제 2 교시

2025학년도 Hy : Dream 6월 대비 모의고사 문제지

수 학 영 역

성명		수험 번호						–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

더 높은 꿈을 향한 우리의 도전

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

Hy : Dream

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{2+\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^{4-2\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

$3^{2+\sqrt{3}} \times 3^{2-\sqrt{3}} = 3^4$
$= 81$

2. 다항함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

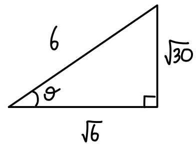
$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$

$f'(1) = 10$

3. $\sin\theta\cos\theta > 0$인 실수 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

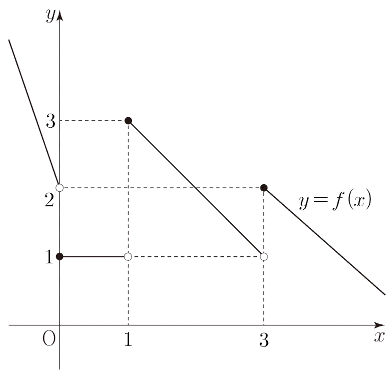
① $-\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $-2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-3\sqrt{5}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ or $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ $\Rightarrow$ $\tan\theta > 0$



$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{5}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x) + f(3)$의 값은? [3점]

$1 + 1 + 2$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_3=4,\ a_4+a_5=16$$

을 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

*NOTE
$\{a_n\}$ 등비 (공비 r)
$\underline{a_1+a_2}$ $\underline{a_3+a_4}$ $\underline{a_5+a_6}$ … : 등비수열
공비 $=r^2$ 공비 $=r^2$

$$a_2+a_3 \xrightarrow{\times r^2} a_4+a_5$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$4 \qquad\qquad 16$$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

$a_2+a_3=6a_1=4,\quad a_1=\frac{2}{3}$

6. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+a$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서 그은 접선을 l이라 하자. 직선 l의 y절편이 -8일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

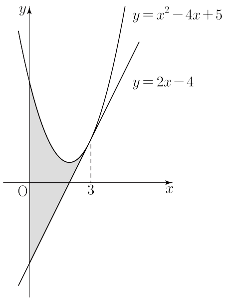
$f'(3)=4$

$\therefore l:\ y-(a+3)=4(x-3)$

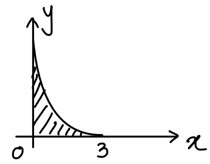
y절편 $=a+3-12=a-9=-8,\quad a=1$

7. 두 함수 $y=x^2-4x+5$, $y=2x-4$의 그래프 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

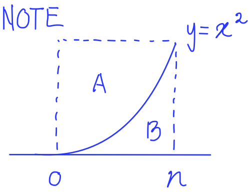


⇒



$\Rightarrow 27\times\frac{1}{3}=9$

NOTE



A:B=2:1

8. 두 실수 a, b가

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_2 27,\ a^2b-ab^2=\log_3 64$$

를 만족시킬 때, a^2-b^2의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$\frac{a+b}{ab}\times ab(a-b)=\log_2 27\times\log_3 64$$

$$a^2-b^2=\log_2 64\times\log_3 27$$

$$=6\times 3$$

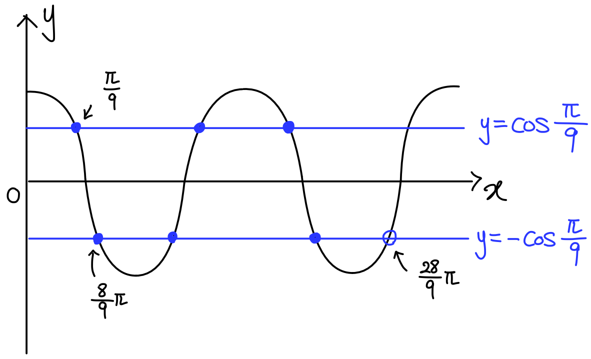
$$=18$$

9. $0<x<t$에서 방정식

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{9}x\right)\right|=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 6이 되도록 하는 양수 t의 최댓값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30



10. 최고차항의 계수가 1이고 $x=0$에서 극댓값 4를 갖는 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 8을 갖는다.
> (나) 함수 $f(x)-g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$f(1)+2g(1)=7$일 때, $f(3)+g(2)$의 값은? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

