

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

이. 좌표평면에서 자연수  $n$ 에 대하여 영역

$$\{(x, y) \mid \log_2 x \leq y \leq 2^x\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를  $f(n)$ 이라 하자.

(가)  $x$ 좌표와  $y$ 좌표는 모두 자연수이다.

(나)  $n+2^n < x+y \leq n+1+2^{n+1}$

$f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값을 구하시오. [by 박주혁]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

02.

1이상 7이하인 두 자연수  $m, n$ 에 대하여 함수  $y = \left(\frac{m}{5}\right)^x$  과

함수  $y = \left(\frac{4}{n}\right)^x$  이 직선  $x = k$ 와 만나는 점을 각각  $A_k, B_k$ 라고 하자.

$\overline{A_k B_k} = 1$ 을 만족하는  $k$ 의 개수가 2개일 때의 모든 순서쌍

$(m, n)$ 의 개수를  $a$ 개,  $k$ 의 개수가 1개일 때의 모든 순서쌍

$(m, n)$ 의 개수를  $b$ 개라고 할 때,  $ab$ 의 값을 구하시오. [by JnS]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

03. 자연수  $n$ 에 대하여 두 곡선

$$y = 2^x + n - 5, \quad y = \log_3(-x + n - 5)$$

과 두 곡선 각각의 점근선으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 개수를

$a_n$ 이라 하자. 예를 들어,  $a_5 = 3$ 이다.  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

[by 포카칩 : 2015학년도 포카칩 9월모의평가 30번]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

## 04. 영역

$$\{(x, y) \mid 0 \leq \log_2(x+y) \leq a, y \leq \log_2(x+1)\}$$

에 속한  $x$  좌표와  $y$  좌표가 모두 자연수인 점의 개수가  $2^{22}$  보다 작도록 하는 모든 자연수  $a$ 의 값의 합을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

05. 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 에 대하여, 함수  $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq f(x+2)) \\ f(x+2) & (f(x) \geq f(x+2)) \end{cases}$$

함수  $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f'(5)$ 의 값을 구하시오. [by 포카칩 문제변형]

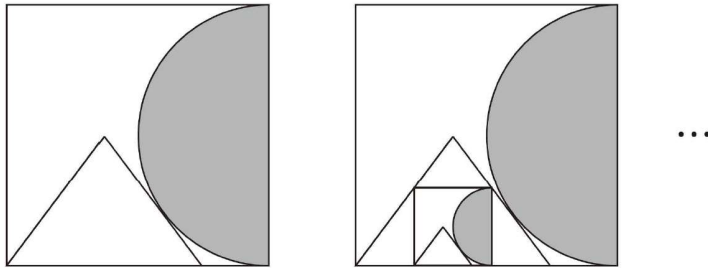
(가)  $g(t)$ 는  $t=2, t=4$  에서만 극솟값을 갖는다.

(나)  $g'(-2) = 0$

**06.** 한 변의 길이가 2인 정사각형의 한 변을 지름으로 하고 정사각형 내부에 있는 반원을 그린다. 이때, 세 변의 길이의 비가 5 : 5 : 6인 이등변삼각형을 정사각형과 한 꼭짓점을 공유하고, 가장 긴 변이 정사각형의 한 변에 포함되며, 한 변이 반원에 접하도록 그리고 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

$R_1$ 에서의 이등변삼각형에 정사각형의 한 변이 이등변삼각형의 가장 긴 변에 포함되도록 내접시키고, 이 정사각형에 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

이와 같은 과정을  $n$ 번 반복하여 얻은 도형  $R_n$ 에 있는 모든 반원의 넓이의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [by 리듬농구]



$R_1$

$R_2$

- ①  $\frac{50}{91}\pi$
- ②  $\frac{25}{46}\pi$
- ③  $\frac{50}{93}\pi$
- ④  $\frac{25}{47}\pi$
- ⑤  $\frac{10}{19}\pi$

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

07.

4차 다항함수  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  가 있다.

다음 조건을 읽고, 조건에 맞는  $f(x)$ 의 개수를 구하시오. [by 박주혁]

(가)  $a, b, c, d, e$ 는 모두 음이 아닌 정수이다.

(나)  $f'(-x) = -f'(x)$

(다)  $f(0) \geq 4, f(1) \leq 14$

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

**08.** 양수  $x$ 에 대하여  $\log x$ 의 가수를  $f(x)$ 라 하자. 두 자연수  $a, b$ 와 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를  $g(n)$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^5 g(n)$ 의 값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

(가)  $1 \leq a \leq b < 100$

(나)  $f(a) + f(b) = \log n$



# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

09. 최고차항의 계수가 1이고,  $f'(0)=5$ 인 사차함수  $f(x)$ 가 있다.  
실수  $t$ 에 대하여 집합  $S$ 를

$$S = \{m \mid \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) \geq m(x-t) + f(t)\}$$

라 하고, 집합  $S$ 의 원소의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가  
 $t=-1$ 과  $t=2$ 에서만 불연속일 때,  $f'(3)$ 의 값은? [4점] [by L]

- ① 39      ② 41      ③ 43      ④ 45      ⑤ 47

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

10. 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 값은? [by 리튬농구]  
[4점]

(가)  $f(1) = 4$

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq x^3 + 3x^2$ 이다.

(다) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq f'(-2)$ 이다.

