차영진 미리보기 B형 해설

1	②	2	④	3	③	4	⑤	5	①
6	②	7	②	8	⑤	9	①	10	④
11	①	12	④	13	③	14	②	15	③
16	⑤	17	④	18	①	19	⑤	20	③
21	④	22	6	23	20	24	10	25	3
26	72	27	50	28	320	29	45	30	80

1.
$\sqrt[5]{32}\times\log_2 16$
$=2\times4$
$=8$

2.
해설 1)
$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}$이므로
행렬 $2A-B$는 다음과 같다
$2A-B=\begin{pmatrix}5&7\\0&5\end{pmatrix}$
따라서 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 17

해설 2)
행렬 A의 모든 성분의 합이 10, 행렬 B의 모든 성분의 합이 3이므로 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 $20-3=17$이다.

3.
해설 1)
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로
$2\cos^2 x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
따라서 $\cos^2 x=\frac{2}{3}$
$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.
따라서 $\tan x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

해설 2)
$\tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$이므로
$\therefore\ \tan x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

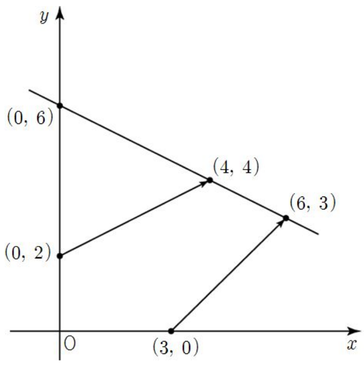
4.
해설 1)
등차수열의 의미는 일정한 수만큼 더하거나 빼어 나열하는 수열이므로, 수직선 위의 내분점과 관련이 깊다.
이 점을 이용하여 주어진 조건의 식을 변형하면 $\frac{a_3+3a_{11}}{4}=a_k$이며, 여기서, 수직선 위의 점이라고 생각하면, (3)과 (11)을 1 : 3 으로 내분하는 점이 k이다. 따라서 $k=9$이다.

해설 2)
수열 $\{a_n\}$을 $a_n=a_1+(n-1)d$ (공차$=d$)라고 표현하여 주어진 조건에 대입한다.
$(a_1+2d)+3(a_1+10d)=4a_1+4(k-1)d$
따라서 k의 값은 9이다.

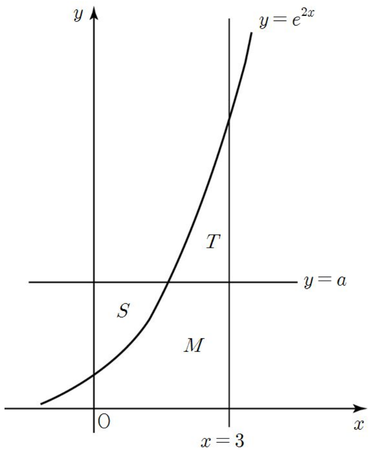
5.
곱의 미분법을 이용하여 구해도 좋지만....
$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(e^x+\frac{\sin x}{x}\cos x\right)=2$

6.
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)$의 합이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$
$\lim_{n\to\infty}3=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)+3=\lim_{n\to\infty}3$
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$
$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3n+2}{a_n+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{a_n}{n}-3+\frac{2}{n}}{\frac{a_n}{n}+2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{5}$

7.
풀이 1)
일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 하면
$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}$
$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
$\begin{cases}2x+2y=x'\\x+2y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-y'\\y=\frac{2y'-x'}{2}\end{cases}$
$2x+3y=6$이므로
$2(x'-y')+\frac{6y'-3x'}{2}=6$
$x'+2y'=12$
따라서 구하는 값은 6이다.

풀이 2)


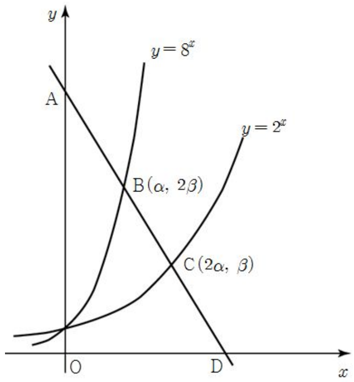
위 그래프처럼 (0, 6)을 지나므로 답은 6

8.


