



Build UP Point - 전개란 무엇인가

전개는 일어날 수 있는 모든 경우를 나열한 것이다.

이는 사실 확률과통계 과목에서 이항정리파트와 파스칼의 삼각형의 구조를 이해하는것과 동일한 아이디어를 이용한다. 애초에 이것들이 특정위치 특정영역의 계수를 찾는 방법이기 때문이다.

우리가 차수가 엄청 큰 n차 방정식을 설계한다고 가정해보자

(이걸 굳이 왜 하나고 하면 곤란하다 그냥 해보고 싶다고 생각하자 우주의 신비를 풀기위해서는 미지의 식을 설계 한 후 이 답을 찾는 것으로 의식의 흐름이 흘러가야 비밀이 풀린다.

하지만 걱정말자 99%의 인간은 자신의 인생에서 식을 설계하여 눈 앞에 닥친 문제를 해결해야하는 업무를 배정받지 않기 때문에 기초상식의 수준인 4차함수를 다루는 것 까지만 배우고 졸업을 한다. 세상을 움직이는 1%의 인간들만이 이를 이용하여 세상을 설계하고 신기술을 개발하고 새로운 세계를 창조하노니)

그룹화 된 n차식을 설정한 후 전개를 하여 식을 완성한다면 $(x+a)^n = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 등등 상수항까지 쪽 전개를 하게될텐데

전개를 하고 나면 결국 a,b,c등등 일일이 계수들의 정보를 찾아야지만 식이 완성 될 수 있다.

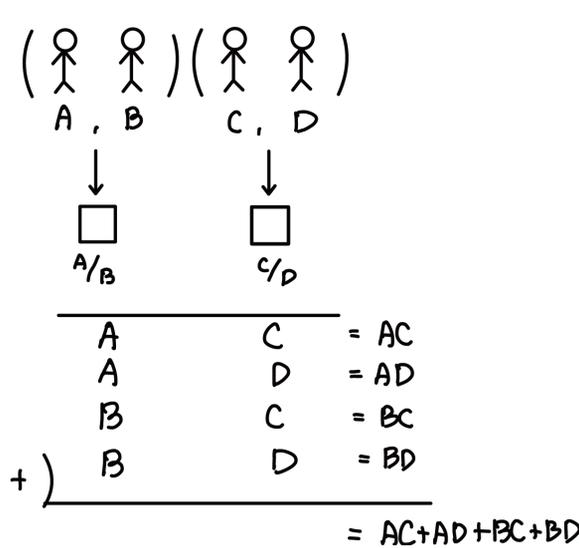
하지만 이걸 직접 구하기란 여간 귀찮은 일이 아니겠는가

그래서 곱셈공식이라는 일반화 된 패턴을 외우고 적용하는데에 많은 시간을 쓰지만

여기서부터 대수적인 식이 설계되는 과정을 이해하지 않고 곱셈공식을 적용하는데에만 집중하게 된다면 좋지않다.

애초에 변별력 있는 문제들은 곱셈공식을 얼마나 이쁘게 잘 적용하느냐가 시험문제의 의도라기보다는 '애야, 너는 식의 구조를 파악해서 내가 필요한 정보(여기서는 특정 항의 계수)만 추출하는 방법을 알고있니?'를 물어보는 영역이라는 것을 명심 하자.

$$(A+B)(C+D) \longrightarrow (A, B)(C, D)$$



$(A+B)(C+D)$ 를 전개하는 상황을 A,B,C,D 네 명의 친구가 두 팀으로 나누어 1:1 태그매치를 한다고 생각해보자

그렇다면 이들이 싸우는 경우의 수는 총 4가지이며 그 조합은 AC, AD, BC, BD로 이루어진다.

그렇다면 앞으로 모든 전개의 과정을 n개의 팀에서 m명의 사람이 태그매치를 한다고 생각해보면 어떨까?

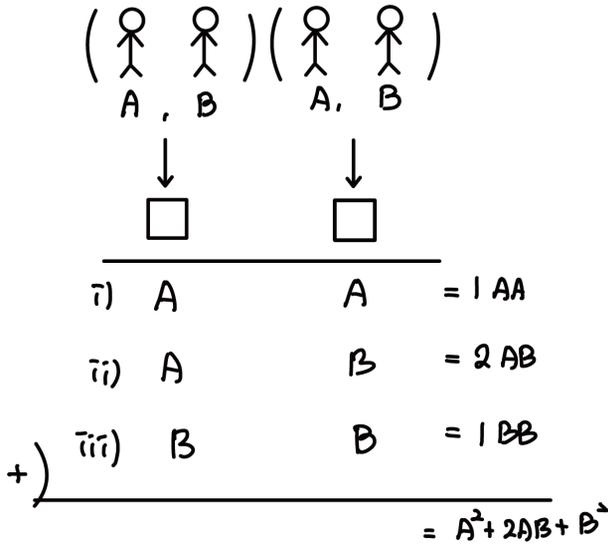
$$(x+y)^3 \rightarrow 2\text{명씩 } 3\text{개의 팀}$$

$$(x+y+z)^2 \rightarrow 3\text{명씩 } 2\text{개의 팀}$$

이렇게 말이다.



$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) \rightarrow (A/B)(A/B)$



‘계수는 가짓수를 의미한다.’

$2+2+2 = 2 \times 3$

이 식에서 곱하기의 의미는 2가 3개 있다는(혹은, 3이 2개 있다는)뜻으로 생각할 수 있다.

즉, $3A^2$ 이라는건 A^2 이라는 상황이 3가지 경우가 있다고 해석 할 수 있다는 것이다.

