차영진 Final 모의고사 ver.3 해설지

1	③	**2**	①	**3**	⑤	**4**	②	**5**	④
6	②	**7**	⑤	**8**	④	**9**	①	**10**	⑤
11	⑤	**12**	③	**13**	④	**14**	①	**15**	③
16	③	**17**	②	**18**	①	**19**	②	**20**	④
21	①	**22**	17	**23**	15	**24**	50	**25**	16
26	100	**27**	113	**28**	108	**29**	56	**30**	64

1.
$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\5&-5\end{pmatrix}$
따라서 2행의 모든 성분의 합은 0

2.
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{5x}=\frac{1}{5}$

3.
점 H의 좌표가 $(1,\ 3,\ 0)$이므로 선분 OH의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

4.
$(x+1)(x-2)^2(x-7)<0$을 만족시키는 x의 값은 0, 1, 3, 4, 5, 6으로 총 6개다.

5.
$\int_1^3 f'(x)dx=f(3)-f(1)=1-3=-2$

6.
등차중항에 의하여 $a_5+a_6=a_3+a_8$ 이므로
$14=4+a_8$
$\therefore a_8=10$

7.
x축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환이므로 직선 $y=2x-2$ 위의 점들은 $y=-2x+2$로 옮겨진다. 따라서 y절편은 2이다.

8.
$a_{11}=f(f(1))=1$, $a_{12}=f(f(2))=2$
$a_{21}=f(2)=1$, $a_{22}=f(f(2))=2$
따라서 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ 이므로 $A^2=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}$

9.
방정식
$\cos x=-4\sin 2x$
$\Leftrightarrow$ $\cos x=-8\sin x\cos x$ 이므로
$\cos x=0$이거나 $\sin x=-\frac{1}{8}$ 이다.
$\cos x=0$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이고, $\sin x=-\frac{1}{8}$을 만족시키는 x의 값을 α, β라 한다면, $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 모든 해의 합은 5π이다.

10.
$a+b+c=11-d$ 이므로
$11\geq 4d$ 이다. 따라서 가능한 d의 값은 1, 2이다. 각각의 경우에서 $(a,\ b,\ c)$의 순서쌍이 각각 36, 28이므로 답은 64이다.

11.
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BF}}$이므로 이 타원의 장축의 길이가 6이다. 따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$이다. 이 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

12.
$a^3=-4$ $\qquad\therefore a=-2^{\frac{2}{3}}$
$ab=-2^{\frac{1}{3}}\times b=2$ $\qquad\therefore b=-2^{\frac{1}{3}}$
$k=b^4=\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^4=2^{\frac{4}{3}}$
$\therefore bk=-2^{\frac{5}{3}}$

13.
$\lim_{x\to a}\frac{2e^x-2}{(x-a)(x+3)}$ 의 값이 수렴하고, 그 값이 b로 상수이므로 $a=0$이다.
$\lim_{x\to0}\frac{2e^x-2}{x(x+3)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x+3)}=\frac{2}{3}$ 이므로
$b=\frac{2}{3}$ 이다. $a+b=\frac{2}{3}$

14.
$a=1$일 때, 가능한 b는 1,2로 두 종류이다.
-> $\frac{2}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{42}$
$a=2$일 때, 가능한 b는 2이다.
-> $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$
$a=5$일 때, 가능한 b는 5이다.
-> $\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{42}$
위의 3가지 경우의 확률을 모두 더하면 $\frac{8}{21}$이다.

15.
직선 BD와 AC가 평행이므로
$\angle\mathrm{DBA}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$이다. 원 $f(\theta)$의 반지름을 $r(\theta)$라 하면
$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}r(\theta)\{1+\sin\theta+\cos\theta\})$이다.
$g(\theta)=\frac{1}{4}\tan\theta$이므로 $\lim_{\theta\to0}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\pi$이다.

