이고 삼각형 $\mathrm{PA_1B_1}$의 넓이는 $\dfrac{625}{3}$이다.

7번 문항 해설

[1]
선분 OX의 연장선 위에 $\overrightarrow{XO}=\overrightarrow{OA}$가 되도록 점 A를 잡는다.
점 A를 지나고 선분 OZ와 평행한 직선이 선분 OY(또는 선분 OY의 연장선)와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 선분 OY와 평행한 직선이 선분 OZ(또는 선분 OZ의 연장선)와 만나는 점을 C라 하자.



그러면 $\triangle OAB$에서

$$\overline{BO}\ \overline{BA}\sin(\pi-\alpha)=\overline{AO}\ \overline{AB}\sin(\pi-\beta)=\overline{OB}\ \overline{OA}\sin(\pi-\gamma)$$

또는

$$\overline{OB}\ \overline{AB}\sin\alpha=\overline{OA}\ \overline{AB}\sin\beta=\overline{OB}\ \overline{OA}\sin\gamma$$

이다. $\overline{OA}=1$이므로

$$\overline{OB}\sin\alpha=\sin\beta,\ \overline{AB}\sin\alpha=\sin\gamma$$

이 된다. 따라서 $\overline{OB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$이고 $\overline{AB}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$이다.

$\square OBAC$는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$이고, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$이다.

$-\overrightarrow{OX}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\overrightarrow{OY}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\overrightarrow{OZ}$ 이므로 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$

(다른 풀이)
반직선 OX가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ $(0\le\theta\le2\pi)$라 하면

$$\overrightarrow{OX}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{OY}=(\cos(\theta+\gamma),\ \sin(\theta+\gamma))$$
$$\overrightarrow{OZ}=(\cos(\theta+\gamma+\alpha),\ \sin(\theta+\gamma+\alpha))=(\cos(\theta-\beta),\ \sin(\theta-\beta))$$

이다. 벡터 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}$의 x성분은

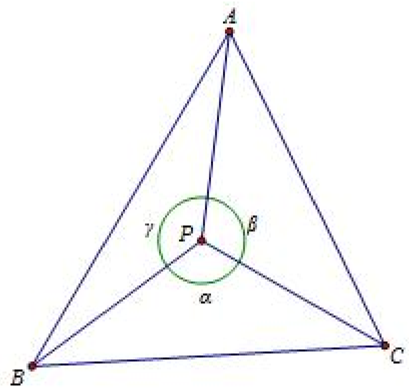
$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+\sin\gamma\cos(\theta-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta(\cos\theta\cos\gamma-\sin\theta\sin\gamma)+\sin\gamma(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta\cos\theta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\theta\cos\beta\\&=\cos\theta(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)\\&=\cos\theta\{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\}\\&=\cos\theta(\sin\alpha-\sin\alpha)\\&=0\end{aligned}$$

마찬가지로 벡터 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}$의 y성분은

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta\sin(\theta+\gamma)+\sin\gamma\sin(\theta-\beta)\\&=\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta(\sin\theta\cos\gamma+\cos\theta\sin\gamma)+\sin\gamma(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\\&=\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta\sin\theta\cos\gamma+\sin\gamma\sin\theta\cos\beta\\&=\sin\theta(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)\\&=\sin\theta\{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\}\\&=\sin\theta(\sin\alpha-\sin\alpha)\\&=0\end{aligned}$$

따라서 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$이다.

[2] 대학발표 예시답안



$\angle BPC=\alpha$, $\angle CPA=\beta$, $\angle APB=\gamma$, $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, $\overline{PC}=c$라 두면

$p=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, $q=\dfrac{1}{2}ca\sin\beta$, $r=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$이다.

$\overrightarrow{PX}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PY}=\dfrac{1}{b}\overrightarrow{PY}$, $\overrightarrow{PZ}=\dfrac{1}{c}\overrightarrow{PC}$라 두면

[1]에 의해서 $\sin\alpha\overrightarrow{PX}+\sin\beta\overrightarrow{PY}+\sin\gamma\overrightarrow{PZ}=\vec{0}$, 또는

$\sin\alpha(\dfrac{1}{a}\overrightarrow{PA})+\sin\beta(\dfrac{1}{b}\overrightarrow{PB})+\sin\gamma(\dfrac{1}{c}\overrightarrow{PC})=\vec{0}$이다.

양변에 $\dfrac{1}{2}abc$를 곱하면

$\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}ca\sin\beta\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이고

따라서 $p\cdot\overrightarrow{PA}+q\cdot\overrightarrow{PB}+r\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이다.

8번 문항 해설

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$
$$= |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$$

이므로 $k = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$ 이다.

(1) $k=0$에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$이므로 타원의 대칭성으로부터 점 A와 점 B는 x축 또는 y축 대칭이다. 따라서 점 A와 점 B는 x축 또는 y축 대칭이고, 직선 OA와 직선 OB가 서로 수직이므로 직선 OA와 직선 OB의 기울기 중 하나는 1이고 다른 하나는 -1이다. 그러므로 점 A는 주어진 타원과 직선 $y=x$의 교점인

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

또는 주어진 타원과 직선 $y=-x$의 교점인

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이다.

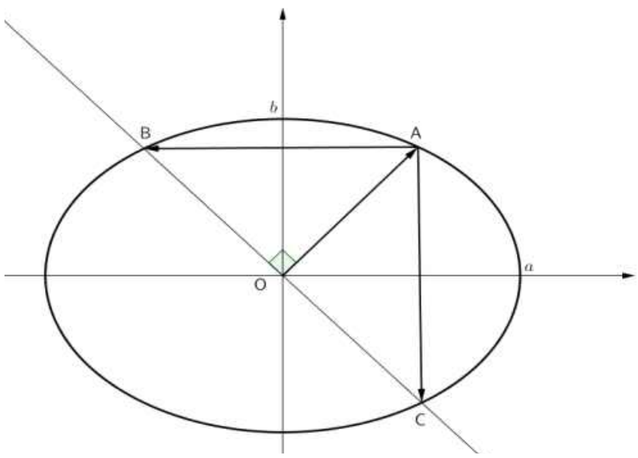
(다른 풀이)

(1) $k = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ 이므로 $k=0$이 되려면 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}$가 되어야 한다. $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}$일 때, 점 A를 구하자.

$\triangle ABO$와 $\triangle ACO$에서 $\overline{AO}$는 공통, $\angle AOB = \frac{\pi}{2} = \angle AOC$ 이고 타원의 대칭성에 의하여 $\overline{BO} = \overline{CO}$이므로 $\triangle ABO \equiv \triangle ACO$이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이므로 $\angle ABO = \frac{\pi}{4} = \angle ACO$이고 $\angle OAC = \frac{\pi}{4}$이다.

그러므로 $\triangle ACO$는 이등변삼각형이므로 $\overline{OA} = \overline{OC}$이다.



$\overline{\mathrm{OA}}$의 기울기를 k라 하면 $\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}$의 기울기는 $-\dfrac{1}{k}$이다.

한편, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$가 되려면 타원의 대칭성에 의하여 점 A와 점 C는 x축 또는 y축 대칭이 되어야 하므로 $\overline{\mathrm{OC}}$의 기울기는 $-k$이다. 그러므로 $-\dfrac{1}{k}=-k$에서

$k=\pm 1$

이 된다. 즉, 점 A는 타원과 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.

따라서

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

또는

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이다.

(2) k가 최대가 되려면 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$의 길이가 최대이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$의 길이가 최소가 되며 두 벡터가 수직이어야 한다. 점 A가 장축에 있고 점 B가 단축에 있을 때, 조건을 만족하며 최댓값 a^2-b^2을 가진다. 같은 이유로 점 A가 단축에 있고 점 B가 장축에 있을 때, 조건을 만족하며 최솟값은 b^2-a^2을 가진다.