<기하적 해석>

$f(x)$가 $x=0$에서 극대, $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 극대

$\Rightarrow g(x)$가 $x=0$에서 극대

$\Rightarrow g(x)$의 최고차항의 계수 <0

Let $f(x)=x^2(x-a)+4$

$g(x)=bx^2+4 \quad (b<0)$

$f(x)-g(x)=x^3-(a+b)x^2$

By (나) $\Rightarrow$ $a+b=0$

$\therefore f(x)=x^2(x-a)+4$

$g(x)=-ax^2+4$

$f(1)+g(1)=5-a+2(4-a)$

$=13-3a=7,\quad a=2$

$\therefore f(3)+g(2)=13-4$

$=9$

11. 첫째항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_8의 값은? [4점]

> (가) $\sum_{k=1}^{4}(|a_k|+2a_k)=0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{8}(|a_k|+a_k)=6$

① -21 ② -18 ③ -15 ④ -12 ⑤ -9

$|a_k|+2a_k=\begin{cases} a_k & (a_k<0) \\ 3a_k & (a_k\ge 0)\end{cases}$, $|a_k|+a_k=\begin{cases} 0 & (a_k<0) \\ 2a_k & (a_k\ge 0)\end{cases}$

부호	a_1	a_2	a_3	a_4
①	+	+	+	−
②	+	+	−	−
③	+	−	−	−

(+/− 에는 0도 포함)

Let 공차 $=d$

① (가) $3a_1+3a_2+3a_3+a_4$

$= 9a_2+a_4 = 9(a_1+d)+a_1+3d=0$

$10a_1=-12d$

(나) $2a_1+2a_2+2a_3=6a_2=6$, $a_2=1$) 첫째항 자연수 ↯

② (가) $\underbrace{3a_1+3a_2}_{6a_{1.5}}+\underbrace{a_3+a_4}_{2a_{3.5}}=0$

$6(a_1+0.5d)+2(a_1+2.5d)=8a_1+11d=0$

(나) $2a_1+2a_2=4a_{1.5}=6$ 연립

$a_{1.5}=a_1+0.5d=\frac{3}{2}$

$7d=-12 \Rightarrow$ 첫째항 자연수 ↯

③ (가) $3a_1+\underbrace{a_2+a_3+a_4}_{3a_3}=0$ $\Rightarrow a_2=0$

(나) $2a_1=6$, $a_1=3$ $d=-3$

$\therefore a_8=a_1+7d$

$=3+7(-3)$

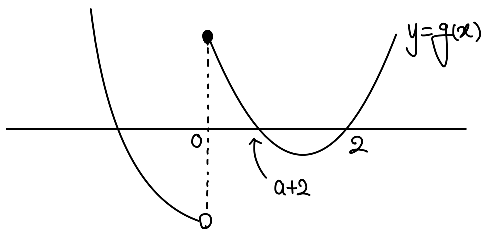
$=-18$

12. $f(-2)f(0)<0$이고 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f(x)+6 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $-2<t\le 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t}\frac{g(x+2)}{g(x)}$의 값이 존재할 때, $g(6)$의 값은? [4점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32



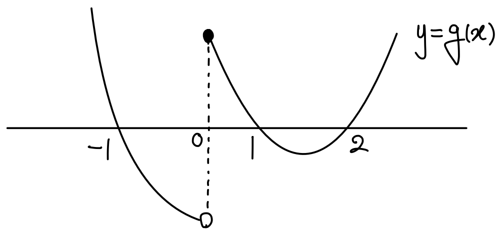
$f(x)+6=(x-a-2)(x-2)$

$f(x)=(x-a-2)(x-2)-6$

$f(a)=0$ 이므로

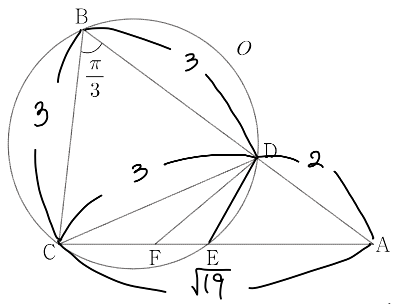
$0=-2(a-2)-6$, $\therefore a=-1$

즉,



$\therefore g(6)=20$

13. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}}=3$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D를 $\overline{\mathrm{AD}}=2$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD에 외접하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 O에 대하여 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자. 선분 CE 위의 점 F에 대하여 삼각형 ADF의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{21}}{3}$일 때, 선분 EF의 길이는? [4점]



① $\frac{\sqrt{19}}{19}$ ② $\frac{2\sqrt{19}}{19}$ ③ $\frac{3\sqrt{19}}{19}$ ④ $\frac{4\sqrt{19}}{19}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{19}}{19}$

