차영진 Final 모의고사 ver.3 해설지

1	②	**2**	④	**3**	①	**4**	⑤	**5**	⑤
6	④	**7**	④	**8**	②	**9**	③	**10**	①
11	③	**12**	②	**13**	⑤	**14**	③	**15**	④
16	③	**17**	①	**18**	⑤	**19**	②	**20**	①
21	③	**22**	6	**23**	24	**24**	5	**25**	12
26	16	**27**	64	**28**	113	**29**	28	**30**	176

1.

$\log_3 2 \times \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{1}{2}$

2.

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\5&-5\end{pmatrix}$

따라서 2행의 모든 성분의 합은 0

3.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^2=4$

4.

다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 변의 개수의 두 배이므로 14개

따라서 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 0의 개수는 $49-14=35$ 개

5.

$f(x)=(x-1)^2(x+1)$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2(2+h)}{h}=0$

6.

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n=5$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}b_n=5-20=-15$

7.

$\sum_{x=1}^{4}\mathrm{P}(X=x)=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{4}x\mathrm{P}(X=x)=\frac{1+2+3+4}{4}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$

8.

등차중항에 의하여 $a_5+a_6=a_3+a_8$ 이므로

$14=4+a_8$

$\therefore a_8=10$

9.

$\lim_{x\to 2+0}f(x)=8+a$, $\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)=4$

$8+a=4 \qquad \therefore a=-4$

10.

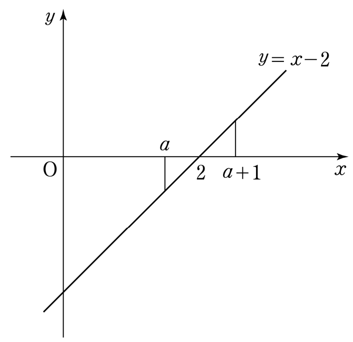
$v(t)=-3t^2+12t$ 이므로

$t=4$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

$a(t)=-6t+12 \qquad \therefore a(4)=-12$

11.

$\int_a^{a+1}(x-2)dx=0$ 이므로



점 $(a,\ 0)$ 과 점 $(a+1,\ 0)$ 의 중점이 점 $(2,\ 0)$ 이다.

따라서 $\frac{a+(a+1)}{2}=2$ 이다. $a=\frac{3}{2}$

12.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)2^n}{2^n}=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-1$

$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)\times\lim_{n\to\infty}a_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)a_n=3\times(-1)=-3$

13.

b가 상수이므로 $a=3$ 이다.

$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$

이므로 $b=\frac{1}{2}$ 이다.

14.

$a^3=-4 \qquad \therefore a=-2^{\frac{2}{3}}$

$ab=-2^{\frac{1}{3}}\times b=2 \qquad \therefore b=-2^{\frac{1}{3}}$

$k=b^4=\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^4=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore bk=-2^{\frac{5}{3}}$

15.

$a_{11}=f(f(1))=1$, $a_{12}=f(f(2))=2$

$a_{21}=f(2)=1$, $a_{22}=f(f(2))=2$

따라서 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ 이므로 $A^2=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}$

16.

$f(x)=4,\ g(x)=\log_2\frac{5}{4}$ 이므로

$\{f(x)\}^{g(x)}=4^{\log_2\frac{5}{4}}=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ 이다.

17.

$a=1$일 때, 가능한 b는 $1, 2$로 두 종류이다.

-> $\frac{2}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{42}$

$a=2$일 때, 가능한 b는 2이다.

-> $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$

$a=5$일 때, 가능한 b는 5이다.

-> $\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{42}$

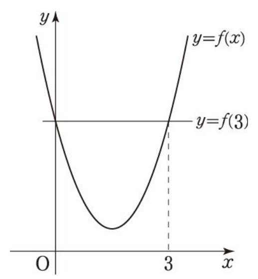
위의 3가지 경우의 확률을 모두 더하면

$\frac{8}{21}$ 이다.

18.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(3)$ 이 만나는 두 점은 $(0,\ 7),\ (3,\ 7)$ 이다. 따라서 넓이는

$\frac{(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$ 이다.



19.

$k>9$ 이면 $\mathrm{P}(X\le k)>\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$k<9$ 이다.

표준편차가 서로 4로 같고

$f(k)=g(k)$ 이므로 $\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(k-3 \le Y \le k)+\mathrm{P}(Y \ge k)=\frac{1}{2}$

이다. 즉 $\mathrm{P}(k-3 \le Y) = \frac{1}{2}$ 이므로

$m=k-3$ 이다. 또, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=k$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{9+(k-3)}{2}=k$ 이다. 따라서 $k=6$, $m=3$

20.
직선의 방정식을 구한 뒤, 거리 공식이나, 원의 방정식과 연립하는 방법보다
평균변화율을 이용하는 것이 더 빠르다.
원과 직선 l 의 교점을 H 라 하면,

$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}}}=2^n$, $\frac{\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{H}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=2^n$ 이고, $\overline{\mathrm{OH}}=1$ 이므로

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 의 길이는 2^n+2^{-n} 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{8}{7}$

21.
함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 $f'(x)$ 의 부호가 변하므로 극소를 갖는다. 이 때의 함숫값이 0 이므로 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ 이다. 함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, n)$ 에서 감소하고, $f'(n)=0$ 이므로 $x=n$ 에서 극소값을 갖는다. 즉, $a=\frac{3n-1}{2}$ 이다. 이 때, 가능한 t 의 범위는 $t \ge \frac{3n-1}{2}$ 이므로

$a_n=\frac{3n-1}{2}$ 이다.