그림과 같이 $S+M=T+M$이어야 하므로
$S+M=3a$(직사각형의 넓이)
$T+M=\int_0^3 e^{2x}dx$ 이다.
따라서 a의 값은 $\frac{e^6-1}{6}$이다.
($\int_0^3(e^{2x}-a)dx=0$으로 풀이해도 좋다.)

9.
국어, 영어, 수학을 이 순서대로 적어도 한 시간 이상 공부해야 하므로 여덟 교시 중 각 한 교시 이상씩은 국어, 영어, 수학에 사용해야 한다. 이 때, 나머지 다섯 교시 중 두 교시를 쉬는시간으로 택하면 되므로
${}_5C_2=10$

10.
점 B의 좌표를 $(\alpha,\ 2\beta)$라 하면, 점 C의 좌표는 $(2\alpha,\ \beta)$가 된다.
$(\because\ \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD})$
각 점이 곡선 $y=8^x$, $y=2^x$ 위에 있으므로
$2\beta=8^{\alpha}$,
$\beta=2^{2\alpha}$



$\dfrac{8^{\alpha}}{2^{2\alpha}}=2 \ \therefore \alpha=1,\ \beta=4$

직선 AD 의 기울기는 -4

11.
인수별로 부호(양음)을 따지는 것이 기본 원리이다.
주어진 식을 통분하여 정리하면

$$\frac{x^2-(n-2)x-2n+nx+2n-(x-n)}{(x-n)(x+2)}\leqq 0$$

$$\frac{x^2+x+n}{(x-n)(x+2)}\leqq 0$$

이 때, 자연수 n과 실수 x에 대하여 항상 분자가 0보다 크므로 ($x^2+x+n>0$)
구하려는 정수 x의 개수 $f(n)$은 부등식 $-2<x<n$을 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

$$\sum_{k=1}^{10} f(k)=2+3+4+\cdots+11=13\times5=66-1$$
$=65$

12.
우선, (가)에 들어갈 식이 3^{n+1}이라는 것은 $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ 을 통해서 $a_{n+1}=3a_n+2\times3^n$ 을 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{2}{3}$로 바꾸어 보면 알 수 있다.

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{2}{3}$이고 $b_2=\dfrac{4}{3}$이므로 (나)를 알 수 있다. $b_n=\dfrac{2}{3}n\ \ (n\geq 2)$이다.

따라서 (다)를 구해보면, $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ 에서

$\dfrac{2}{3}n=\dfrac{a_n}{3^n}$ 이므로 $a_n=\dfrac{2}{3}n\times 3^n(n\geq 2)$이다.

$f(2)=3^3,\ h(5)=10\times3^4,\ g(9)=6$이므로 답은 $6+30=36$이다.

13.
초점의 좌표가 $(2n,\ 0)$
두 점 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 지나는 직선의 방정식은 $y=x-2n$ 이므로 포물선과 연립하면

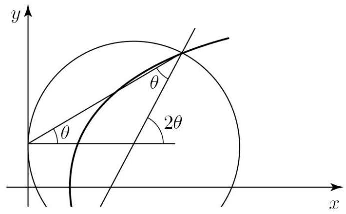
$(x-2n)^2=4nx-4n^2$

$x^2-8nx+8n^2=0$

이다. 따라서 두 근의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 $8n$이며, 원 C_n의 중심의 x좌표는 $4n$이다.

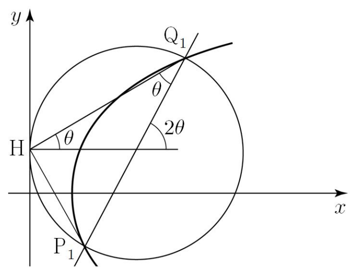
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=220$

14.



$m=\tan 2\theta$라 할 때, 양변을 t에 관하여 미분하면 $\dfrac{dm}{dt}=25$이므로

$25=2\times\sec^2 2\theta\ \dfrac{d\theta}{dt}$이다. m이 $\dfrac{4}{3}$이 되는 순간은 $\sec^2 2\theta$의 값이 $\dfrac{25}{9}$가 되는 순간이므로 $\dfrac{d\theta}{dt}$의 값은 $\dfrac{9}{2}$이다. 또, 이 때, $\tan\theta$의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.