△BCD에서 사인법칙

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2\sqrt{3} \Rightarrow \overline{CD}=3$$

$\overline{BD}=\overline{CD}$이므로 △BCD는 정삼각형

△ABC에서 코사인법칙

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$$

$$\Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{19}$$

△ABC에서

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} \qquad \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}=\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \sin(\angle BAC)=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$$

△ADF에서

$$\frac{\overline{DF}}{\sin(\angle BAC)}=\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \overline{DF}=\frac{9\sqrt{7}}{4\sqrt{19}}$$

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{10}{\sqrt{19}}$$

△ADF에서 코사인법칙

$$\overline{DF}^2=\overline{AD}^2+\overline{AF}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AF}\times\cos(\angle DAF)$$

$$\Rightarrow \overline{AF}=\frac{13}{\sqrt{19}} \qquad \therefore \overline{EF}=\frac{3}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{19}}{19}$$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=|f(x)|+f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{2h}\geq f'(0)$$

을 만족시킨다. 방정식

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=20$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 그 합이 -2일 때, $g(4)$의 값은? [4점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f(x)<0)\\ 2f(x) & (f(x)\geq 0)\end{cases}$$

① $f(x)<0$일 때 $\Rightarrow f'(0)\leq 0$

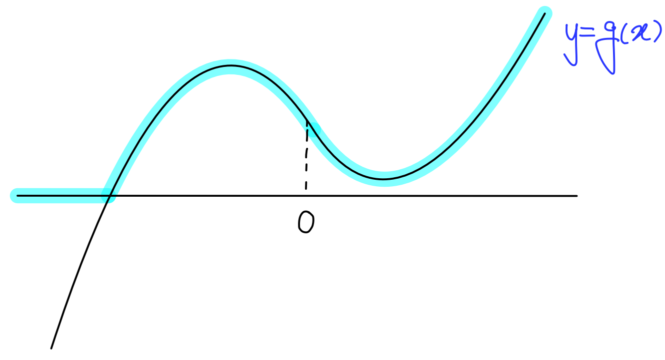
② $f(x)>0$일 때 $\Rightarrow f'(x)\geq f'(0)$

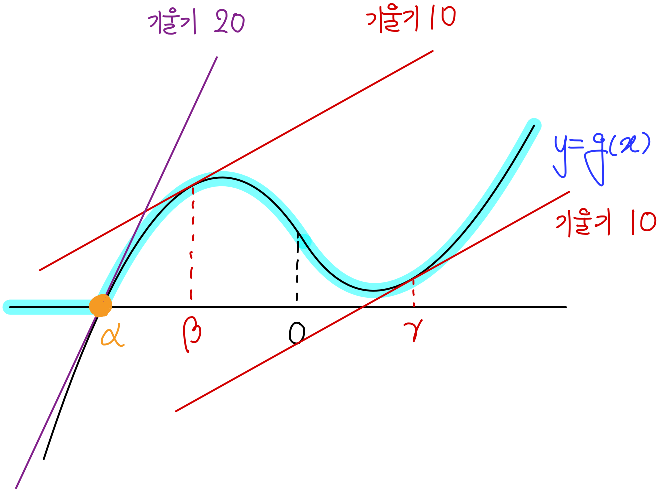
$\therefore f'(x)$는 $x=0$에서 최소

$\Rightarrow y=f'(x)$의 그래프는 $x=0$ 대칭

$\Rightarrow y=f(x)$ 〃 $(0, f(0))$ 대칭

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=\begin{cases}g(x)\text{ 미불 }=g'(x^+)+g'(x^-)\\ g(x)\text{ 미가 }=2g'(x)\end{cases}$$





$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=20$인 x의 값을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하자.

이때 의 근이 3개 존재하려면 α의 위치는 • 와 같다.