9번 문항 해설

[1] (다른 풀이)

점 (r, s)는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로 $r=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ $\left(\alpha \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 둘 수 있다.

이때

$$\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\frac{4}{5},\ \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25},\ \text{즉, } \sin\alpha=\frac{7}{25},\ \cos\alpha=\frac{24}{25}$$

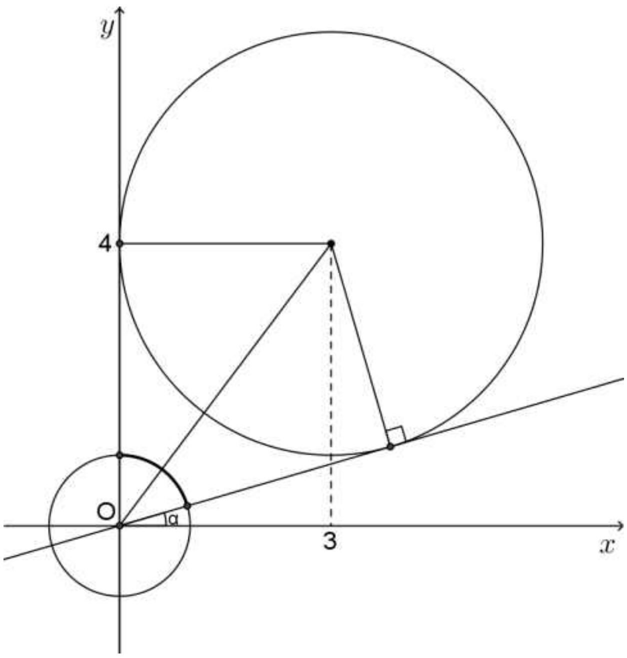
따라서

$$s-r=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \alpha-\frac{\pi}{4}\le\theta-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$$

이고 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{7}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{24}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{17}{25}$ 이므로

$$-\frac{17}{25}\le s-r=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

따라서 $s-r$의 최솟값은 $-\frac{17}{25}$ 이다.



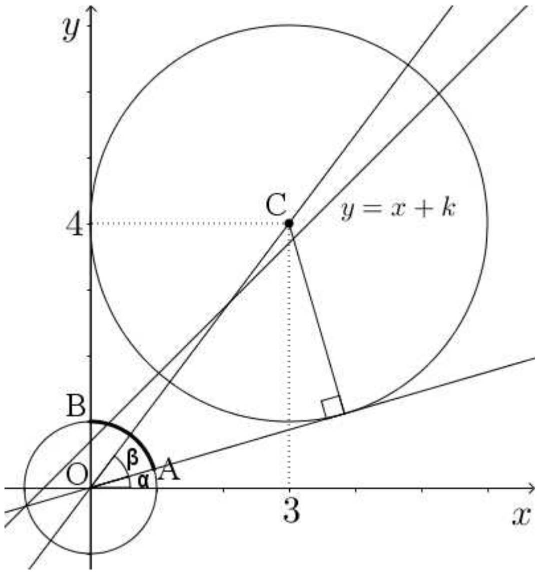
(다른 풀이2)

그림과 같이 원점에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 그은 두 접선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 점 Q(r, s)는 $\overset{\frown}{AB}$ 위를 움직인다. $s-r=k$라 두면 점 Q(r, s)는 직선 $y=x+k$와 $\overset{\frown}{AB}$의 교점이다. 점 Q(r, s)가 점 A와 같을 때 직선 $y=x+k$

의 y절편인 k가 최소가 된다.

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 C라 하고 직선 OA, OC가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면 $\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$ 이므로

$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=\sin2\beta=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$, $\sin\alpha=\frac{7}{25}$이다. 따라서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$이므로 $s-r$의 최솟값은 $\frac{7}{25}-\frac{24}{25}=-\frac{17}{25}$ 이다.



(대학발표 예시답안)

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$로 정의된 Q는 원점과 점 P를 이은 직선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점이 된다. 따라서 원점에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 된다. 하나는 y축이고 나머지 하나를 구하기 위해서 $y=kx$로 놓고 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 대입하면 $(k^2+1)x^2-(6+8k)x+16=0$이고 중근을 가지기 위해서는 $k=\frac{7}{24}$이다.

$7^2+24^2=25^2$이므로 직선 $y=\frac{7}{24}x$와 단위원이 $\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$에서 만나고 이때 $s-r$는 최솟값 $-\frac{17}{25}$을 갖는다.

10번 문항 해설

$$2\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)$$
$$=2\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\right)-\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2\right)$$
$$=2\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\right)-(a^2+b^2+c^2)$$
이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

이다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$라 하고 삼각형 ABC 내부의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 무게중심을 G라 할 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=\sum_{k=1}^{3}\left\{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right\}$$
$$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)$$
$$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$$

이다. 여기서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2>0$이고 상수이다.

$\overline{\mathrm{GP}}^2=\left(x-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$이므로

즉, 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심일 때, 최솟값을 갖고, 무게중심에서 가장 멀리 있을 때 최댓값을 갖는다.

ⅰ) P가 삼각형 ABC의 무게중심인 경우에 최솟값을 갖는다.

파푸스중선정리에 의해 $2\left(\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\overline{\mathrm{PA}}\right)^2\right)=b^2+c^2$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$이다. 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\dfrac{2c^2+2a^2-b^2}{9}$, $\overline{\mathrm{PC}}^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$이다. 따라서 최솟값은 $-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$이다.

ⅱ) $a\le b\le c$이므로 $\mathrm{P}=\mathrm{A}$인 경우에 최댓값을 갖는다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=b^2+c^2$이므로 최댓값은 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$이다.

11번 문항 해설

[1]

(조건1)에 의해 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ 이므로 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|-\overrightarrow{OC}|$ 이고 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$$

이다. 여기서 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|-\overrightarrow{OC}|=1$ 이므로 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=3$$

이고 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ 에서 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ 에서 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$ 임을 알 수 있고 따라서 삼각형 ABC 는 정삼각형이다.

[2]

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$ (k는 실수)이고 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 이므로

$$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$$

이다. 한편, [1]에 의해 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$ 이고 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다. 따라서

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

즉, $|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{21}}{3}$ 이다. 또한 삼각형 ABP 와 삼각형 CDP 는 닮음이므로

$$\overline{BP}:\overline{DP}=\overline{AP}:\overline{CP},\quad \frac{1}{3}\sqrt{3}:\overline{DP}=\frac{\sqrt{21}}{3}:\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

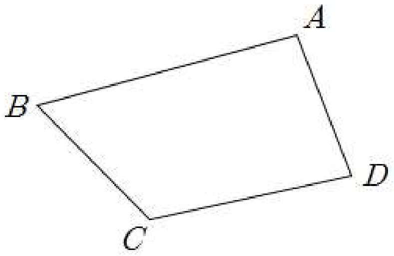
이고 $\overline{DP}=\frac{2}{21}\sqrt{21}$, $\overline{AD}=\frac{\sqrt{21}}{3}+\frac{2\sqrt{21}}{21}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$, $k=\frac{9}{7}$ 이다. 따라서

$$\overrightarrow{AD}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

12번 문항 해설

[1]

다음과 같이 사각형 $ABCD$의 각 변을 벡터에 대응시키면



벡터의 합에 성질에 의해서 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

변 AB의 중점을 a, 변 BC의 중점을 b, 변 CD의 중점을 c 변 DA의 중점을 d라고 놓으면

$$\overrightarrow{ab} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2} = \overrightarrow{cd}$$

$$\overrightarrow{ac} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2} = \overrightarrow{bd}$$

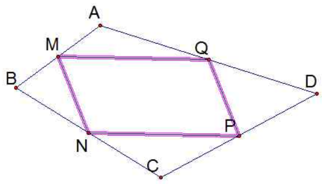
이 되고 두 쌍의 대변이 서로 평행하므로 사각형 $abcd$는 평행사변형이다.