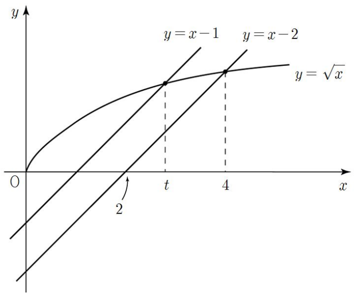
여기서, $\dfrac{\overline{\mathrm{P_1H}}}{\overline{\mathrm{Q_1H}}}$를 s라 할 때,

$\angle \mathrm{Q_1HP_1}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{P_1H}}}{\overline{\mathrm{Q_1H}}}$의 값은 $\tan\theta$이다. $\dfrac{ds}{dt}=\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}$에서

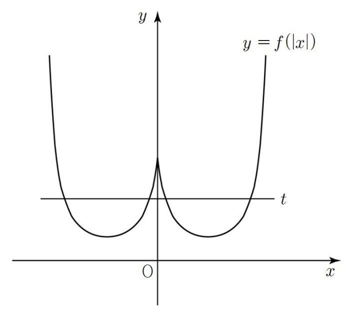
$\sec^2\theta=\dfrac{5}{4}$이므로 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{45}{8}$이다.

15.
ㄱ. $(2A+B)B=E$
$B(2A+B)=E$
따라서 위 식과 아래 식을 전개하면
$AB=BA$ (O)
ㄴ. $(2A+B)B=E$
$B^{-1}=2A+B$
따라서 B의 역행렬이 존재한다. (O)
ㄷ. $4A^2-B^2=O$
$(2A+B)(2A-B)=O$
위 식의 양 변에 $(2A+B)^{-1}$을 곱하면
$2A-B=O$이다. 따라서
$2A=B$
B대신 $2A$를 첫 번째 식에 대입하면
$(2A+2A)2A=E$
$8A^2=E$
$64A^2=E$ (X)

16.
$f(|x|)=t$로 치환하고, 방정식 $\sqrt{t}=t-k$의 해를 구하기 위해 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=x-k$를 좌표평면에 그리면 다음과 같다.

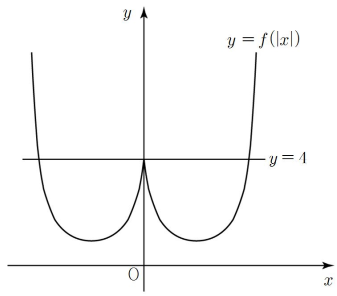


$k=1$일 때, 방정식 $\sqrt{t}=t-1$의 실근 t의 값의 범위는 2와 4사이이므로



$a_1=4$

$k=2$일 때, $t=4$이므로 $a_2=3$

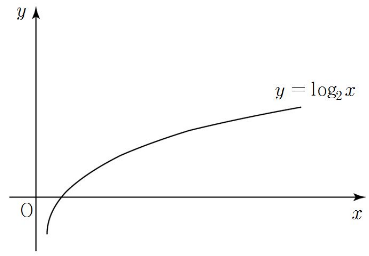


$k=3,\ 4,\ 5$일 때, $t>4$
이므로 $a_k=2$

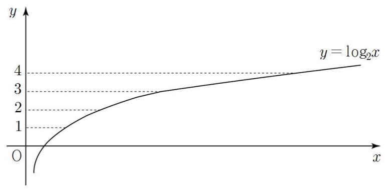
따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k=13$

M^2

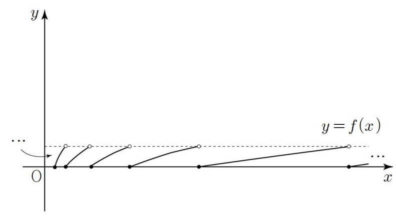
17.
함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



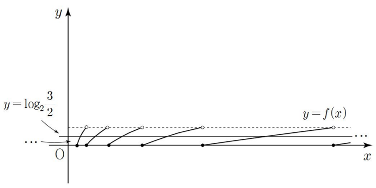
이를 통해 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같은 과정으로 그려진다.



$\Downarrow$



이 그래프가 직선 $y=\log_2\frac{3}{2}$ 과 만나는 점의 x좌표를 가장 큰 것부터 나타내면



초항이 96이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열을 이루므로

답은 $\dfrac{96}{1-\frac{1}{2}}=192$ 이다.