$(g'(\alpha^-)=0,\ g'(\alpha^+)=20)$

또한 $\alpha+\beta+\gamma=\alpha=-2$ 이므로

$f(x)=x^3+ax+b$, $f'(x)=3x^2+a$ 에서

$f(-2)=0$, $2f'(-2)=20$임을 이용하면 $a=-2$, $b=4$

즉, $f(x)=x^3-2x+4$

$g(4)=2f(4)=120$

15. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_n+n & (a_n+a_{n+1}<0) \\ a_{n+1}-2n & (a_n+a_{n+1}\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_m \le 0$인 자연수 m의 최솟값이 4이고

$$a_3=a_6,\ \sum_{n=1}^{4} a_n = 7$$

일 때, a_1의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_m \le 0$을 만족시키는 m의 최솟값$=4$

$\Rightarrow$ a_1, a_2, a_3은 모두 양수

Let $a_3=p$

a_2 a_3 a_4

p $p-4$

$a_2+a_3\ge 0$ 이므로 $a_4=a_3-4$

a_3 a_4 a_5 a_6

p $p-4$ ($p<2$) $p+3$ $p-5$

($p\ge 2$) $p-10$ ($p\le 7$) p, $p-18$

$2\le p\le 7$

a_3 a_2 a_1

p $p+2$

$\sum_{n=1}^{4} a_n = a_1+3p-2=7$에서 $p=2$일 때 $a_1=3$

단답형

16. 부등식

$$\log_2(x-1) > -2\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$$

을 만족시키는 정수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2(x-1) > 2\log_2(x-3)$ $\Rightarrow$ $x>3$

$(x-1) > (x-3)^2$

$x^2-6x+9 < x-1$

$x^2-7x+10<0$ $\Rightarrow$ $2<x<5$

$\therefore 3<x<5$ $\Rightarrow$ $x=4$

17. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=2x^3+x+1$이다. $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+C$ (C는 적분 상수)

$f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+C$

$=2+C=6$, $C=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+4$

$f(2)=8+2+2+4$

$=16$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k-2b_k-3k)=\sum_{k=1}^{4}(b_k-2a_k) = A$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{4}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k-2b_k) = A+\sum_{k=1}^{4}3k = A+30$$

$$-)\ \sum_{k=1}^{4}(b_k-2a_k) = A$$

$$\sum_{k=1}^{4}(3a_k-3b_k)=30$$

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k-b_k)=10$$

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+k)}{x-2}=k^2$$

이 되도록 하는 실수 k의 값이 오직 하나 존재할 때, $8\times f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2+k)=0$

Let $f(x)=(x-2-k)(x-p)$ (단, p는 상수)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+k)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+k-p)}{x-2}=2+k-p=k^2$$

k에 대한 이차방정식

$k^2-k+p-2=0$

$D=1-4(p-2)=0 \Rightarrow p=\frac{9}{4}$

$k=\frac{1}{2}$

$f(x)=(x-\frac{5}{2})(x-\frac{9}{4})$

$\therefore 8\times f(3)=3$

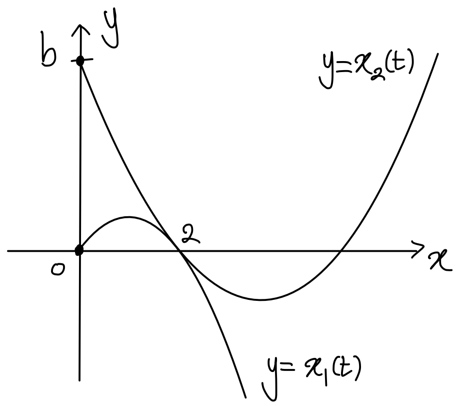
20. 두 양수 a, b에 대하여 시각 $t=0$일 때 각각 두 점 $\mathrm{A}(0)$, $\mathrm{B}(b)$를 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=-2t+2,\quad v_2(t)=2at-6a$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=2$에서 단 한 번만 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=b$까지 점 Q의 위치의 변화량을 구하시오. [4점]

$x_1(t)=-t^2+2t,\quad x_2(t)=at^2-6at+b$

$a,b>0$이고 두 점 P, Q가 시각 $t=2$에서 단 한 번만 만나므로 두 곡선 $y=x_1(t)$, $y=x_2(t)\ (t\geq 0)$의 그래프는 접해야 한다.



$t=2$에서 위치가 같으므로

$x_1(2)=x_2(2) \Rightarrow b=8a$

$t=2$에서 속도도 같으므로

$V_1(2)=V_2(2) \Rightarrow a=1,\ b=8$

$$\therefore \int_0^8 V_2(t)\,dt=\int_0^8(2t-6)\,dt$$

$$=\left[t^2-6t\right]_0^8$$

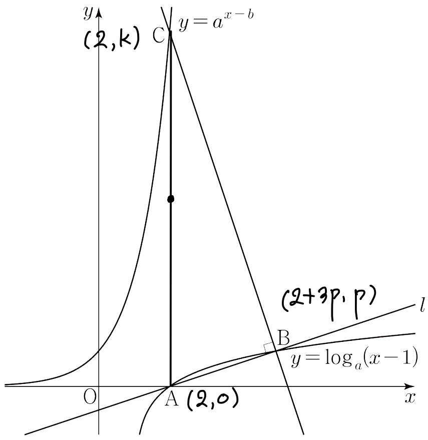
$$=16$$

21. 그림과 같이 곡선 $y=\log_a(x-1)$이 x축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x-b}$와 만나는 점을 C라 할 때,