(다른 풀이)

임의의 볼록사각형 ABCD 에 대하여 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ 이라고 하고, 네 변의 중점을 각각

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),\quad N\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right),\quad P\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right),\quad Q\left(\frac{x_1+x_4}{2}, \frac{y_1+y_4}{2}\right)$$

라 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \left(\frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(\frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}\right)$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} // \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 이고 $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$가 성립한다.

따라서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 사각형 MNPQ는 평행사변형이다.

[2]

변 AC 의 중점을 M 이라 하면 $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OM}$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{BC}$ 가 삼각형의 내부에 놓이기 위해서는 $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.

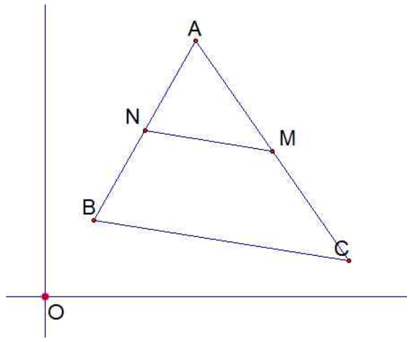
(다른 풀이 1)
삼각형 $\triangle ABC$ 에서 선분 AC 의 중점을 M , 선분 AB 의 중점을 N 이라 하자.

$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OM}$ 이고, $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{MN}$ 이므로

$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OM}+(-2x)\overrightarrow{MN}$ 이다.

따라서 끝점이 삼각형의 내부에 놓이기 위해서는

$0<-2x<1$ 이므로 $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.



(다른 풀이2)
삼각형 $\triangle ABC$ 에서 선분 BC 위의 한 점을 Q , 선분 AQ 위의 한 점을 P 라 하면,
$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$ (단, $0<t<1$), $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ $(0<k<1)$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}=k\left(t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\right)$ ⋯ ①

또 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$$=-x\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\overrightarrow{AC} \cdots ②$$

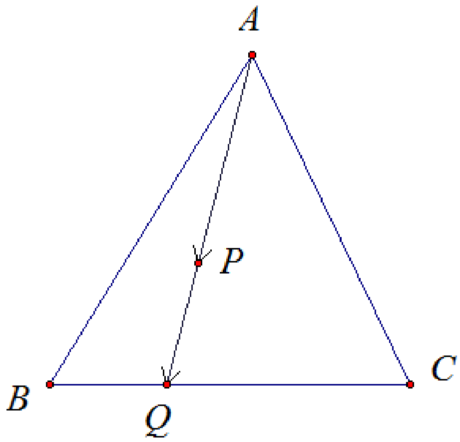
①과 ②에서

$kt=-x,\ k-kt=\frac{1}{2}+x$

연립방정식을 풀면

$k=\frac{1}{2},\ t=-2x$

$0<t<1$ 이므로, $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.



13번 문항 해설

[1]

<가>에서 $\vec{a}=(p,\ q)$라고 하면 $\vec{b}=(p+1,\ q)$이다.

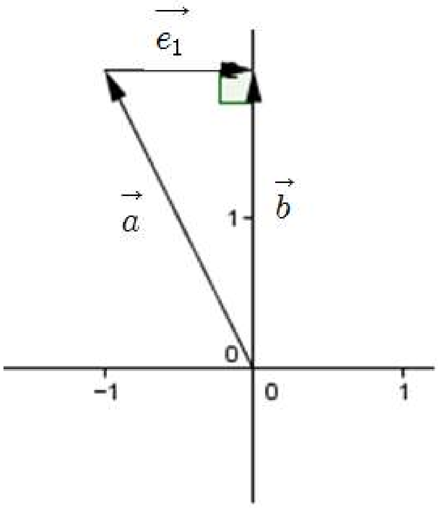
$p^2+q^2=2$, $(p+1)^2+q^2=1$이므로 연립해서 풀면 $p=-1$, $q=1$이다.

그러므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,1)\cdot(0,1)=1$이다.

(다른 풀이 1)

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $\left|\overrightarrow{e_1}\right|=1$이므로 아래 그림과 같은 직각삼각형이다.

그러므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$이다.



(다른 풀이2)

세 변의 길이를 알고 있으므로 제2코사인 법칙에 의해 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각θ의 $\cos\theta$의 값은

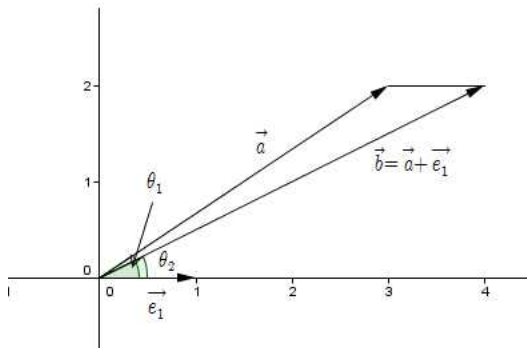
$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-1^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이다. 그러므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

이다.

[2]



$\vec{a}=(x,y)$, $\vec{b}=(x+1,y)$로 두면, $y=x\tan\theta_1=(x+1)\tan\theta_2$이다.

그러므로 $x=\dfrac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2}$, $y=x\tan\theta_1=\dfrac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2}$이다.

$\vec{a}=\left(\dfrac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2}, \dfrac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2}\right)$이다.

(다른 풀이)

사인법칙에 의해 $\dfrac{|\vec{a}|}{\sin\theta_2}=\dfrac{1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}=\dfrac{|\vec{b}|}{\sin(\pi-\theta_1)}$이고

벡터 $\vec{a}$가 x축 아래에 놓여있는 경우를 고려하면 $\vec{a}$의 x성분은 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cos\theta_1$이고, $\vec{a}$의 y성분은 $\pm\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\sin\theta_1$이다.

[3]

$f(x)=\sin x$ ($x\in[0,\ \pi]$)라 하자. 함수 f가 위로 볼록하므로 젠센부등식에 의해

$f(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)\geq\lambda_1 f(\alpha_1)+\lambda_2 f(\alpha_2)+\lambda_3 f(\alpha_3)$ $(\lambda_1\alpha+\lambda_2+\lambda_3=1)$이 성립한다.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{1}{3}$, $\alpha_1=\pi-\theta_1$, $\alpha_2=\theta_2$, $\alpha_3=\theta_1-\theta_2$을 대입하면

$\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

(대학발표 예시답안)

$f(\theta)=\sin\theta\,(0<\theta<\pi)$일 때, $f''(\theta)<0$이다. 따라서 구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(\theta)$는 위로 볼록인 함수이다. 그러므로

$\sin(\pi-\theta)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)\leq 2\sin\left(\dfrac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\sin(\theta_1-\theta_2)$

$$= 3\left[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi - \theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\leq 3\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{\pi - \theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

$$= 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

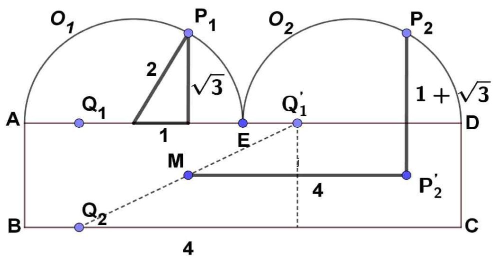
14번 문항 해설

[1]

점 Q_1을 선분 AD방향으로 4만큼 이동시킨 점 Q_1'이라 하고, 선분 $Q_1'Q_2$의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 P_2의 수선의 발을 P_2'이라 하면

$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_1Q_1'}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=\left|2\overrightarrow{P_2M}\right|^2$

$=4\left\{\left(\overrightarrow{MP_2'}\right)^2+\left(\overrightarrow{P_2P_2}\right)^2=80+8\sqrt{3}\right.$



(별해)

점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하면

$P_1(3,\ 2+\sqrt{3})P_2(7,\ 2+\sqrt{3})Q_1(1,\ 2)Q_2(1,\ 0)$

이므로

$\overrightarrow{P_1Q_1}=(-2,\ -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{P_2Q_2}=(-6,\ -2-\sqrt{3})$

이다. 따라서 $\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}=(-8,\ -2-2\sqrt{3})$ 이고

$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=64+4(4+2\sqrt{3})=80+8\sqrt{3}$

이다.

