차영진 미리보기 A형 해설

1	④	**2**	④	**3**	⑤	**4**	③	**5**	②
6	③	**7**	③	**8**	②	**9**	②	**10**	②
11	⑤	**12**	②	**13**	⑤	**14**	②	**15**	③
16	④	**17**	①	**18**	⑤	**19**	⑤	**20**	④
21	①	**22**	14	**23**	70	**24**	19	**25**	64
26	9	**27**	1	**28**	11	**29**	6	**30**	226

1.
$16^{\frac{3}{4}} - \log_3 81$
$= 8 - 4$
$= 4$

2.
해설 1)
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로
$2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$2A - B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 3

해설 2)
행렬 A의 모든 성분의 합이 2이므로 행렬 $2A$의 모든 성분의 합은 4이다. 행렬 B의 모든 성분의 합이 1이므로 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 $4-1=3$이다.

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+8n}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{2}{n^3}} = 5$$

4.
그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 성분의 개수는 $5\times5=25$이다.
이 중 연결된 변의 개수가 5이므로 성분 중 1의 개수는 10이다.
따라서 0의 개수=$25-10=15$

5.
해설1)
공차를 d라 하면,
$a_3 = a_1 + 2d$, $a_{11} = a_1 + 10d$ 이므로 두 식의 연립을 통해 $a_1 = -1$, $d = 1$임을 알 수 있다.
$a_7 = a_1 + 6d$
$= -1 + 6$
$= 5$

해설2)
등차중항을 이용, $a_3 + a_{11} = 2a_7$이므로
좌변의 값이 $1+9=10$이다. 따라서 $a_7 = 5$

6.
$\frac{3^{3x+2}}{9^{x^2+1}} = 3$의 양 변에 9^{x^2+1}을 곱하면
$3^{3x+2} = 3\times 9^{x^2+1}$
$\Leftrightarrow 3^{3x+2} = 3^{2x^2+3}$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$
따라서 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

7.
부등식을 이용하여 a_n으로 나타내면
$\frac{3}{5^n+1} < \frac{a_n}{5^n} < \frac{3}{5^n-2}$
$\Leftrightarrow \frac{3\times5^n}{5^n+1} < a_n < \frac{3\times5^n}{5^n-2}$
$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times5^n}{5^n+1} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{3\times5^n}{5^n-2}$
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 5$

8.
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면
$t\to0$이므로
$\lim_{t\to0}\frac{f(t+1)}{t}$
$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{(t^3+2t)f(t+1)}{t^2}\times\frac{t}{t^3+2t}\right\}$
$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{(t^3+2t)f(t+1)}{t^2}\times\frac{1}{t^2+2}\right\}$
$=24\times\frac{1}{2}$
$=12$

9.
주어진 식에 $n=1, 2, 3\cdots$을 대입하자.
$a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{3}$
$a_3 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
$\vdots$
$a_6 - a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하면
$a_6 - a_1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$이며, $a_1 = -1$이므로
$a_6 = \frac{4}{21}$

10.
태어났을 때의 몸의 길이를 b_0이라 하면,
현재 이 동물의 몸의 길이는 $4b_0$이다.
태어났을 때의 다리의 굵기를 a_0이라 하면,
현재 이 동물의 다리의 굵기는 pa_0이다.
태어났을 때와 현재 다음의 관계를 만족시킨다.
$\log b_0 = k + \frac{4}{3}\log a_0$
$\log 4b_0 = k + \frac{4}{3}\log pa_0$
위의 식에서 아래의 식을 빼면
$\log 4 = \frac{4}{3}\log p$이다.
따라서 $p = 4^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{2}$이다.

11.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는
$\lim_{x\to k-0} f(x) = f(k) = \lim_{x\to k+0} f(x)$이어야 한다.
따라서 다음과 같이 k에 대한 이차식에서 k의 값이 오직 하나가 되어야 한다.
$ak - 2 = k^2 + 2k + 2$
$\Leftrightarrow k^2 + (2-a)k + 4 = 0$
따라서 판별식이 0이 되어야 하므로,
$(2-a)^2 - 16 = 0$
$a^2 - 4a - 12 = 0$
근과 계수와의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 4이다.
($a=-2$, 6으로 a의 값을 직접 구해도 좋다.)

