가장 확실하게 한 등급 올리는 방법

안녕하세요, 수험생 여러분. TEAM 수리남입니다.

지난 회 **유형분류법** 칼럼에 이은 두 번째 공부법 칼럼입니다.

지난 칼럼은 **실용적인 방법론**에 대해 소개를 했다면,
이번 칼럼에서는 또 다른 실용적인 방법론과 **더불어**, 보다 **원론적인** 하지만 무엇보다 **공부에서 가장 중요한 이야기**를 해보고자 합니다.

제가 정말 아끼는 제자들에게는 상담 시에 항상 꺼내는 이야기이기도 한데, 공부 하나로 먹고 살아오고 또 공부 가르치는 일을 6년 이상 해온 입장으로 이것이 공부에서 가장 중요한 것이라고 단언할 수 있습니다.
다만 어떤 테크닉이나 신비로운 공부법도 아닙니다.

오늘 다룰 '이것'은 모두가 일상적으로 하고 있는 것이지만, 낮은 등급의 학생은 아주 빈약하거나 거의 하지 못하는 것이고, 반면 꾸준히 전과목에서 높은 등급을 유지하는 학생들이 탁월함을 보이는 지점입니다.

수학 안정 1등급과 나의 차이는 무엇일까?

한번 냉정하게 생각해보십시오.

문제를 **손도 못 댄 학생**이든, 문제를 **중간에 풀다 막혀서 답을 못 낸 학생**이든, 문제를 다 풀었는데 **계산 실수로 답을 틀렸던 학생**이든, 전부 **똑같습니다** - 총점에서 4점을 까였으니까요.
소름끼치게 무서운 얘기죠? **어떤 문제를 50%만 풀어낸 것은 0% 푼 것이나 전혀 다름없다는 뜻이니까요**.
어떤 이유건 관계없이, 틀리면 일단 똑같이 0점입니다.

그런데, 우리는 ***문제를 틀린 이유를 편식***합니다.
단순히 개념 부족인지, 생각의 과정이 꼬여서인지, 계산 실수를 했는지 여하에 관계없이 우리는 보통 여기서 첫 번째 - ***개념 부족이나 실전 훈련 부족의 요인만 관리하지, 나머지 요인은 잘 생각하지 않습니다***.
즉 **어떤 이유로 실수가 났는지**에 대해서는, '아 뇌에 버그났네' 하면서 대수롭지 않게 넘기거나,
또 내가 **진정한 개념에 대한 이해**로 나아갔는가에 대해 고민을 하지 않습니다.

여기서 진짜 잘하는 학생이 판가름납니다.

내가 문제를 틀린 진짜 이유를 파헤쳐 분석하는 능력,
바로 메타인지입니다.

화제가 되었던 <EBS 0.1%의 비밀>에서도 다루었듯 많은 연구에서 상위권 학생의 가장 결정적인 특질로 꼽은 것은 메타인지입니다.
그 차이는 결국에는 **사고 과정에 시스템을 도입할 수 있는 능력**입니다.
내가 문제 풀이 **사고 과정이 엇나가는 그 지점을 정확히 파악**하고, 그 부분을 **원천봉쇄하는 시스템을 만들어 내 사고과정 전체를 통제**한다는 것입니다.

세 명의 학생의 예시를 통해, 실제로 이 문제를 틀렸을 때 내 사고회로에서 문제였을 수 있는 가장 대표적인 지점을 보여드리겠습니다.

더불어, 그러한 지점을 발견하고 나서는 **어떻게 대처해야할지** 다루어보겠습니다.

바로 최근이니 모두가 풀어봤을 법한 문제로 시작해봅시다.

22. 최고차항의 계수가 4이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$$ 이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[2024년 5월 모의고사 22번]

문제의 상세해설은 이전 게시글 "[울의X연치, TEAM 수리남] 5월 모의고사 주요문항 상세해설[공통, 미적분]"을 참고하기 바랍니다.

지독한 오답률을 보였던 올해 5평 22번 문항입니다.

사실 이 칼럼에서 전체 등급대를 대상 독자로 했음에도 이렇게 가장 어려웠던 문제를 가져온 이유는, 모든 등급대 학생들이 각자만의 이유로 문제를 끝까지 해결하지 못했고 그럴만한 요소들이 가장 많았던 문제이기도 하기 때문입니다.