[2]

점 Q_1을 선분 AD방향으로 4만큼 이동시킨 점을 Q_1'이라 하고, 선분 $Q_1'Q_2$의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 P_2의 수선의 발을 P_2'이라 하면

$\overrightarrow{P_1Q_1}\cdot\overrightarrow{P_2Q_2}$

$=\overrightarrow{P_2Q_1'}\cdot\overrightarrow{P_2Q_2}$

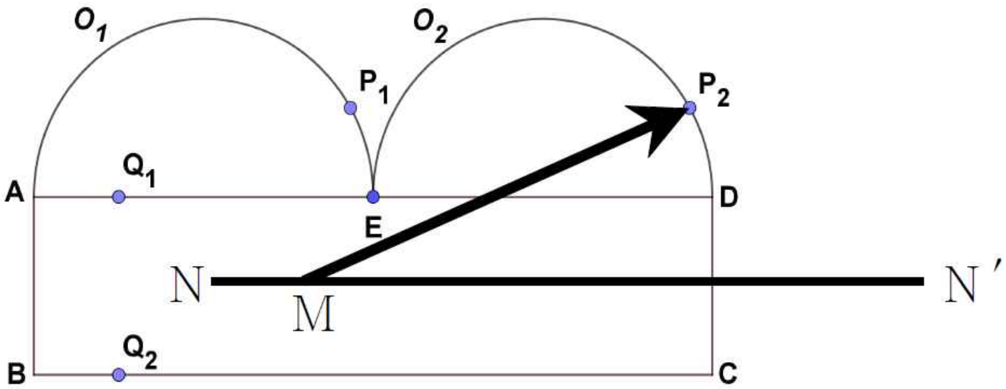
$=\left(\overrightarrow{MQ_1'}-\overrightarrow{MP_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MQ_2}-\overrightarrow{MP_2}\right)$

$=\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2-\left|\overrightarrow{MQ_2}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2-5$

이다.

점 Q_1이 선분 AD위를 움직일 때, 점 M은 선분 BE의 중점 N과 점 N을 $\overrightarrow{AD}$방향으로 8만큼 이동한 점 N'을 끝점으로 하는 선분 위를 움직인다.(그림 참조) 따라서



(1) $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2$의 최솟값 : M이 선분 CD의 중점($Q_1$이 선분 ED의 중점)이고 P_2가 점 D이거나, M이 EF의 중점(Q_1이 선분 AE의 중점)이고 P_2가 점 E인 경우이며,
이 때 $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2 = 1$이다. (단, F는 E에서 선분 BC로 내린 수선의 발이다)

(2) $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2$의 최댓값 : M이 점 N($Q_1$이 점 A)이고 선분 P_2N 위에 반원 O_2의 중심이 있는 경우이거나 M이 점 N′(Q_1이 점 D)이고 선분 P_2N'위에 반원 O_2의 중심이 있는 경우이며 이 때 $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2 = (2+\sqrt{17})^2 = 21+4\sqrt{17}$이다.
답 : 최솟값은 -4, 최댓값은 $16+4\sqrt{17}$

15번 문항 해설

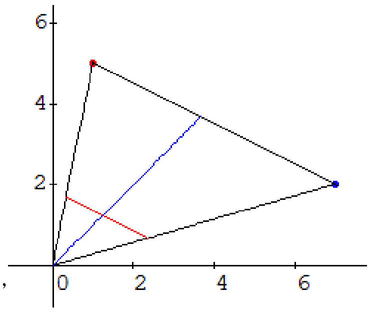
(1) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(7-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) 선분 AB를 $s:(1-s)$로 내분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\vec{0},\ (\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



여기서 Q는 선분 AB이므로, P는 $\frac{1}{3}\mathrm{A}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$, $\frac{1}{3}\mathrm{B}=\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

을 양 끝으로 하는 선분 위의 점이다.

따라서 구하는 선분의 길이는 $\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이다.

16번 문항 해설

먼저 O$(0, 0)$, P(a, b), Q(c, d)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPQ의 넓이를 구하면

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin(\angle \mathrm{POQ}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{POQ})} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2} = \frac{1}{2}|ad-bc|
\end{aligned}
$$

삼각형 ABC를 평행이동하여 A가 원점에 오도록 하면 세 꼭짓점은
A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) 은 각각 O$(0, 0)$, P(x_2-x_1, y_2-y_1), Q(x_3-x_1, y_3-y_1)
따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는 삼각형 OPQ의 넓이와 같고

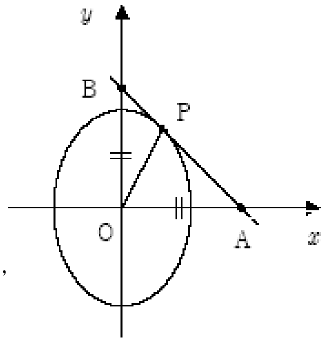
$$S = \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$$

그러므로 A$(1, 1)$, B$(2, 2)$, C$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$S = \frac{1}{2}\left|1\times\frac{3}{2}-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 1$$

17번 문항 해설

[1]



(1) 점 $P(x_1, y_1)$에서 접선은 $\dfrac{x_1}{a}x+y_1y=1$인데,

x절편과 y절편이 같으므로 $\dfrac{x_1}{a}=y_1$

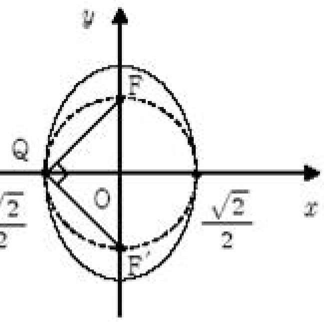
그리고 $\dfrac{x_1^2}{a}+y_1^2=1$이므로 $\dfrac{x_1^2}{a}+\dfrac{x_1^2}{a^2}=1$,

$x_1^2=\dfrac{a^2}{a+1}$

$\therefore\ x_1=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}},\ y_1=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$

(2) $2x_1=y_1$일 때 이므로 $\dfrac{x_1}{a}=y_1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$

$2x^2+y^2=1$



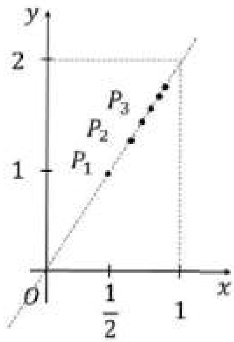
(3) 초점을 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$라 하면 $c^2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{F'Q}=0$을 만족할 때는 Q가 단축의 꼭짓점일 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 때

$\therefore\ Q\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 또는 $Q\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

18번 문항 해설

(1) $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $x=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, $y=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$이므로 $\mathrm{P}(1, 2)$

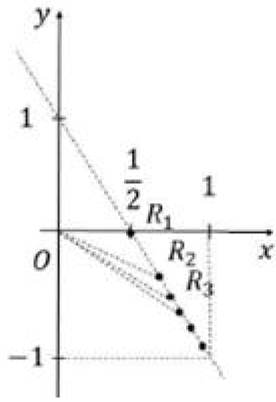


(2) $\mathrm{P_n}(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$이라 하면 $x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}=2$$

(3) $\mathrm{Q}(x, y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2-2x, 2-2y)$이므로

$\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=1$는 $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$