18.
곡선위의 점 $(x_k,\ f(x_k))$에서 접선의 방정식이 다음과 같다. $y=\dfrac{2}{x_k}(x-x_k)+2\ln x_k$

따라서 $\mathrm{P}_k(x_k-x_k\ln x_k,\ 0)$이므로
$S_k=x_k-x_k\ln x_k$

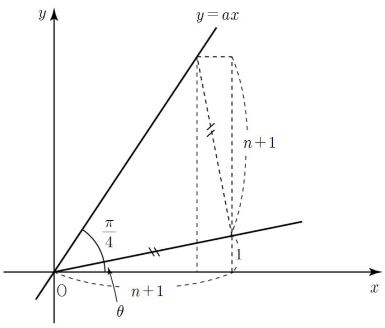
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k\ln x_k)=\int_1^2(x-x\ln x)\,dx$$
$$=\frac{9}{4}-2\ln 2$$

19.
ㄱ. $a=-2$일 때와 $a=2$일 때, 쌍곡선과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)
ㄴ. $0<a<\sqrt{3}$ 일 때, 점근선보다 기울기가 낮은 직선이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. $f(-2)=f(2)=f(\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})=1$ 이다. $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ 에서 $f(a)=2$이다.
$a>\sqrt{3},\ a<-\sqrt{3}$ 에서 $f(a)=0$ 이다.
함수 $f(a)$가 $a=m$에서 불연속이 되는 m은 $-2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2$ 이다.
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 맞다.

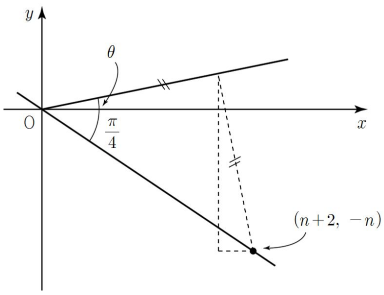
20.
$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\left|\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\right|$$
$$=\frac{\dfrac{\frac{n+2}{n}}{1-\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}}=\frac{(n+2)^2}{n^2}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\log\frac{S_n}{T_n}=2\log 55$

이 때, 좌표평면에서의 의미는 다음과 같이 나타낸다.



따라서 $a=\dfrac{1+(n+1)}{(n+1)-1}=\dfrac{n+2}{n}$



따라서 $b=-\dfrac{n}{n+2}$
참고할 문제로는 2016학년도 수능특강 수2 p.34 3번이 있다. 함께 공부해보는 것이 좋다.

21.
조건 (가)를 통해 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 오직 한 점에서 만난다. $(x\neq 0)$
조건 (나)를 통해 미분가능하려면 곡선과 직선이 접해야한다는 것을 알 수 있다.
관통하면서 접하려면 그 점은 변곡점이다.
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$
$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because \displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty)$

$g(x)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{1}{2}}$

$g(-2k)=4e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$

22.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{e^x-1}=6$$

23.
해설 1)
$(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5$
에서 ${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2=20$

해설 2)
$(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5$
$=(1+x)\times\dfrac{(1+x)^5-1}{(1+x)-1}$
이므로 $(1+x)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하면 된다.
따라서 구하는 값은 ${}_6\mathrm{C}_3=20$이다.

24.
(가)조건 에서 $f(x)=-ax^2+2x+a$
(나)조건에서
$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{x-1}{\ln x}=f'(1)=3$
$a=-\dfrac{1}{2}$ 이므로
$\therefore\ f(3)=10$

25.
$f'(2)=6,\ f'(g(0))g'(0)=18$
$f'(g(0))=f'(2)=6$
따라서 $g'(0)=3$

26.
점 P의 좌표를 $(a,\ 6-a)$라 하자. 점 P가 변환 f에 의하여 옮겨지는 점 Q는
$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 6-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-6\\ a\end{pmatrix}$이다.

점 P가 변환 g에 의해 옮겨지는 점 R은 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\6-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a-6\end{pmatrix}$이다.

$\dfrac{a-6}{a}=\dfrac{a}{a-6}$ 을 만족시키는 a이므로

$a=3$ 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{QR}}=6\sqrt{2}$ 이므로

$l^2=72$이다.

27.