문제를 틀린 이유를 **가장 얕은 차원에서부터 가장 깊은 차원까지 세 가지**만 중점적으로 다루어볼 것인데, 각자 자신이 어디에 해당하는지, 그리고 앞으로 더 나아가 어떤 식으로 문제를 대하고 생각해야할지 진지한 고민을 해보기 바랍니다.

학생 1: "문제를 접근조차 하지 못했어요."

학생1은 문제를 접근조차 하지 못했습니다. $g(x)$의 개형이 어떻게 나올지 시험장에서 생각이 전혀 나지 않았습니다.

이는 **개념부족**의 문제입니다.

가장 얕은 층위의 문제이고, 본인이 어디가 부족한지 깨닫기 가장 직관적인 지점이기도 합니다.
$\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$라는 조건을 해석하는 것은 미분계수의 정의와 도함수에 대한 이해가 충분히 있고 도함수를 실전적으로 다루는 훈련이 기본적으로 되어있다면 원함수에 대한 유추까지는 갈 수 있었어야 합니다.

이런 학생의 경우 **도함수 단원의 문제들**을 더 많이 풀어보면서 도함수와 원함수의 관계에 대해 더 깊은 이해에 이를 때까지 **반복 훈련**을 해야 합니다.

학생 2: "실수해서 문제를 틀렸어요."

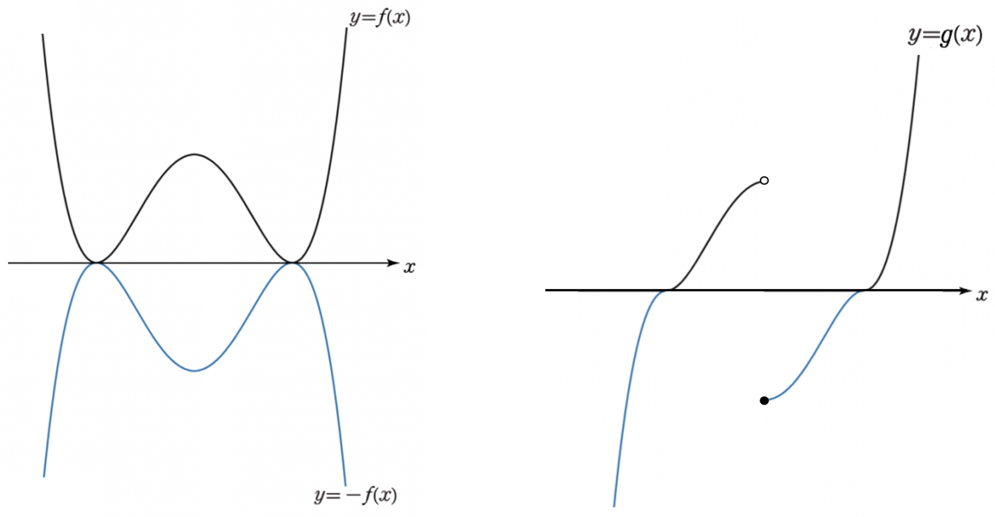
오늘 다루고 싶은 **가장 메인 테마**이고, **가장 많은 수의 학생이 여기에 해당**합니다.
실수를 해서 문제가 이상한 방향으로 꼬여 더 진행을 못 하고, 헤매며 시간만 허비하다가 다른 문제들까지 말아먹는 재난급 상황을 다들 한 번씩은 경험해봤을 겁니다.

그런데 이 때 ***최악의 반응은 '실수 담번엔 안 하면 되지' 하고 넘기는 것***입니다.
다음 최악은 ***'담엔 문제를 잘 읽자!'*** 라고 시험지 귀퉁이에 써놓고 넘어가는 것입니다.

서론에서 말했지만 당신이 실수해서 날린 4점이나, 다 찍고 자는 학생들이 날린 4점이나 수능 성적표에서는 똑같습니다.
그러니 관점을 바꾸어 **실수를 하나의 관리 대상으로 보아야** 합니다.
내가 왜 실수를 했는지, 나의 실수들이 어떤 패턴을 갖지는 않는지 **분석하고 메타인지적으로 성찰**해야한다는 것입니다.

실수의 유형은 여러 가지이고 개개인이 그것을 관리하는 방법도 개별화되어야 합니다.
이해를 돕기 위해 예시를 들어보겠습니다.