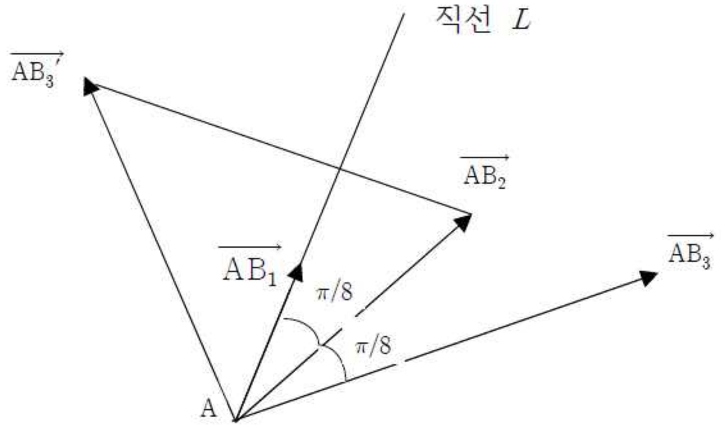
(4) $\mathrm{R_n}$은 오른쪽 그림과 같다. 따라서 R_1, R_2일 때 cos값이 최솟값

$$\mathrm{R_1}\left(\frac{1}{2}, 0\right), \ \mathrm{R_2}\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR_2}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OR_2}}\right|}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

19번 문항 해설

점 A를 지나고 벡터 $\overrightarrow{AB_1}$에 평행인 직선을 L이라 하고, 벡터 $\overrightarrow{AB_3}$ 를 직선 L에 대하여 대칭 이동한 벡터를 $\overrightarrow{AB_3}'$이라 하면 $(|\overrightarrow{AB_2}-t\overrightarrow{AB_1}|+|\overrightarrow{AB_3}-t\overrightarrow{AB_1}|)^2$의 최솟값은 $|\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AB_3}'|^2$이다.



두 벡터 $\overrightarrow{AB_1}$와 $\overrightarrow{AB_2}$ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{8}$, 두 벡터 $\overrightarrow{AB_2}$와 $\overrightarrow{AB_3}$ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{8}$이다. 이때

$$|\overrightarrow{AB_2}|=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{AB_3}|=|\overrightarrow{AB_3}'|=2\sin\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{8}$$

이고, 반각공식으로부터

$$(\sin\frac{\pi}{8})^2=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad (\cos\frac{\pi}{8})^2=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

를 얻는다. 따라서

$$|\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AB_3}'|^2 = |\overrightarrow{AB_2}|^2+|\overrightarrow{AB_3}'|^2-2|\overrightarrow{AB_2}||\overrightarrow{AB_3}'|\cos\frac{3\pi}{8}$$

$$=2+(2+\sqrt{2})-2(\sqrt{2})(2\sin\frac{3\pi}{8})\cos\frac{3\pi}{8}$$

$$=2+(2+\sqrt{2})-2\sqrt{2}(\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=2+\sqrt{2}$$

이다.

20번 문항 해설

[1] $\left|\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_2N}\right|$의 최솟값 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$은 $\left|\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_2N}\right|^2$의 값이 최소일 때 구할 수 있다. 따라서 다음의 식에 따라

$$\left|\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_2N}\right|^2=\left|\overrightarrow{O_1M}\right|^2+2\left(\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_2N}\right)+\left|\overrightarrow{O_2M}\right|^2=\frac{4}{3}$$

두 벡터의 내적 $\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_2N}$의 최솟값이 $-\dfrac{1}{3}$이 되도록 하는 점 M과 점 N의 위치를 찾도록 한다. $\overrightarrow{O_2N}$을 점 O_1이 시점이 되도록 평행이동한 벡터를 $\overrightarrow{O_1N'}$이 이라고 하면 $\overrightarrow{O_2N}=\overrightarrow{O_1N'}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{O_1M}$과 $\overrightarrow{O_1N'}$이 이루는 각을 θ라 할 때, 다음의 식을 얻을 수 있으므로

$\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_2N}=\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_1N'}=\left|\overrightarrow{O_1M}\right|\left|\overrightarrow{O_1N'}\right|\cos\theta=\cos\theta$

$\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_2N}$의 최솟값 $-\dfrac{1}{3}$은 $\cos\theta$가 최소일 때 구할 수 있다. 이는 θ가 최대일 때이므로, 점 M이 점 P와 일치하고, 점 N′이 점 A와 일치할 때, (즉, 점 N이 점 Q와 일치할 때) 얻을 수 있다. 따라서 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_1A}$가 이루는 각이 θ가 되고 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$을 만족한다.

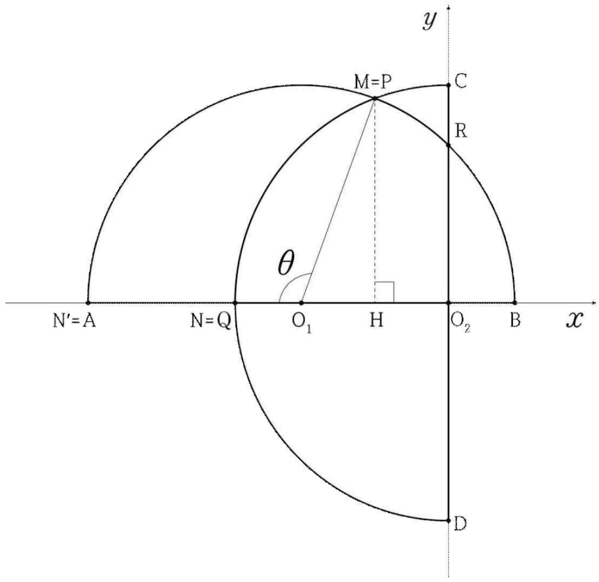
이때, 점 P로부터 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle PO_1H=\pi-\theta$이므로 선분 O_1H의 길이는

$\overline{O_1H}=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1H}+\overline{HO_2}=\dfrac{2}{3}$

[2]

아래 그림과 같이 선분 AB를 x축, 선분 CD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O_2는 원점이다.



[1]에 의해 직각삼각형 O_1O_2R에서 $O_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $O_2(0, 0)$ 이고, 선분 O_2R의 길이는

$$\overline{O_2R} = \sqrt{1-\overline{O_1O_2}^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

이므로 $R\left(0, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$이다.

또한 (1)에서 점 M은 점 P와 일치하고, $\overline{O_1H} = \overline{HO_2} = \frac{1}{3}$이므로 $H\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$이다. 선분 MH의 길이는

$$\overline{MH} = \sin(\pi-\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\pi-\theta)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로 $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이다.

따라서 $\overline{MR}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{14}{9} - \frac{4\sqrt{10}}{9}$

21번 문항 해설

정답 : $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{2+t^2}{2(1+t+t^2)}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-x,\ -y)\bullet(1-x,\ -y)=-1+x^2+y^2$$

을 얻은 후, (가)의 타원 방정식을 대입하여

$$\frac{2+t^2}{2(1+t+t^2)}=-1+(2-2y^2)+y^2=1-y^2 \Rightarrow \{y(t)^2\}=\frac{2t+t^2}{2(1+t+t^2)}$$

를 구한다. 이때, 삼각형 PAB의 넓이는 $y(t)$이므로 $\{y(t)\}^2$의 최댓값을 구하면 된다. $\{y(t)\}^2$의 최댓값을 구하기 위하여 $\{y(t)\}^2$의 미분을 계산하면 $\{y(t)^2\}'=\dfrac{2+2t-t^2}{2(1+t+t^2)^2}$이므로, $t=1+\sqrt{3}$일 때

$\{y(t)\}^2$의 최댓값 $\{y(1+\sqrt{3})\}^2=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$을 가진다는 것을 알 수 있다.

22번 문항 해설

정답 : $\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자. 조건 (가)에서 $(a-2)^2+b^2=1$이 나온다. 조건 (나)에서 $x+y=\frac{b-2}{b}$와 $a(x+y)-x-3y=a$가 나오고 정리하면 $x+y=\frac{b-2}{b}$와 $x+3y=-\frac{2a}{b}$이다.