$F(x)$를 두 함수의 곱으로 나타내기 위하여 함수 $f(t+x)$ 안의 $t+x$를 m이라 하면

$F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} e^{m-x}f(m)dm$

$F(x)=e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} e^{m}f(m)\,dm$

$\quad=e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} f(-m)\,dm$

$F'(x)=-e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} f(-m)\,dm$

$\quad+e^{-x}(2\times f(-2x)-f(-x))$

$F'(a)=-F(a)+e^{-a}(2\times f(-2a)-f(-a))$

따라서 $2f(-2a)-f(-a)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore 100p=50$

(함께 공부해 볼 문제로 기출문제로 2014학년도 6월 B형 27번이 있다.)

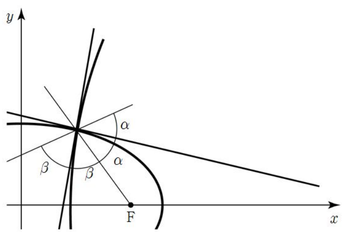
28.

$\overline{\mathrm{PF'}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}}=b$라 하면 $a+b=6$(장축의 길이)

$a-b=2$(주축의 길이)이기 때문에

$a=4$, $b=2$이다.

따라서 삼각형 PF′F에서 점 B는 선분 F′F를 $2:1$로 내분하는 점이다.



쌍곡선의 접선에서의 각의 이등분선과 타원에서의 접선에서의 외각의 이등분선이라는 것을 이용하여

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$라는 점을 통해 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값은 선분 AB의 길이의 제곱임을 알 수 있다. (피타고라스 정리)

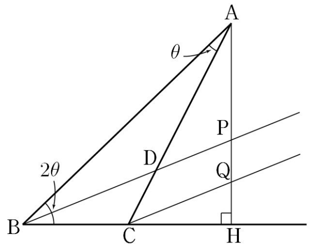
$\overline{\mathrm{F'B}}:\overline{\mathrm{FB}}:\overline{\mathrm{AF}}=2:1:3$이므로 선분 AB의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ 따라서 구하는 값은 320

(이 문제와 같이 함께 공부해 볼 문제로 (2016학년도) 수능특강 기하와 벡터 p.51 02번, p.59 유제 3번, p.12 2번이 있다. 각의 이등분선이 참고할 부분이다.)

29.

해설 1)

삼각형 ADB는 이등변삼각형이다.



내각이등분선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}$

$\overline{\mathrm{DP}}/\!/\overline{\mathrm{CQ}}$이므로 $\angle\mathrm{ADP}=\angle\mathrm{ACQ}$ (동위각)

$\angle\mathrm{DAP}$는 공통

따라서 삼각형 ADP와 삼각형 ACQ는 닮음이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}$

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta}=3$

(삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용한다.)

따라서 답은 60

해설 2)

극한의 뜻을 이용하여 풀이해 보면 삼각형 ABH에서 $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}$ 이므로

$\theta\to+0$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PH}}=1:1$의 비율로 수렴하며, 삼각형 ACH에서

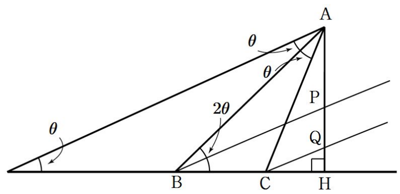
$\angle\mathrm{ACQ}=2\angle\mathrm{QCH}$ 이므로 $\theta\to+0$일 때,

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QH}}=2:1$로 수렴한다. 따라서

$\theta\to+0$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QH}}=3:1:2$로

수렴하게 된다. 따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=3$이다.

[참고]



함께 공부해 볼 문제는 2015학년도 B형 수능 20번 문항입니다.

30.

(가) 조건 $1<f(x)<2$, $f'(x)>0$을 통해 반드시 함수 $f(x)$는 변곡점을 가져야 하며, 이 때, 선분 AB의 길이의 최솟값 t를 갖는다.

따라서 변곡점의 x좌표를 s라 할 때, $f'(s)$는 최댓값 $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$이므로 $g'(x)$의 최솟값이 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)^{-1}$이라 할 수 있다. (두 기울기의 곱이 1이 되어야 하기 때문이다.)

따라서 $h(t)=\sqrt{t^2-1}$

곡선 $y=h(x)$와 x축 및 $x=2$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 $\dfrac{4}{3}\pi$이므로 답은 80이다.