22.
$\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+4)=2+4=6$

23.
$\left(x+\frac{4}{x^3}\right)^6$ 의 전개식은 $\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r\cdot x^r\cdot\left(\frac{4}{x^3}\right)^{6-r}$

따라서 x^{4r-18}의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_r4^{6-r}$ 이므로

x^2의 계수는 $r=5$ 일 때 24 이다.

24.
함수 $f(x)=\log_2(x+3)$ 는 증가함수이므로
닫힌구간 $[-1, a]$ 에서
$x=-1$ 일 때 최솟값을 갖고
$x=a$ 일 때 최댓값을 갖는다.
최솟값과 최댓값의 합은 4이고 $f(-1)=1$
$f(a)=\log_2(a+3)=3$ $\therefore a=5$

25.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=n$

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_5}{a_4}=1\times2\times3\times4=24$

$\frac{a_5}{a_1}=2a_5=24$ $\therefore a_5=12$

26.

$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\frac{95+\frac{30}{\sqrt{n}}-100}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 6-\sqrt{n})\ge 0.95$

$\mathrm{P}(Z\le 6-\sqrt{n})\ge\mathrm{P}(Z\le 2)$ 이므로

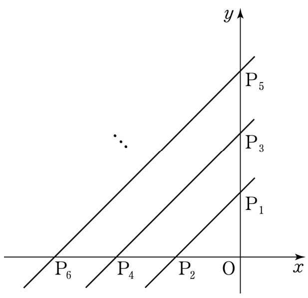
$6-\sqrt{n}\ge 2$

$\sqrt{n}\le 4$ $\therefore n\le 16$

따라서 n의 최댓값은 16이다.

27.
$a+b+c=11-d$ 이므로
$11\ge 4d$ 이다. 따라서 가능한 d 의 값은 1, 2 이다. 각각의 경우에서 (a, b, c) 의 순서쌍이 각각 36, 28 이므로 답은 64 이다.

28.
$n=1, 2, 3, \cdots$ 대입해가며 점을 찍어보면 다음과 같다.



점 P_{13} 의 좌표는 $(0, 7)$ 이고, 점 P_{16} 의 좌표는 $(0, 8)$ 이므로 답은 113 이다.

29.
우선, $f(x)=(x-3)^2+a$ 를 통해
이차함수는 $x=3$ 대칭임을 알 수 있다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}+2\right)=\frac{1}{2}\times\int_2^4 f(x)dx$ 이므로

$\int_2^4 f(x)dx=2\times\int_2^a f(x)dx$ 로 식을 변형할 수 있다. $x=3$ 대칭이므로 $a=3$ 이다.
따라서 $f(8)=5^2+3=28$ 이다.

30.

A 를 만족시키는 점들을 찾아 보면
$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$
$(8, 3)$, $(9, 3)$ 뿐이다.

(곡선 $y=\log_2 x$ 와 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 로 둘러싸인 영역의 내부의 격자점이다.)

점 A 가 $(2, 1)$ 일 때, $\angle\mathrm{OAB}\le\frac{\pi}{2}$ 을 만족시키려면 점 A 를 지나고, 직선 OA 와 수직인 직선과 지수함수 $y=2^x$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 격자점의 개수가 점 B 의 개수이다.
가능한 B 의 개수는 $(1, 2)$, $(1, 3)$ 으로 2 이다.

점 A 가 $(3, 1)$ 일 때도, $\angle\mathrm{OAB}\le\frac{\pi}{2}$ 을 만족시키려면 점 A 를 지나고, 직선 OA 와 수직인 직선과 지수함수 $y=2^x$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 격자점의 개수가 점 B 의 개수이다.
가능한 B 의 개수는 $(1, 7)\sim(1, 2)$, $(2, 4)$ 로 총 7 개다.
이와 같이 카운팅하면 점 A 가 $(4, 2)$ 일 때, 가능한 B 의 개수는 $(1, 8)\sim(1, 2)$, $(2, 6)\sim(2, 4)$ 로 총 10 개다.
점 A 가 $(5, 2)$ 일 때, 가능한 B 의 개수는 $(1, 12)\sim(1, 2)$, $(2, 9)\sim(2, 4)$ 으로 총 17 개다.
점 A 가 $(6, 2)$ 일 때, 가능한 B 의 개수는 $(1, 17)\sim(1, 2)$, $(2, 14)\sim(2, 4)$, $(3, 11)\sim(3, 8)$ 로 총 31 개다.
점 A 가 $(8, 3)$ 일 때, 가능한 B 의 개수는 $(1, 21)\sim(1, 2)$, $(2, 19)\sim(2, 4)$, $(3, 16)\sim(3, 8)$ 으로 총 45 개다.
점 A 가 $(9, 3)$ 일 때, 가능한 B 의 개수는 $(1, 27)\sim(1, 2)$, $(2, 24)\sim(2, 4)$, $(3, 21)\sim(3, 8)$, $(4, 18)\sim(4, 16)$ 로 총 64 개다.
따라서 7 가지 경우를 종합하면 176 이다.