따라서 $\frac{x+y}{x+3y}=\frac{2-b}{2a}$이다. $\frac{2-b}{2a}=k$로 놓으면 $b=-2ka+2$이고 이것은 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기 $-2k$인 직선의 방정식이다. k가 최대, 최소가 되는 것은 원 $(a-2)^2+b^2=1$에 접할 때이다.

$(2,\ 0)$에서 직선에 이르는 거리는 $\frac{|4k-2|}{\sqrt{4k^2+1}}=1$이고 정리하면 $12k^2-16k+3=0$이다.

$M=\frac{4+\sqrt{7}}{6},\ m=\frac{4-\sqrt{7}}{6}$ 근과 계수의 관계에 의하여

$mM^2+Mm^2=mM(m+M)=\frac{3}{12}\times\frac{16}{12}=\frac{1}{3}$이다. (참고로

$M=\frac{4+\sqrt{7}}{6},\ m=\frac{4-\sqrt{7}}{6}$이다.)

[별해]

$\frac{x+y}{x+3y}=\frac{2-b}{2a}$에서 $(a-2)^2+b^2=1$을 고려하여 $a=2+\cos\theta,\ b=\sin\theta$을 대입한다.

$\frac{x+y}{x+3y}=\frac{2-\sin\theta}{4+2\cos\theta}$이 되고 우변을 θ에 대하여 미분하여 극대, 극소를 구하면

$M=\frac{4+\sqrt{7}}{6},\ m=\frac{4-\sqrt{7}}{6}$이고 $mM(m+M)=\frac{1}{3}$이 된다.

23번 문항 해설

정답 : (1) 0 (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\left(\sqrt{29},\ 0\right)$

(1) $\mathrm{P}(t,\ s)$에서 타원 E_1에 그은 접선의 방정식은 $\dfrac{tx}{9}+\dfrac{sy}{25}=1$이고 점 $\mathrm{Q}(t,\ s')$이라 하면 점 Q에서 타원 E_2에서 그은 접선의 방정식은 $\dfrac{tx}{9}+\dfrac{s'y}{4}=1$이므로 두 접선의 교점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{t},\ 0\right)$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(0,\ -s)$, $\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\left(t-\dfrac{9}{t},\ 0\right)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}=0$이다.

(2) (1)번의 결과에로부터 선분 RH는 두 선분 PQ, QH과 수직이므로

삼각형 PQR의 넓이 $S_1=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RH}}$이고 삼각형 QRH의 넓이 $S_2=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{\mathrm{RH}}$이다.

따라서 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RH}}}{\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{\mathrm{RH}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\dfrac{s-s'}{s'}=\dfrac{\sqrt{25-\dfrac{25}{9}t^2}}{\sqrt{4-\dfrac{4}{9}t^2}}-1=\dfrac{\dfrac{5}{3}\sqrt{9-t^2}}{\dfrac{2}{3}\sqrt{9-t^2}}-1=\dfrac{3}{2}$

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{QRH}=\theta$라 하면 $S_1=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{RP}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin\theta$, $S_2=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RH}}\times\sin\theta$이다.

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}\,\overline{\mathrm{QR}}\sin\theta}{\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QR}}\,\overline{\mathrm{HR}}\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$이다.

$2\overline{\mathrm{PR}}=3\overline{\mathrm{HR}}$이고, $4\overline{\mathrm{PR}}^2=9\overline{\mathrm{HR}}^2$이다.

점 $\mathrm{P}(t,\ s)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{9}{t},\ 0\right)$, $\mathrm{H}(t,\ 0)$에 대하여 식으로 나타내면

(1) $4\left\{\left(\dfrac{9}{t}-t\right)^2+s^2\right\}=9\left(\dfrac{9}{t}-t\right)^2$이다.

점 $\mathrm{P}(t,\ s)$가 타원 E_1 위의 점이므로 $s^2=25-\dfrac{25}{9}t^2$이고, (1)에 대입하면

$5\left(\dfrac{9}{t}-t\right)^2=4\left(25-\dfrac{25}{9}t^2\right)$이므로 $0<t<3$ 범위에서는 $t=\dfrac{9}{\sqrt{29}}$이다.

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\sqrt{29},\ 0\right)$이다.

24번 문항 해설

정답 : (1) $\left(\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2}$ (3) $4p$

(1) 삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 경우는 점 Q에서의 접선의 기울기가 선분 AB의 기울기와 같은 경우이다.

$x_1 \neq x_2$인 경우에, 선분 AB의 기울기는 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}$이다. 따라서 $\left(mx+\dfrac{p}{m}\right)^2=4px$, $\left(mx-\dfrac{p}{m}\right)^2=0$, $x=\dfrac{p}{m^2}$, $y=\dfrac{2p}{m}$이다.

한편, ${y_1}^2=4px_1$, ${y_2}^2=4px_2$이므로 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4p}{y_1+y_2}$이다.

그러므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

$x_1=x_2$인 경우에, $y_2=-y_1$이다. 이 선분 AB는 y축과 평행하며, 점 Q의 좌표는 원점이 된다.

그러므로 $x_1=x_2$인 경우에도, 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, 점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에서의 접선의 방정식은 각각

$l: y_1y=2p(x+x_1)$, $m: y_2y=2p(x+x_2)$이다.

두 직선의 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 두면, $\dfrac{y_1y-2px_1}{2p}=\dfrac{y_2y-2px_2}{2p}$이므로

$y=2p\times\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\dfrac{y_1+y_2}{2}$이다.

이 값을 직선 l에 대입하여 정리하면 $x=\dfrac{y_1y_2}{4p}$이다.

따라서 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{y_1y_2}{4p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

점 P에서 y축에 수직으로 그은 직선이 선분 AB와 만나는 점이 S이므로 점 S의 y좌표는

$\dfrac{y_1+y_2}{2}$이며,

이것은 점 S가 선분 AB의 중점임을 뜻한다.

그리고 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{y_1}^2+{y_2}^2}{4p}=\dfrac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p}$이므로 $\mathrm{S}\left(\dfrac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

또한 [기하-1]의 결과에 의하여 점 Q와 점 R는 일치한다. 따라서

$\mathrm{R}\left(\dfrac{({y_1}^2+{y_2}^2)^2}{16p},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

$2\times\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16p}=\dfrac{y_1y_2}{4p}+\dfrac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8p}$이므로 점 R은 선분 PS의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2}$이다.

(3) 점 $\mathrm{C}(x,\ y)$라 두자. $\mathrm{T}(t,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{TC}}=\sqrt{(x-t)^2+y^2}=\sqrt{(x-t)^2+4px}=\sqrt{\{x-(t-2p)\}^2+4p(t-p)}$

$x=t-2p$에서 최솟값 $\sqrt{4p(t-p)}$를 가진다. 따라서, $S_1(t)=4p(t-p)\pi$이다.

점 $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$라 두면 $x_3=t-2p$이다.

점 C에서의 접선의 방정식은 $y_3y=2p(x+x_3)$이므로 점 E의 x좌표는

$x=-x_3=2p-t$이다.

따라서 선분 ET의 길이는 $2t-2p$가 지름의 길이이므로 $S_2(t)=(t-p)^2\pi$이다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t\times S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{4pt(t-p)\pi}{(t-p)^2\pi}=4p$이다.