16.
점 R에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=(\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}$이다. 선분 BQ의 길이를 a라 하면, 선분 QC의 길이는 $2-a$이다. 이 때, $\overline{\mathrm{RH}}:\overline{\mathrm{HC}}=1:2$이므로
$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{2-a}{3}$이다.
$(\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\vec{0}$이고,
$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{QC}}$는 서로 방향이 같으므로
$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\left(a+\frac{2-a}{3}\right)\times(2-a)\ (0<a<1)$
이다. 이차함수의 최대 최소로 해석하면 답은 $a=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

17.
$k>9$ 이면 $\mathrm{P}(X\leq k)>\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $k<9$ 이다.
표준편차가 서로 4로 같고
$f(k)=g(k)$ 이므로 $\mathrm{P}(X\leq k)=\mathrm{P}(Y\geq k)$ 이다.
따라서 $\mathrm{P}(k-3\leq Y\leq k)+\mathrm{P}(Y\geq k)=\frac{1}{2}$
이다. 즉 $\mathrm{P}(k-3\leq Y)=\frac{1}{2}$ 이므로
$m=k-3$ 이다. 또, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=k$에 대하여 대칭이므로
$\frac{9+(k-3)}{2}=k$ 이다. 따라서 $k=6$, $m=3$

18.
직선의 방정식을 구한 뒤, 거리 공식이나, 원의 방정식과 연립하는 방법보다 평균변화율을 이용하는 것이 더 빠르다.
원과 직선 l의 교점을 H라 하면,
$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}}}=2^n$, $\frac{\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{H}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=2^n$이고, $\overline{\mathrm{OH}}=1$ 이므로
선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 2^n+2^{-n}이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{8}{7}$$

19.
영역 $\left\{(x,\ y)\,\middle|\,g\left(\frac{1}{2}\right)\le y\le g(x)\right\}$에 속하는 부분의 넓이는
$8\times\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}2f(x)dx-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$이므로
$\frac{16\sqrt{2}}{\pi}-4\sqrt{2}$ 이다.

20.
점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발이 C이다. 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 4이므로, 선분 DH의 길이는 5이다.(삼수선의 정리) 따라서 평면 α와 평면 BDA가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}$이므로 $\frac{4}{5}$ 이다.

21.
$f'(x)=-axe^{-x}+2x$ 이다. 다음 표

x	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$		$+$

를 만족시키려면 곡선 $y=-axe^{-x}$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식이 $y=-2x$ 이어야 한다.
따라서 $a=2$이다.

22.
$f'(x)=\frac{4}{4x+1}+13$이므로 $f'(0)=17$이다.

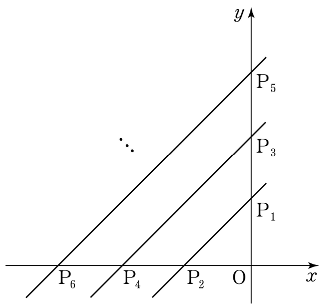
23.
$\sum_{n=1}^{10}a_n=10,\ \sum_{n=1}^{10}(2a_n+b_n)=35$ 이므로
$\sum_{n=1}^{10}b_n=15$ 이다.

24.
$f(x)=4,\ g(x)=\log_2\frac{5}{4}$ 이므로
$\{f(x)\}^{g(x)}=4^{\log_2\frac{5}{4}}=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ 이다.