따라서, $(A+B)^2$ 를 전개한다는 것은 $(A/B)(A/B)$ 의 팀 구성으로

AA가 싸우는 경우 1가지

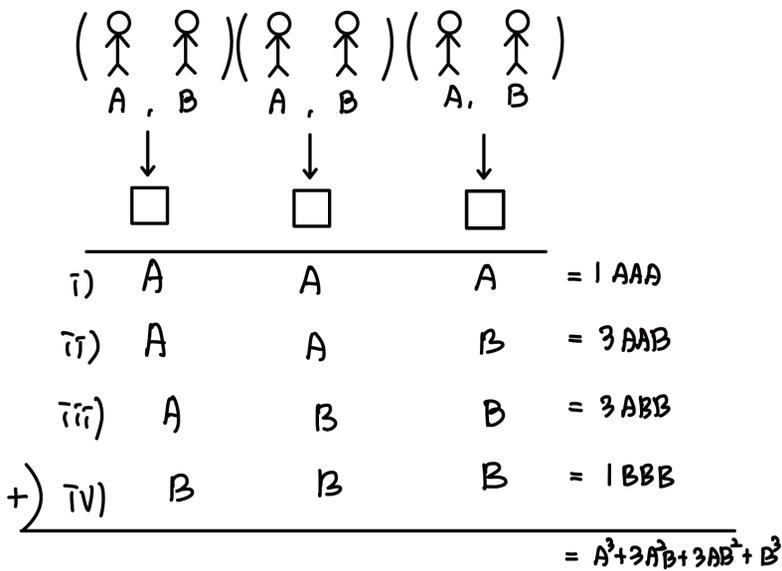
AB가 싸우는 경우 2가지(서로 팀내에서 자리를 바꿀 수 있으므로)

BB가 싸우는 경우 1가지가 모여서

$1AA + 2AB + 1BB$ 가 되고

결국, $A^2 + 2AB + B^2$ 라고 표현하게 된다.

$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B) \rightarrow (A/B)(A/B)(A/B)$



$(A+B)^3$ 은 $(A/B)(A/B)(A/B)$ 에서

각 팀별로 한 명씩 나와야 하기 때문에 AAA등 3항으로 표현이 되고 AAB는 3가지 경우 (B가 나올 수 있는 경우가 각 팀에서 한번씩 나올 수 있으므로 3가지이다.)가 나올수 있으므로

$1AAA + 3AAB + 3ABB + 1BBB$ 의 경우가 되어

$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ 으로 표현되게 된다.

더 나아가 표현의 통일성을 주어 다시 표현한다면

$A^3B^0 + 3A^2B^1 + 3A^1B^2 + A^0B^3$ 으로 표현해주는게 좋은데

A가 3번나오고 B가 0번 나오는 경우는 1가지

A가 2번나오고 B가 1번 나오는 경우는 3가지

A가 1번나오고 B가 2번 나오는 경우는 3가지

A가 0번나오고 B가 3번 나오는 경우는 1가지

라는 뜻을 명확히 알 수 있게 되기 때문이다.



$$(문자 + 숫자)^3 = (문자, 숫자)(문자, 숫자)(문자, 숫자)$$

i)	문자	문자	문자
ii)	문자	문자	숫자
iii)	문자	숫자	숫자
iv)	숫자	숫자	숫자

위의 상황을 일반화하여 정리해보자

n개의 그룹에서 문자와 숫자가 이루어진 식을 전개하다면

문자가 n개 있고 숫자가 0개 있는 상황부터

문자 n-1개 숫자 1개

문자 n-2개 숫자 2개

⋮

문자 0개 숫자 n개인 상황까지 펼쳐지게 되고

각 항의 계수는 그 상황이 일어나는 가짓수를 의미한다는 뜻이다.

$$(A + B + C)^2 = (A, B, C)(A, B, C)$$

	↓	↓	
i)	△	△	= 1 (AA, BB, CC)
ii)	△	○	= 2 (AB, BC, CA)

변수가 3개로 늘어나서 위와 같은 상황이 되지 않는다면 같은 종류인지와 같은 종류가 아닌지로 구분하여 전개하자

AA, BB, CC 등 같은 종류의 문자가 나오는 경우는 1가지

AB, BC, CA 등 서로 다른 종류의 문자가 나오는 경우는

2가지가 되어(서로 자리 바꿀 수 있으므로)

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA)$$

로 전개하게 된다.

$$(A + B + C)^3 = (A, B, C)(A, B, C)(A, B, C)$$

	↓	↓	↓	
i)	△	△	△	= 1 (AAA, BBB, CCC)
ii)	△	△	○	= 3 (AAB, BBC, CCA)
iii)	△	○	○	= 3 (ABB, BCC, CAA)
iv)	△	○	□	= 6 (ABC)

3변수 3차식의 전개는 서로 같은 종류부터 서로 다른 종류까지 총 4가지의 상황이 펼쳐지게 되고 역시 계수들이 각 항의 가짓수를 의미하게 되어 다음과 같다.

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3\{AB(A + B) + BC(B + C) + CA(C + A)\} + 6ABC$$

(매년마다 서로 다른 종류의 항의 계수(ABC)가 왜 6이냐고 물어보는 학생들이 100% 단 한해도 빠짐없이 있었는데, 우리는 중학교 2학년 2학기를 거쳐왔기 때문에 사람 3명을 나열하는 경우가 3×2×1이라는 것을 알고 있다.)

**1**

$x + y + z = 2, x^3 + y^3 + z^3 = 17$ 일 때, $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$ 의 값을 구하시오

2

세 실수 x, y, z 가 다음 조건을 만족시킨다

(가) $x, y, 2z$ 중 적어도 하나는 3이다.

(나) $3(x + y + 2z) = xy + 2yz + 2zx$

$10xyz$ 의 값을 구하시오.