- 문제를 잘 안읽은 경우



이렇게 그렸다가 문제가 뜻대로 안 풀려서 때려친 학생들 있었나요?
그럼 문제를 잘 안 읽었었다는 걸 본인이 알 겁니다.

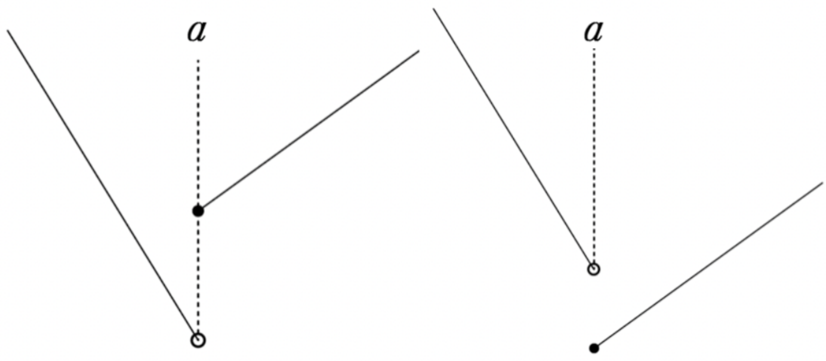
22. 최고차항의 계수가 4이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

'서로 다른 세 극값' 이부분을 대충 읽었든 못봤든 했겠죠?
이렇게 문제를 처음부터 잘못된 방향으로 가면 뭔가 조건 쓰이는 것도 이상하고 점점 미궁으로 빠져버립니다.

또 다른 예를 들어볼까요?

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x\geq a) \end{cases}$$

여기서 독자 중에서도 a 부등호 방향을 헷갈려서 그래프를 이렇게 그린 사람이 있을 겁니다.



장담컨대 독자 중 대부분은 반드시 이 유형의 실수를 다른 문제에서라도 해본 적이 있을 겁니다.

이렇게 확언할 수 있는 이유는, 실수는 카오스적인 성질 (비체계적 오류)도 있지만, **모든 학생들이 비슷하게 실수하는 패턴 (체계적 오류)들이 분명 존재**하기 때문입니다. 당신만 헷갈린게 아니라, 원래 수식 구조상 헷갈리기 쉬운 구조들에서는 **다들 한 번씩은 자빠진다**는 이야기입니다.

그러니 이런 패턴을 발견하고 치료하는 학생과, 그냥 ***비체계적 오류로 치부***하고 넘기는 학생은 실제 시험 점수로 차이가 납니다. 이제 이 부분을 왜 관리하라는지 감이 오시나요?

그럼 어떻게 실수를 관리할까요.
크게 두 가지로 나누어보겠습니다.

1) 체계적 오류 관리 – 나만의 시스템 만들기

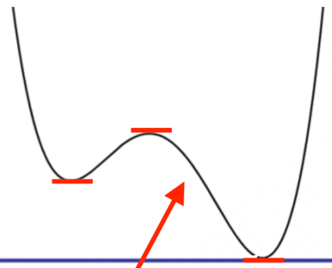
“문제 조건 꼼꼼히 읽자!”

..이런 글귀를 노트에다 써놓는게 실수 관리가 아닙니다.

메타인지를 해봅시다. 우리가 조건을 빼먹는 이유는 ***조건들이 줄글에 풀어헤쳐져 있기 때문***입니다.
그래서 빠르게 읽으려고 슥슥 훑다가 이를 놓쳐버리는 것이죠.

그러니 이를 관리하는 방법은 역으로 **줄글의 조건을 해체해 구성 요소들만 남기는 것**이죠.
그리고 이렇게 요소들을 분리할 때는 그 요소들 각각의 의미와, 각각이 어떻게 사용될지를 구체적으로 생각하면서 표시해야합니다.

이를테면 이런 식입니다.



$f(x) = 4x^4$...

22. 최고차항의 계수가 4이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

a에 따라 불연속점 개수나 x절편이 달라지겠군.
잘 나눠보자

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq 0$

$$|g(x)|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)| \text{이다.}$$

$g'(x+) = |f'(x)|$

g'(x+)는 양수, 연속 구간에서 증가함수겠군

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

f(x) ≥ 0 인 사차함수겠고,
불연속 함수 h(x)와 곱해서 연속이려면 g(x)는 구간에 따라 f(x), -f(x)를 오가는 불연속함수겠군.