- ① 21      ② 22      ③ 23      ④ 24      ⑤ 25

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

11. 좌표평면에서 자연수  $n$ 에 대하여 영역

$$\{(x, y) \mid x \leq y - 3 \leq \log_{n+1}(x+n)\}$$

에 속하는 점 중  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 개수를

$a_n$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점] [by JnS]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

**12.** 양수  $x$ 에 대하여  $\log x$ 의 지표를  $f(x)$ 라 하자. 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는  $x$ 의 최솟값을  $a_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=2}^{15} n \log a_n$ 의 값은? [by L]

(가)  $1 \leq \log x < 2$

(나)  $1 \leq \sum_{k=1}^n f(x^k) - \frac{n(n+1)}{2} < 2$

- ① 123      ② 133      ③ 143      ④ 153      ⑤ 163

13. 좌표평면에서 곡선  $y = x^2 - 6x + a + 1$  위의  $x$ 좌표가  $t$ 인 점 P에서  $x$ 축까지의 거리와  $y$ 축까지의 거리의 곱을  $f(t)$ 라 하자. 또한 집합

$$\left\{ t \mid \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \right\}$$

의 원소의 개수를  $g(a)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? [4점] [by 이해원]

<보 기>

ㄱ.  $g(7) = 2$

ㄴ.  $\lim_{a \rightarrow -1} g(a) - g(-1) = 2$

ㄷ.  $\lim_{a \rightarrow c+0} g(a) \neq g(c)$ 인 실수  $c$ 는 1개이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄷ  
 ④ ㄱ, ㄴ                ⑤ ㄴ, ㄷ

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

14. 최고차항의 계수가 1이고  $x$ 축과 적어도 한 점에서 만나는  
사차함수  $f(x)$ 에 대하여  $g(x)$ ,  $h(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (f(x) > 0) \\ 0 & (f(x) = 0) \\ -1 & (f(x) < 0) \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 1 & (f'(x) > 0) \\ 0 & (f'(x) = 0) \\ -1 & (f'(x) < 0) \end{cases}$$

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=0$ 과  $x=3$ 에서만 불연속이고,

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)h(x)$ 가 존재할 때,  $f(5)$ 의 값을 구하십시오. [by Romanum]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

15. 양의 실수  $x$ 에 대하여  $\log x$ 의 지표와 가수를 각각  $f(x)$ ,  $g(x)$ 라 할 때, 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든  $x$ 값의 곱을  $a_n$ 이라 하자.

$$f(x) + 2g(x) = \frac{n}{2}$$

$\sum_{n=2}^{20} \log a_n$ 의 값을 구하시오. [4점] [by 이해원]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

16. 자연수  $n$ 에 대하여  $\log n$ 의 지표를  $m$ , 가수를  $\alpha$ 라 할 때,

좌표평면에서 점  $P_n$ 을  $P_n(m, 10^\alpha)$ 이라 하자.

점  $P_n$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점

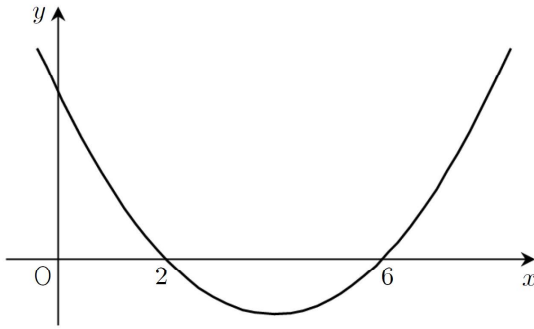
중에서 점  $A(0, 1)$ 과의 거리가 최소인 점을  $Q_n$ 이라 하자.

$\overline{AQ_n} \leq 1$ 을 만족시키는 모든 자연수  $n$ 의 개수를 구하시오.

(단,  $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ ,  $2.23 < \sqrt{5} < 2.24$ 이다.) [4점] [by 포카칩 : 2014 직전모의 A형 30번]



17.  $f(2)=f(6)=0$ 인 이차함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



함수  $g(t)$ 를

$$g(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(t)\}^2}{x - t}$$

이라 할 때,  $g(t) \leq 0$ 을 만족시키는 서로 다른 자연수의 총합을 구하시오. [by 이해원]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

18. 함수  $f(x) = x^3 + 9x^2$  와 자연수  $n$  에 대하여 함수  $g(t)$  는  
다음 조건을 만족시킨다. [by 리듬농구]

- (가) 함수  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선은  
점  $(-n, g(t))$ 를 지난다.  
(나) 함수  $g(t)$ 가 극솟값을 가질 때, 그 극소점의  $t$ 의  
좌표는  $a_n$  이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$  의 값은? [4점] (단, 극솟값이 없는 경우,  $a_n = 0$  이라 하자)

- ① -55    ② -56    ③ -57    ④ -58    ⑤ -59

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

19. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x) = \log_2|x+1| + 1, \quad g(x) = -a(|x|-3) + 3$$

에 대하여 영역

$$\{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

에 속하는 점 중  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 개수가  
60이하가 되도록 하는 모든 자연수  $a$ 의 값의 합을 구하시오

[4점] [by JnS]

# A형 2016 학년도 리얼킬러마스터

20. 두 곡선  $y=a^x$ ,  $y=b^x$  위의 점  $P(n, a^n)$ ,  $Q(n+1, b^{n+1})$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수가 3이 되도록 하는 100 이하의 자연수  $n$ 의 개수를 구하십시오. (단,  $n \geq 2$ ) [4점] [by 리듬농구]

(가)  $2 \leq a \leq 4, b \geq 2$

(나) 두 점  $(1, 0)$ ,  $P$ 을 이은 직선의 기울기는 두 점  $(1, 0)$ ,  $Q$ 을 이은 직선의 기울기보다 작지 않다.

# A형 2016 학년도 리얼컬러마스터

## A형 정답표

01.	441	06.	①	11.	695	16.	257
02.	522	07.	220	12.	②	17.	18
03.	494	08.	28	13.	⑤	18.	①
04.	171	09.	②	14.	152	19.	21
05.	100	10.	③	15.	195	20.	98