25.
$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\frac{95+\frac{30}{\sqrt{n}}-100}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$
$=\mathrm{P}\left(Z\le 6-\sqrt{n}\right)\ge 0.95$
$\mathrm{P}\left(Z\le 6-\sqrt{n}\right)\ge \mathrm{P}(Z\le 2)$ 이므로
$6-\sqrt{n}\ge 2$
$\sqrt{n}\le 4$ $\therefore n\le 16$

26.
주어진 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$는 이등변삼각형이다.
삼각형의 넓이 $S_k=\frac{1}{4}\tan\frac{k\pi}{4n}$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{4}\times\int_0^1\tan\frac{\pi}{4}x$
$\frac{1}{\pi}\left[\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1=\ \frac{1}{\pi}\times\ln\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $a=\sqrt{2}$이다. $50a^2=100$

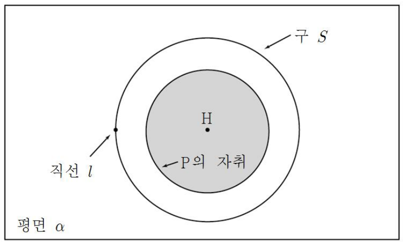
27.
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 대입해가며 점을 찍어보면 다음과 같다.



점 P_{13}의 좌표는 $(0,\ 7)$이고, 점 P_{16}의 좌표는 $(0,\ 8)$ 이므로 답은 113 이다.

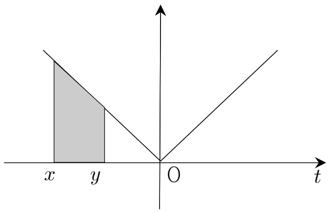
28.
점 B에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABP와 삼각형 AFH는 닮음비가 $3:4$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=3$이다. 따라서, $\angle\mathrm{AFH}=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다. 삼각형 AFH의 넓이는 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$이고, 삼각형 BFH에서 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{FH}}$, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{BQ}}$가 높이인 삼각형이므로 넓이를 구하면 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$이다. $S=\frac{9}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3}=6\sqrt{3}$이므로 답은 108이다.

29.
점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|\le 5$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|\le 4$이다. 이를 직선 l과 평행한 방향으로 바라보면 다음과 같다.



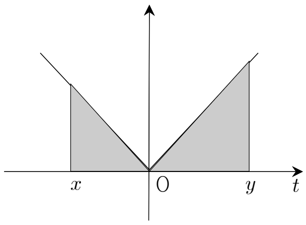
즉, 점 P의 자취는 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부다.
평면 β와 구 S가 만나서 생기는 넓이의 최댓값은 점 C를 지날 때이므로 36π이고, 최솟값은 점 P가 나타내는 원에 접할 때이므로 $(36-16)\pi$이다. 따라서 답은 56이다.

30.
i) $-2\le x<y\le 0$인 경우

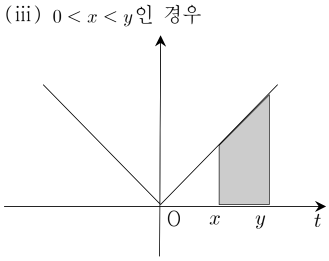


$\frac{1}{2}(x^2-y^2)=2$에서 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 즉 조건을 만족시키는 점 (x,y)는 $(-2,0)$뿐이다.

ii) $-2\le x\le 0,\ y>0$인 경우



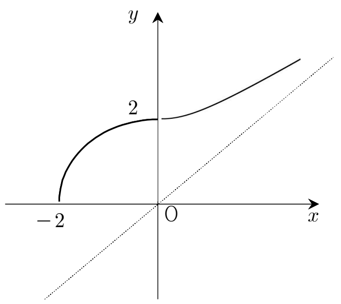
$\int_x^y|t|\,dt=\frac{1}{2}\times(-x)\times(-x)+\frac{1}{2}\times y\times y$
$=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ 즉, $x^2+y^2=4$
(iii) $0<x<y$인 경우



$\int_x^y|t|\,dt=\frac{1}{2}(x+y)(y-x)$

$=-\frac{1}{2}(x+y)(x-y)$ 즉, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1$

i), ii), iii)에서 곡선 C를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 입체의 부피가

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 2^3+\pi\int_0^2 y^2\,dx$

$=\frac{16}{3}\pi+\frac{32}{3}\pi=16\pi$

$V=16$, $4V=64$이다.