$g(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

계산 도중 g(x)의 여러 경우중 뭔갈 쳐내는데 쓰이거나,
마지막 계산하는데 쓰이겠군

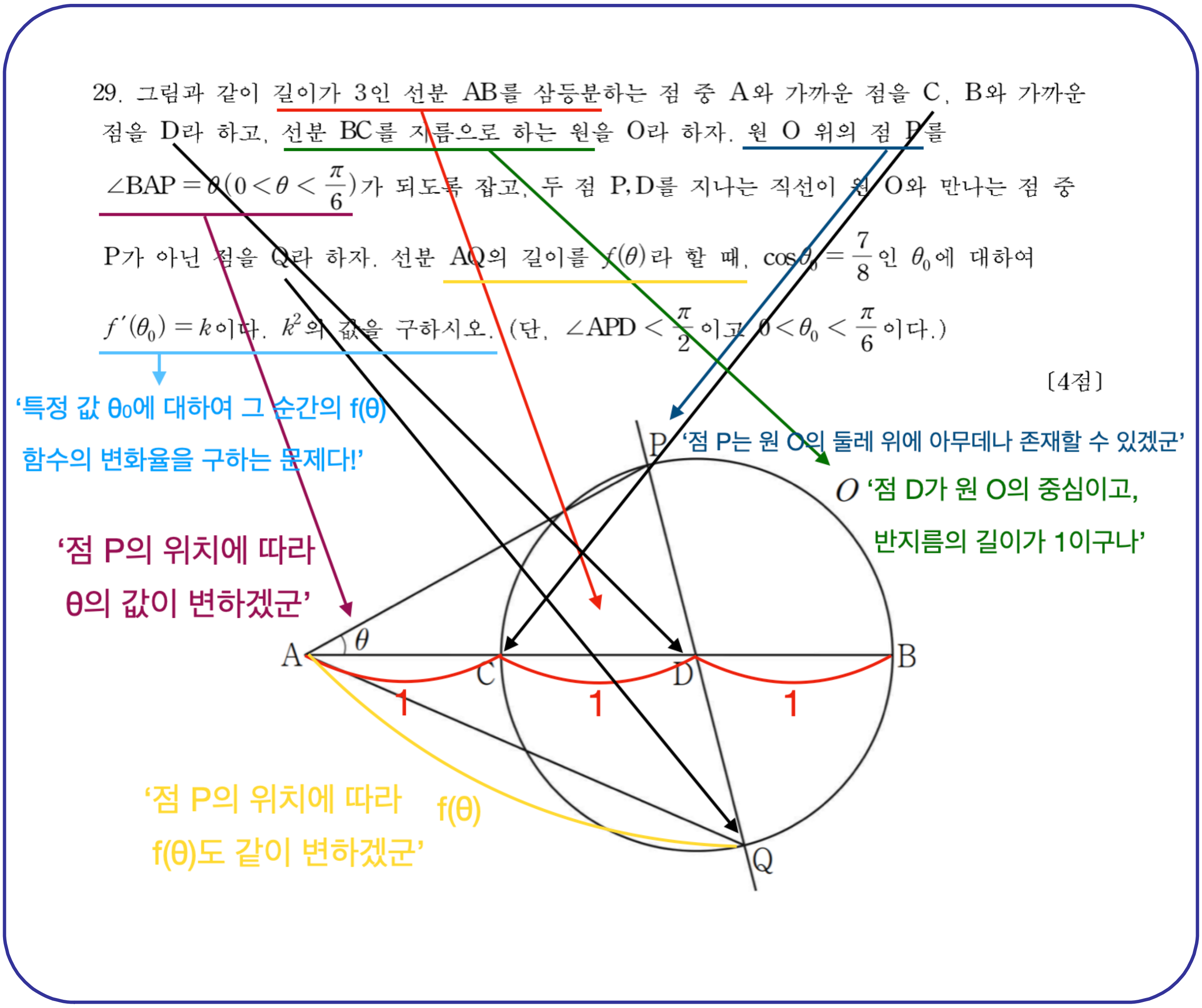
[2024년 5월 모의고사 22번]

중요 조건 밑줄, 파생 수식과 그래프 개형 등을 문제지 위에 표시하면서 하나하나 체크하는 습관을 추가하는겁니다.

또한, 그냥 적는 것이 아니라, 파생 수식이 있는 경우처럼 **의미를 더 유추하는 경우**,
글씨로 표시한 것처럼 **문제에서 어떻게 조건들이 활용될지, 또 조건의 의미가 무엇인지 분석하면서 읽어**보겠습니다.