$$\angle \mathrm{AOC}+\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$$

A, C x좌표 동일

이다. 세 점 A, B, C를 지나는 원이 x축에 접할 때, 2^{a-2b}의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 a는 $a>1$인 상수이다.) [4점]



① 직선 BC의 기울기 = -3

$\frac{p-k}{3p}=-3 \Rightarrow k=10p$

② 직선 OC의 기울기 × 직선 OB의 기울기 = 1

$\frac{k}{2}\times\frac{p}{2+3p}=1 \Rightarrow 10p^2=4+6p$

$\therefore p=1$

B$(5,1)$ C$(2,10)$

$\log_a 4=1$ $4^{2-b}=10$

$\therefore a=4$ $2^{4-2b}=2^{a-2b}=10$

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le 0$이다.
> (나) $3<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le f(x_2)$, $g(x_1)=g(x_2)$이다.
> (다) 두 집합 A, B를
> $A=\{x \mid f'(x)=g(x)\}$, $B=\{x \mid f'(x)\le 0\}$
> 라 하면 $A=B$이고 $3\in A$이다.

방정식

$$f(x)=\int_0^x |g(t)|\,dt \quad \cdots ㉠$$

의 해가 집합 $\{x \mid -2\le x\le 0$ 또는 $x=k\}$일 때, $\int_{-4}^{6}|g(t)|\,dt$의 값을 구하시오. (단, k는 양수이다.) [4점]

$\int_0^x |g(t)|\,dt = G(x)$, $G(0)=0$

(나) ⇒ $f(x)$는 $x\ge 3$에서 증가

$g(x)$는 $x\ge 3$에서 상수함수

(다) ⇒ $f'(3)=0$, $x\ge 3$에서 $g(x)=0$

$f'(x)\le 0$인 모든 실수 x에서

$f'(x)=g(x)$ 이므로 $f'(x)\le 0$일 때

$|g(x)|=-f'(x)$ ··· ㉡

방정식 ㉠의 해가 집합으로 나오기 위해서는

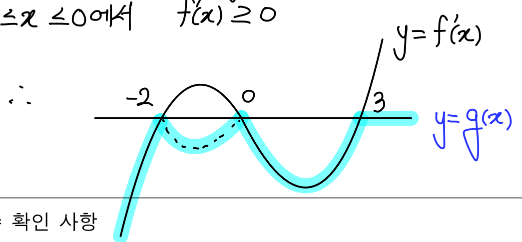
$-2\le x\le 0$ 에서 $f(x)=\int_0^x |g(t)|\,dt$

⇒ $f'(x)=g(x)$

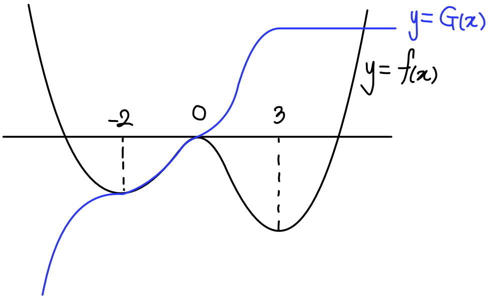
㉡에 의하여 $f'(x)=|g(x)|$가 성립하려면

$-2\le x\le 0$에서 $f'(x)\ge 0$

$\therefore$



> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.



$G(6) = -f(3)$

$G(-4) = 2f(-2) - f(-4)$

$f'(x) = 4x(x+2)(x-3) = 4x^3 - 4x^2 - 24x$

$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 12x^2 \quad (\because f(0) = 0)$

$f(3) = 81 - 36 - 108 = -63 \quad \Rightarrow \quad G(6) = 63$

$f(-2) = 16 + \frac{32}{3} - 48 = -\frac{64}{3}$

$f(-4) = 64 + \frac{256}{3} = \frac{448}{3}$

$\Rightarrow G(-4) = \frac{-128 - 448}{3} = -192$

$\therefore \int_{-4}^{6} |g(t)|\,dt = 63 + 192 = 255$