12.
우선 $x(t)$를 t에 관하여 미분한 값이 2가 되도록 하는 t의 값을 구한다.
$3t^2 - 4t + 3 = 2$
$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, 1$
이 때, 두 번째로 속도가 2가 되는 t의 값은 1이므로 이 순간, 점 P의 위치는 $x(1) = 2$

13.
삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$과 $\mathrm{BP}_n\mathrm{Q}_n$ 모두 밑변 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$을 공유하므로 높이의 비=넓이의 비이다.
삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$의 높이 $= n$
삼각형 $\mathrm{BP}_n\mathrm{Q}_n$의 높이 $= n+2$
따라서
$n : n+2 = 3 : 5$
$\Leftrightarrow n = 3$
$T_3 = \frac{1}{2}\times\left(8-\frac{1}{8}\right)\times5 = \frac{315}{16}$

14.
점 M_n과 Q_n의 x좌표는 동일하므로 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{M}_n$의 길이는 각각의 좌표의 y의 값의 차이다.

점 M_n의 y좌표 $=\dfrac{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}$

점 Q_n의 y좌표 $=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

점 M_n의 y좌표가 항상 점 Q_n의 y좌표보다

크므로 $l_n=\dfrac{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow\ l_n=2^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

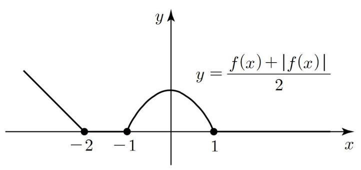
따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n+l_{n+1}}{2^n}=\frac{3}{2}$

15.

ㄱ. $x=1$에서의 우극한 값이므로 -1이다. (O)

ㄴ. $x=-1$에서의 좌극한 값이므로 -1이다. (X)

ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$는 $f(x)\geq 0$일 때, $f(x)$이며, $f(x)<0$일 때, 0이다. 따라서 함수 $\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$의 개형은 다음과 같다.



따라서 실수 전체의 집합에서 연속이다. (O)

16.

(가) 앞의 식이 $a_{n+1}=3a_n+2\times 3^n$라는 것, 뒤의 식이 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{2}{3}$라는 것을 통하여 (가)에 들어갈 식이 3^{n+1}이라는 것을 알 수 있다. ($b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$을 통해서도 알 수 있다.)

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{2}{3}$이고 $b_2=\dfrac{4}{3}$이므로 (나)를 알 수 있다. $b_n=\dfrac{2}{3}n\ \ (n\geq 2)$이다.

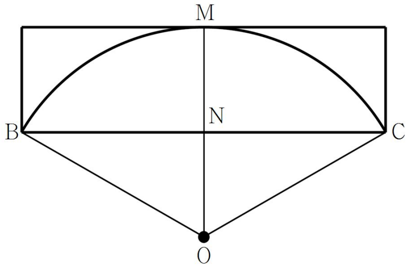
따라서 (다)를 구해보면, $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$에서

$\dfrac{2}{3}n=\dfrac{a_n}{3^n}$이므로 $a_n=\dfrac{2}{3}n\times 3^n(n\geq 2)$이다.

$f(2)=3^3,\ h(5)=10\times 3^4,\ g(9)=6$이므로 답은 $6+30=36$이다.

17.

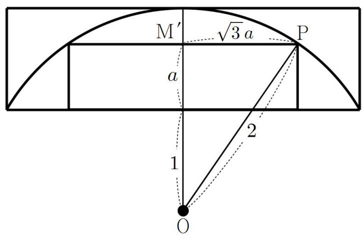
중점 M과 두 점 B, C를 지나는 도형은 원의 일부이므로 원의 중심을 O라 하고, 그 점을 찾아보면 다음과 같다.



여기서, 선분 ON의 길이는 1이고, 선분 OC의 길이는 2이고, 선분 BC의 길이는 $2\sqrt{3}$이다. 이를 통해 $\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{2}{3}\pi$임을 알 수 있으며, 그림 R_1의 호의 길이를 구할 수 있다.

가장 큰 호의 길이$=2\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

이제 그림 R_2에서 그려진 것과 같이 두 번째로 긴 호의 길이를 구하기 위해 보조선을 사용하면 다음과 같다.



$\angle\mathrm{OM'P}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 $\mathrm{OM'P}$에서 피타고라스의 정리를 이용하면

$2^2=(\sqrt{3}a)^2+(a+1)^2$

$\Leftrightarrow\ 4a^2+2a-3=0$

여기서 근의 공식을 통해 양수 a를 구한다.

$a=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}$

큰 직사각형의 세로의 길이 1에서 두 번째로 작은 직사각형의 세로의 길이 a로 일정 비율로 축소되었으므로 공비는

$a=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}$이다. 따라서

$l_n=\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{1-\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)}$

$=\dfrac{20+4\sqrt{13}}{9}\pi$

18.