이렇게 문제를 꼼꼼하게 씹어먹는 과정을 내 문제풀이 프로토콜에 추가하면, 다른 공을 들이지 않아도 문제 안의 조건을 놓치지 않을 수 있게 스스로를 무장하는 셈이 되는 것입니다.
이렇게 **실수가 생기는 지점을 원천 봉쇄하기 위한 시스템**을 구성해야하는 것입니다.

한 가지 더 예시로, 그림이 있는 경우도 이런식으로 표시와 문제를 읽으면서 따라올 생각들을 정리할 수 있겠습니다.


29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0) = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD} < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.)

[4점]

2) 나에게 자주 발생하는 체계적 오류 찾기

다음 소제목이 왜 비체계적 오류가 아니라 또 체계적 오류냐구요?

사실 비체계적 오류는 정의부터가 우리의 관리 대상이 아닙니다. 진짜 뭔짓을 해도 일어나는 천재지변, 정말 순간 머리에 빵꾸가 났나 싶은 실수들이 한 번씩 나오고 이는 막을 수 없습니다.

하지만, 그렇게 **카오스적으로 보이는 실수 중에서도 체계적 실수들이 있다**는 것입니다.
우리는 여기를 관리해야합니다.

실수의 다양한 패턴을 봅시다.

앞서 나온 예시처럼

$$h(x) = \begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

a 부등호 방향을 헷갈려서 그래프를 반대로 그리고 나서 헤맨다든지,

$$\lim_{a \to 0} \{2a+4\}^2 = \lim_{a \to 0} 2 \times \{a+2\}^2$$

처럼 제곱 밖으로 빼낼 때 제곱을 안 하고 꺼낸다든지,

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 - 3xy(x-y)$$

처럼 다항식 전개에서 부호 실수를 한다든지,

$$\sqrt{f(x)^2} = f(x)$$

처럼 절댓값 (| |)를 붙이지 않는 실수를 한다든지...

혹시 이 중에 해본게 있어서 섬찟한가요?

장담컨대, 여러분의 실수 중 절반 이상은 **단순 카오스가 아닙니다.**
실수할만한, 뇌가 누구라도 꼬일만한 구조 속에서 나오는 체계적 실수입니다.
이런 체계적 실수를 메타인지하지 않으면 앞으로도 같은 과정을 만날 때 똑같이 실수를 하게 될 것입니다.

이런 실수를 잡는 방법은, **실수 노트를 만드는 것**입니다.

TEAM 수리남 미적분 43p. $h(x) = \begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \ge a) \end{cases}$	부등호 방향 반대로 씀
22’ 6월 14번 $\lim_{a\to0}\{2a+4\}^2 = \lim_{a\to0} 2\times\{a+2\}^2$	괄호 밖으로 상수 뺄 때 제곱 안 함
수완 63p. $x^3 - y^3 = (x-y)^3 - 3xy(x-y)$	다항식 전개 뺄마 헷갈림

예시입니다.
내가 실수로 문제에서 막힐 때마다 그 실수 내용을 노트 한 바닥에다가 정리하는 것입니다.
별 거 할 필요 없고 문제출처도 그리 안 중요합니다. 그냥 내가 어떤 미스를 냈는지 쭉 모아보는 겁니다.
이렇게 데이터가 **한 달만 쌓여도, 내가 하는 실수들이 반복되는 패턴이 있다는 것**을 알게 될 것입니다.
그리고 이런 실수들을 내가 자주한다는 것을 이로부터 인지하게 되면, 풀이 과정에서 이런 요소들을 만날 때마다 실수노트 생각이 나면서 진짜 실수를 안 하게 됩니다.