25번 문항 해설

정답 : $m=\frac{4}{9}$, $n=\frac{1}{3}$

$\triangle$CDM에서 점 E는 $\overline{DM}$ 위에 있으므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CD}+(1-t)\overrightarrow{CM}\ \ (0\le t\le 1)$$

한편, $\triangle$BCN에서는 점 E가 $\overline{BN}$ 위에 있으므로

$$\overrightarrow{CE}=s\overrightarrow{CN}+(1-s)\overrightarrow{CB}\ \ (0\le s\le 1)$$

이다. 점 M은 $\overline{BC}$의 삼등분 점 중 점 B에 가장 가까운 점이므로 $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$이고,

점 N은 $\overline{CD}$를 $3:2$내분한 점이므로 $\overrightarrow{CN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$이다. 즉,

$$\overrightarrow{CE}=t\,\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{CB}=\frac{3}{5}s\,\overrightarrow{CD}+(1-s)\overrightarrow{CB}$$

이다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$가 서로 평행하지 않으므로 s, t는

$$t=\frac{3}{5}s\ \Rightarrow\ 3s-5t=0$$

$$\frac{2}{3}(1-t)=1-s\ \Rightarrow\ 3s-2t=1$$

를 만족하고, 이를 연립해서 풀면 $s=\frac{5}{9}$, $t=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 즉, $m=\frac{4}{9}$, $n=\frac{1}{3}$이다.

26번 문항 해설

정답 : (1) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $-\frac{17}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$ (3) 해설참조

(1) 제시문 (가)의 곡선은

$$x(t)=2\sin t,\ y(t)=3\cos(2t)=3(1-2\sin^2 t)=3\left\{1-\frac{x(t)^2}{2}\right\}$$

이다. 즉 $y=3\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ $(-2\le x\le 2)$이다.

이 곡선이 점 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$에서 x축과 만나므로, $F(\sqrt{2},\ 0)$, $F'(-\sqrt{2},\ 0)$으로 놓을 수 있다. 그리고 $P(0,\ 3)$, $Q(0,\ -3)$이다. 그러므로 두 초점이 F, F'이고 선분 PQ가 단축인 타원의 장축의 길이는 $2\sqrt{3^2+2}=2\sqrt{11}$이다. 이로부터 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{9}=1$$

(2) $A=1$, $B=3$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$일 때, 제시문 (가)의 곡선이 x축과 만나는 점 R의 좌표를 계산하자.

$$y(t)=3\cos(2t+\theta)=0$$

그런데 $\frac{3\pi}{4}<2t+\theta<\frac{7\pi}{4}$이므로 $2t+\theta=\frac{3\pi}{2}$, 즉, $t=\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$가 되고 이로부터 $x(t)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$를 얻는다. 따라서 R의 좌표는 $\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right),\ 0\right)$이다.

제시문 (가)의 곡선이 y축과 만나는 점 S의 좌표를 계산하자.

$$x(t)=\sin t=0$$

그런데 $0\le t\le\frac{3\pi}{8}$이므로 $t=0$이고 $y(0)=3\cos\theta$이다. 따라서 S의 좌표는 $(0,\ 3\cos\theta)$이다.

이제, y좌표가 최소가 되는 점 T를 찾자. $\cos(2t+\theta)=-1$일 때 y좌표가 최소가 되므로, $2t+\theta=\pi$,

즉 $t=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$를 얻는다. 따라서 T의 좌표는 $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right),\ -3\right)=\left(\cos\frac{\theta}{2},\ -3\right)$이다.

점 U는 점 T를 y축에 대하여 대칭이동하여 얻어지므로 U의 좌표는 $\left(-\cos\frac{\theta}{2},\ -3\right)$이다.

그러므로

$$f(\theta)=\overrightarrow{RU}\cdot\overrightarrow{ST}=\left(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right),\ -3\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2},\ -3-3\cos\theta\right)$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)+9+9\cos\theta$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하면

$$f'(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)-9\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)-9\sin\theta=-\frac{17}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)$$

θ에 $\frac{5\pi}{6}$를 넣으면 $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{17}{2}\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}$

그런데 $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$이고

$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 이므로

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{17}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

(3) $x(t)^2+2y(t)^2=\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로 제시문 (나)의 곡선은 타원 $x^2+2y^2=1$이다.

기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$라 하면, 교점의 x좌표는 $x^2+2(mx+n)^2=1$을 만족한다. 중근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4}=(2mn)^2-(1+2m^2)(2n^2-1)=0$$

$$\Rightarrow\ 2n^2=2m^2+1\ \Rightarrow\ n=\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$$

따라서 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$ 이다.

기울기가 m인 접선이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지날 때 $(a\neq\pm1)$

$$b=ma\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ (b-ma)^2=m^2+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ (a^2-1)m^2-2abm+b^2-\frac{1}{2}=0 \qquad \cdots ①$$

식 ①의 두 근을 m_1, m_2라 하면, 두 직선이 서로 수직으로 만날 조건에 의해

$m_1m_2=\dfrac{b^2-\frac{1}{2}}{a^2-1}=-1$이다. 따라서 $a^2+b^2=\frac{3}{2}$을 만족한다. 한편 $a=\pm1$일 때, 즉 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$의 좌표가

$\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$일 때도 모두 타원에 그은 접선은 수직이고, $a^2+b^2=\frac{3}{2}$을 만족하므로 점 P의 자취는 중점이 원점 $(0,\ 0)$이고 반지름이 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 인 원이다.

27번 문항 해설

정답 : (1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{\sqrt{55}}{112}$

주어진 식 $k\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=\overrightarrow{\mathrm{O'B}}+3\overrightarrow{\mathrm{O'C}}$는 다음과 같이 쓸 수 있고,

$$k\left(\overrightarrow{\mathrm{O'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{O'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+3\left(\overrightarrow{\mathrm{O'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

위의 식에 $\overrightarrow{\mathrm{O'O}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{k}{2}+2\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots \text{(가)}$$

(1) 식 (가)의 양변을 제곱하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4}(k+4)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+6\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+9\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{24}(k+4)^2-\dfrac{5}{3}$이고, $-3\le k\le 3$의 범위에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$의 최댓값은

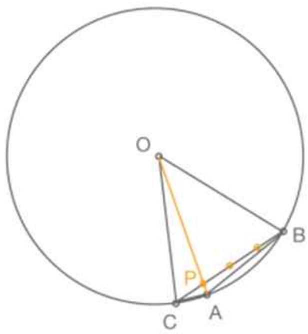
$k=3$일 때 $\dfrac{49}{24}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{3}{8}$이다.

(2) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각을 θ라 하자. 다음의 식

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\theta$$

에 위에서 구한 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$의 최댓값 $\dfrac{3}{8}$을 대입하면

$$\cos\theta=\frac{3}{8},\ \ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$



따라서 삼각형 OBC의 넓이는 $\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\sin\theta=\dfrac{\sqrt{55}}{16}$이다.

위에서 구한 $k=3$을 식 (가)에 대입하면

$$\frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \left(\text{즉, } \frac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

이므로, 선분 CB 위의 한 점 P를 $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=1:3$을 만족하도록 찾을 수 있다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$이기 때문에 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$임을 알 수 있다. 따라서

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\dfrac{1}{7}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$이고,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{7}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{\sqrt{55}}{112}$$

28번 문항 해설

정답 : $\dfrac{\sqrt{541}}{4}$

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DA}}\cos\angle\mathrm{DAB}=5\times\dfrac{3}{5}=3,\ \overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{DA}}\sin\angle\mathrm{DAB}=5\times\dfrac{4}{5}=4$

$4=\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CH'}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin(\pi-\angle\mathrm{BCD})=\overline{\mathrm{BC}}\sin\angle\mathrm{BCD}=\overline{\mathrm{BC}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 즉, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{H'B}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos(\pi-\angle\mathrm{BCD})=-2\sqrt{5}\cos\angle\mathrm{BCD}=2\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=2$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{H'B}}=3+1+2=6$

점 A가 원점, 선분 AB가 x축에 놓여있다고 하면, 점 A의 좌표는 $(0,\ 0)$, 점 B의 좌표는 $(6,\ 0)$,

점 C의 좌표는 $(4,\ 4)$, 점 D의 좌표는 $(3,\ 4)$이다. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면,

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right)=\dfrac{67}{8}$ 로부터

$((x,\ y)+(x-4,\ y-4))\cdot(2(x-6,\ y)+(x-3,\ y-4))=(2x-4,\ 2y-4)\cdot(3x-15,\ 3y-4)$

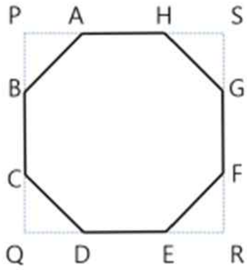
$=(2x-4)(3x-15)+(2y-4)(3y-4)=\dfrac{67}{8}$

즉, $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{541}{144}$이다.