ㄱ. $A^2B+A^2=-E$에서

$A^2(B+E)=-E$이므로 $A^2(B+E)=-E$에서 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

$A^{-1}A^2(B+E)=-A^{-1}$

$\Leftrightarrow\ A(B+E)=-A^{-1}$

$\Leftrightarrow\ A(B+E)A=-E$

즉, $ABA+A^2=-E$이다.

식 $A^2B+A^2=-E$와 비교하면

$ABA=A^2B$이며, 행렬 A의 역행렬이 존재하므로

$A^{-1}ABA=A^{-1}A^2B$

$\Leftrightarrow\ BA=AB$ (O)

ㄴ. ㄱ.에서 두 행렬 A, B의 교환법칙이 성립함을 알았다.

따라서 두 번째 식인 $2AB+A=B+BA$를 $AB+A-B=O$로 나타낼 수 있다.

이 때, 다음과 같이 식 변형이 가능하다.

$(A-E)(B+E)=-E$

따라서 행렬 $A-E$의 역행렬이 $-E-B$로 존재한다. (행렬 $(A-E)X=E$가 되도록 형태를 맞추어 주는 것이 핵심이다.) (O)

ㄷ. 주어진 행렬의 첫 번째 식

$A^2(B+E)=-E$와 변형된 두 번째 식

$(A-E)(B+E)=-E$을 비교하면

$(B+E)^{-1}=-A^2=-(A-E)$임을 알 수 있으며, $A^2-A+E=O$이다.

이 식의 양 변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$A^3+E=O$이다. (O)

19.

$a_4=a_5=4$

$a_6=a_7=5$

따라서 답은 18

20.

좌변 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}ka_{n-k}$에 대하여 합의 기호 안에 있는 항들에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하고 나열하여 관찰해보자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}ka_{n-k}=$

$a_{n-1}+2a_{n-2}+3a_{n-3}+\ \cdots\ +(n-1)a_1$

이다.

이제, n자리에 n대신 $n-1$을 넣어보자. 즉, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}ka_{n-k-1}$에 대하여 합의 기호 안에 있는 항들에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2$를 대입하고 나열하여 관찰해보자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}ka_{n-k-1}=$

$a_{n-2}+2a_{n-3}+\ \cdots\ +(n-2)a_1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}ka_{n-k}-\sum_{k=1}^{n-2}ka_{n-k-1}=$

$\{a_{n-1}+2a_{n-2}+3a_{n-3}+\ \cdots\ +(n-1)a_1\}-$

$\{a_{n-2}+2a_{n-3}+\ \cdots\ +(n-2)a_1\}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k$이다.

$\displaystyle\therefore\sum_{k=1}^{n-1}a_k=2n-1+2^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{8}a_n$의 값을 구하기 위해 $n=9$를

대입하면 $17+256=273$이다.

21.
(다) 의 식의 양 변을 h로 나누면
$\dfrac{f(h)-f(0)}{h} \geq \dfrac{1}{3}$이다.
즉, 두 점 $(0,\ f(0))$, $(h,\ f(h))$를 잇는 직선의 기울기가 항상 $\dfrac{1}{3}$ 보다는 크거나 같아야 한다.
(나)조건에서, 두 점 $(0,\ f(0))$, $(3,\ f(3))$을 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로, 함수 $f(x)$는 두 점 $(0,\ f(0))$, $(3,\ f(3))$을 지나는 직선과 $x=3$에서 접하고, 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$ 임을 알 수 있다.
따라서 식을 다음과 같이 세운다.
$f(x)-\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)=x(x-3)^2$
$f(5)=20+\dfrac{5}{3}+1$ 따라서 $f(5)=\dfrac{68}{5}$

22.
$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+15)(x+1)}{x+1}$
$=\lim\limits_{x\to-1}(x+15)$
$=14$

23.
$f(x)=x^3-5x+4$의 양 변을 미분하면
$f'(x)=3x^2-5$
$f'(5)=70$

24.
무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+4}$가 수렴하므로
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-2^{-n+4}\right)=3$을 전개할 수 있다.
따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+4}=3$
이 때, 수열 2^{-n+4}는 초항이 8이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+4}=16$이다.
따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=19$이다.