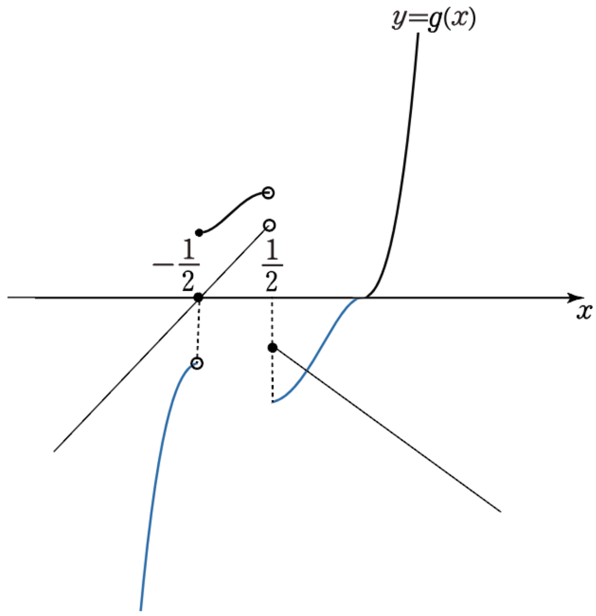
제게는 이 방법이 **96에서 100점으로 간 방법**이었고, 누군가에게는 **등급 하나를 올릴 수 있는 가장 확실한 방법**이 될 것이라 자신합니다.

학생 3: 풀이에서 개념을 들으면 분명 아는건데.. 신유형이 나올 때마다 미끄려져요.

사실 지금부터 할 이야기가 수학을 진짜 잘하는 학생들의 특징입니다.
동시에 가장 어렵고 저조차도 매번 공부에 끝이 없다고 느끼는 이유입니다.
지난 유형분류 공부법도 같은 철학에 기반한 가장 기본적이고 보편적인 방법이니 아직 읽어보지 않은 분은 먼저 1편을 정독하고 오시길 권장드립니다.

5평 22번 문제로 돌아가봅시다.

학생 3은 실수도 없이 문제를 진행시키다가 문제의 핵심 아이디어에서 부딪혀 답을 구하지 못했습니다.
$g(x)$의 불연속점을 소실시키는 방법이, $h(x)$가 연속이면서 0인 점을 곱해주는 법 외에도 **$h(x)$의 불연속점을 곱해줘 맞대응하는 전략**을 떠올리지 못했습니다.



자, 여기서 학생3은 지난 공부법1편에서 다룬 것처럼 연속함수 문제 범주에 대해 **원칙**을 세워야합니다.

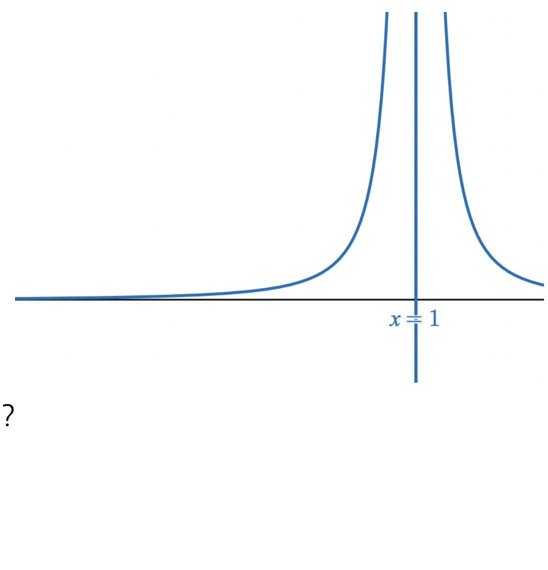
함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 연속:

1) $g(x)$가 $x=a$에서 연속, $h(x)$는 $x=a$에서 불연속 $\rightarrow$ $g(a)=0$

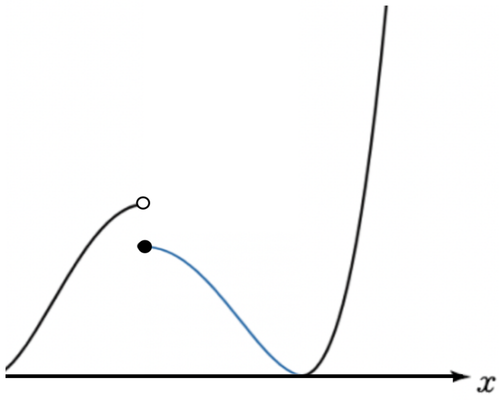
2) $\lim_{x\to a-} g(x)h(x) = \lim_{x\to a+} g(x)h(x) = g(a)h(a)$

이렇게 원칙을 세웠다고 해봅시다.

그런데 진짜 이렇게만 하면 불연속함수 문제를 다 풀 수 있나요?



이런 불연속점은 어떻게 메꾸나요?



이런 건요?

$h(x)$라는 다른함수로 메꾸는게 아니라, 원함수 $g(x)$를 살짝 변형해서 $g(k-x)$ 이런걸로 메꿔야한다면요?