따라서 점 P는 중심이 점 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{5}{3}\right)$이고 반지름이 $\dfrac{\sqrt{541}}{12}$인 원 위에 있다.

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{AQ}}+\dfrac{\sqrt{541}}{12}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}+\dfrac{\sqrt{541}}{12}=\dfrac{\sqrt{541}}{6}+\dfrac{\sqrt{541}}{12}=\dfrac{\sqrt{541}}{4}$

28번 문항 해설



정답 : $\dfrac{8(3\sqrt{2}-1)}{17}$

정팔각형의 한 변의 길이를 d라 하고, 정팔각형을 포함하는 정사각형 PQRS를 아래의 그림과 같이 잡으면, 정팔각형의 넓이는 정사각형의 넓이에서 네 개의 직각이등변삼각형의 넓이를 빼면 되므로 $2(1+\sqrt{2})d^2$이다.

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$라 하면,

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{b}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{a}-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{b}$이다. $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$이므로

$$4=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2=\left|-\vec{a}+(2+\sqrt{2})\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|+(2+\sqrt{2})^2\left|\vec{b}\right|^2=(7+4\sqrt{2})d^2$$

따라서 정팔각형의 넓이 A는

$$A=2(1+\sqrt{2})\cdot\frac{4}{7+4\sqrt{2}}=\frac{8(3\sqrt{2}-1)}{17}$$

29번 문항 해설

[1]

두 반직선 l_1 과 l_2가 점 $P(1,4)$에서 만나 생성한 반직선 l 위의 점 R 은 방정식
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{v}$ $(t \ge 0)$을 만족시킨다. $\overrightarrow{v} = (c, d)$에 대하여 $\overrightarrow{w} = (-d, c)$라 하자.
반직선 l위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{v}$ 이고 $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$이므로 점 R은
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$을 만족시킨다. 즉, 모든 양의 실수 a에 대하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$이면 반직선 l은 점 A 를 지나지 않는다.
조건 (가)에 의하여 $\overrightarrow{v} = (-a, -1)$ 또는 $\overrightarrow{v} = (-1, -a)$이다.
(i) $\overrightarrow{v} = (-a, -1)$인 경우
$c = -a$, $d = -1$이므로 $\overrightarrow{w} = (1, -a)$이다.
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} = (1, -a) \cdot (1, -2) = 1 + 2a > 0$
(ii) $\overrightarrow{v} = (-1, -a)$인 경우
$c = -1$, $d = -a$이므로 $\overrightarrow{w} = (a, -1)$이다.
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} = (a, -1) \cdot (1, -2) = a + 2 > 0$
(i), (ii) 에 의하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$이다.
따라서 문제의 조건을 만족시키는 양의 실수 a가 존재하지 않는다.

[2]

(1) 풀이의 반직선 l을 l_i로 대체하여 같은 계산을 해 보면 똑같이 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{P_iA} > 0$이 성립함을 확인할 수 있다. (이 값은 $i = 1, 2, 3, 4$ 일 때 각각 $2, 1, 1, 1$이다.) 시작점이 아닌 교점 P를 갖는 두 반직선 l_i, l_j에 대하여 4-1의 풀이에서처럼 확인해보면 두 반직선 l_i, l_j가 생성한 모든 반직선은 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$을 만족한다. 이와 같이 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4 및 이들로부터 생성된 모든 반직선 중 교점을 갖는 임의의 서로 다른 두 반직선을 각각 m_1, m_2라 하고, 두 반직선 m_1, m_2를 나타내는 방정식을 각각
$\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OR_1} + t\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OR_2} + t\overrightarrow{u_2}$ $(t \ge 0)$이라 하자.
여기서 두 반직선 m_1, m_2가 P에서 만나 생성한 반직선 m을 나타내는 방정식을
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{v}$라고 하자. 이때 $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ 또는 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2}$이다. $\overrightarrow{u} = (c, d)$라고 하면
$\overrightarrow{w} = (-d, c)$에 대하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$을 보일 경우 A 가 이 반직선 위에 있지 않음을 확인할 수 있다.
$u_1 = (c_1, d_1)$, $u_2 = (c_2, d_2)$에 대하여 $w_1 = (-d_1, c_1)$, $w_2 = (-d_2, c_2)$이고 4-1의 풀이에서와 마찬가지로 $\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{R_1P} > 0$, $\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{R_2P} > 0 \cdots\cdots$ ㉠
이다.
또한 두 반직선 m_1, m_2의 교점 P 에 대하여
$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{R_1P} = 0$, $\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{R_2P} = 0 \cdots$ $\cdots$ ㉡

이다.

㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{w_1} \bullet \overrightarrow{PA} > 0,\ \overrightarrow{w_2} \bullet \overrightarrow{PA} > 0 \cdots \cdots$ ㉢

이다.

(i) $\vec{v} = \overrightarrow{av_1} + \overrightarrow{v_2}$ 인 경우

$\overrightarrow{au_1} + \overrightarrow{u_2} = (ac_1 + c_2,\ ad_1 + d_2)$이므로 $\vec{w} = (-ad_1 - d_2,\ ac_1 + c_2)$가 되고,

$\vec{w} = \overrightarrow{aw_1} + \overrightarrow{w_2}$

$a > 0$이므로 ㉢에 의하여

$\vec{w} \bullet \overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{aw_1} + \overrightarrow{w_2}) \bullet \overrightarrow{PA}$

$= \overrightarrow{aw_1} \bullet \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{w_2} \bullet \overrightarrow{PA} > 0$

(ii) $\vec{v} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{au_2}$ 인 경우

(i)과 마찬가지로 $\vec{w} \bullet \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{w_1} \bullet \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{aw_2} \bullet \overrightarrow{PA} > 0$

(i), (ii) 에 의하여 $\vec{w} \bullet \overrightarrow{PA} > 0$이므로 A가 이 반직선 위에 있지 않다.

이를 반복해서 적용하면 새로 생성된 모든 반직선은 점 A를 지날 수 없음을 알 수 있다.

30번 문항 해설

$y = x^4 - 2x^2 + 1$과 $y = -x^2 + x + 2$를 연립하면
$x^4 - x^2 - x - 1 = (x+1)(x^3 - x^2 - 1) = 0$이므로 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다. 또한

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

라 두면 $f'(x) = 3x^2 - 2x$이다. 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 -1을 가지므로 $f(x) = 0$은 단 하나의 실근을 가진다. 그 실근을 a라 하면 점 Q의 좌표는 $(a, -a^2 + a + 2)$이다. $y = x^4 - 2x^2 + 1$과 $y = -x^2 + x + 2$의 그래프로부터 a의 범위는 $1 < a < 2$이다.

한편, 주어진 내적은

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = (a+1, -a^2 + a + 2) \cdot (1, -1) = a^2 - 1$$

이다. 따라서 $0 < \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} < 3$이고 구하는 정수 k는 $0,\ 1,\ 2$ 중 하나이다. $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3 = \sqrt{8} - \sqrt{9} < 0$이고 $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 4 = \sqrt{27} - \sqrt{16} > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$이다. 따라서 $1 \le \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} < 2$이고 $k = 1$이다.