실전에서 이렇게 원래 공부했던 것과 전혀 다른 소재의 신유형 문제를 만나면 많은 학생들이 당황부터 하고, 정작 열심히 배우고 닦아놓은 원칙을 써먹지도 못하는 안타까운 상황이 발생합니다.

학생3이 진짜로 불연속점을 곱함수로 해결하는 개념을 몰랐을까요? 아니죠.
이미 알았는데도 신유형의 문제가 나와서 못 풀었던 겁니다.
이 때 학생 3은 **이 개념을 본인이 진정으로 알고 있지는 않았다는 메타인지**를 해야합니다.

진짜 앎이란, $\lim_{x \to a-} g(x)h(x) = \lim_{x \to a+} g(x)h(x) = g(a)h(a)$과 같은 원칙을 배우는 데서 멈추는 것이 아니라 그것이 **다양한 실전 상황들에서 실제로 쓰일 수 있는 산 지식**에 이를 때입니다.

이런 앎에 도달하려면 **진짜 한 문제에서 발견한 소재를 끝까지 물고 늘어져 *사유하는 방법 뿐*입니다.**
$g(x)$에 어떤 불연속 함수가 올 수 있는지 실험해보면서 내 원칙을 적용해보는 겁니다.
$g(x)$가 $\frac{1}{x}$꼴이라면, $h(x) = x^n\,(n > 1)$ 차수의 파워를 갖는 함수를 곱해줘서 없앨 수 있다는 걸 **직접 실험**해보면서 깨닫습니다.

신유형 문제가 나와도 매번 맞히고 100점 받는 학생들이 공부하는 방법이 정확히 이렇습니다.

이런 식으로 문제 하나에서 파생될 수 있는 다양한 경우들을 대체로 다 이미 자신의 공부 속에서 경험해본 겁니다.

이 정도까지 엄두가 안 나는 학생들도 괜찮습니다.
솔직히 이 부분은 **좋은 선생님이 많은 부분을 해결해줄 수** 있습니다. 우리가 수업이나 교재에서 '***와 이렇게 나올 수도 있네***'라고 감동을 주는 수업들이 사실, 내가 **알고 있는 줄로 착각하던 부분에서 나의 빈틈을 찾아서 긁어주는 강의, 다시 말해 나의 메타인지를 도와주는 선생님**을 만날 때입니다.

개념 하나도 얼마나 본질적인 층위로 내용을 다루는지, 또 개념에 따라 얼마나 실전 예제들을 폭넓고 다양하게 제시하는지에 따라 내 앎의 깊이와 차원이 달라질 수밖에 없습니다.

TAKE HOME MESSAGE

오늘 이야기의 큰 주제는 **메타인지**였습니다.
우리가 앞으로 살아가는 내내 공부를 하게 되고 거기서 가장 본질적인 성장의 도구가 바로 이 메타인지임에는 틀림이 없습니다.

무엇보다 수학 공부법에서 메타인지가 어떻게 쓰이는지,
1) 체계적 오류 관리법
2) 실전에 동원할 수 있는 산 지식 쌓기
두 가지 측면에서 다루어보았고,

특히 1)의 경우는 한 등급을 올리는 가장 확실한 방법, 2)는 안정적 상위권으로 가는 데에 꼭 필요한 사고 방법이라고 하겠습니다. 개념을 유형별로 범주화해서, 다양한 실전 맥락에서 모두 적용할 수 있는 **가장 보편적인 원칙을 세우고 어떤 신유형이 나와도 대응할 수 있도록** 하는게 중요합니다.

글에서도 언급했듯, 이런 사유 과정은 사실 TEAM 수리남 7월 오픈 예정인 강의에서도 가장 포커스를 두고 있는 부분은 역시 어떤 문제 유형이 나와도 적용할 수 있게 개념을 쌓는 것입니다. <그래프 외부에서 긋는 접선>, <합성함수의 연속과 미분가능성>, <여사건을 써야하는 때> 등 **주요 고난도 실전 테마**에 대해서도 모든 문제들에 확장할 수 있는 **공통적 원칙**을 다룰 것입니다. 저희 팀이 힘을 합쳐 심혈을 기울여 만들고 있는 만큼 많은 관심 부탁드립니다.

지금까지 TEAM 수리남이었습니다.
이 글을 읽는 모든 수험생 분들께 행운을 빕니다.