25.
공비가 $\dfrac{1}{2}$이므로 $a_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=a_7$이다
따라서 $a_2=64$

26.
주어진 연립방정식을 정리하면 다음과 같다.
$\begin{pmatrix}k-3 & a\\ 2 & k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$
이 때, 오직 한 쌍의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix}k-3 & a\\ 2 & k+1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다.
따라서 $(k-3)(k+1)\neq 2a$이어야 한다.
좌변을 k에 대한 이차함수 $f(k)$로 본다면, $f(k)$의 최솟값보다는 $2a$가 작아야한다.
$f(k)$의 최솟값은 $k=1$일 때, -4이므로
$-4>2a$
정수 a의 최댓값은 -3이다.
따라서 $p=-3,\ p^2=9$

27.
점 A에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선 l에 수직이고, 점 A를 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+2$이다.
이 직선이 곡선 $y=-x^2+a$에 접하므로, 그 접점을 $(t,\ -2t+2)$라 하면, 곡선위의 점 t에서의 접선의 기울기는 $-2t$이며 이 값이 -2가 되려면 $t=1$이어야 한다.
이를 통해 접점의 좌표를 구할 수 있으며 접점은 $(1,\ 0)$이다. 곡선 $y=-x^2+a$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $a=1$, $a^2=1$

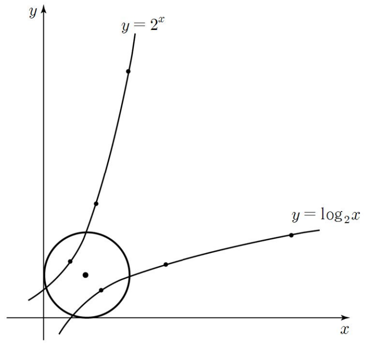
[참고]
직선 $y=-2x+2$가 곡선 $y=-x^2+a$에 접하므로 방정식 $-x^2+a=-2x+2$는 중근을 갖고, 이 중근의 값은 접점의 x좌표를 뜻한다.
따라서 $a=1$일 때, 그 접점은 $(1,\ 0)$이다.

28.
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 차례대로 점 P_n을 좌표평면에 나타내어 보면, 점 P_n은 항상 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$위에 있음을 알 수 있다.
P_1의 좌표는 $(2,\ 1)$, P_3의 좌표는 $(6,\ -1)$, P_5의 좌표는 $(10,\ -3)\ \cdots$
즉, x좌표는 4씩 증가하며 y좌표는 2씩 감소한다. P_9의 좌표는 $(18,\ -7)$이다.
따라서 $a+b=11$

29.
(나) 조건에서 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 $f(1)=g(1)$이며, 다음과 같이 식을 변형하면
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}=-3$에서
$f'(1)-g'(1)=-3$이다.
이제 (가) 조건에서 양 변을 미분하자.(다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.)
$f'(x)=2(x-1)\times g(x)+(x-1)^2g'(x)+3$
구하려는 값이 $g'(1)$이므로 $x=1$을 대입하면, $f'(1)=3$임을 알 수 있으므로 $g'(1)=6$이다.

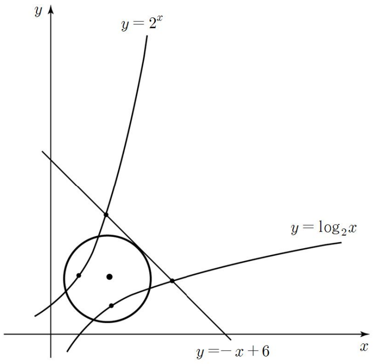
[참고]
다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때 몫을 $g(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 다음 항등식이 성립한다.
$f(x)=(x-\alpha)^2g(x)+R(x)$
이 때,
$f(x)-R(x)=(x-\alpha)^2g(x)$
가 성립하고 방정식 $f(x)-R(x)$는 인수정리에 의하여 중근 $x=\alpha$를 갖고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=R(x)$는 $x=\alpha$에서 접한다.

30.
(나)의 점 $(a,\ 2^a)$는 곡선 $y=2^x$위의 x좌표가 정수인 점이고, 점 $(2^b,\ b)$는 곡선 $y=\log_2 x$위의 y좌표가 정수인 점이다.
$f(1)$을 구하기 위하여 $n=1$을 대입하여 원과 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이 때, 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$은 원의 내부에 있으므로, 원 외부의 모든 점과 연결했을 때, 반드시 원과 만난다.
따라서 $1\leq a\leq 10$인 a에 대하여는 $a=1$을 제외한 모든 a, $1\leq b\leq 10$인 b에 대하여는 $b=1$을 제외한 모든 b가 가능하므로,
가능한 a의 개수=9
가능한 b의 개수=9이다.
따라서 $f(1)=9\times9=81$이다.

$n=2$일 때,



$f(2)$와 비슷한 경우로, 가능한 a의 개수=9
가능한 b의 개수=9이지만 다음과 같이 두 점 (4, 2), (2, 4)를 지나는 직선은 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$에 접하므로 제외시켜야 한다. 따라서
$f(2)=9\times9-1=80$이다.

$f(3)$의 경우에는 가능한 a의 개수=8
가능한 b의 개수=8이지만, 두 점 (1, 2), (2, 1)을 지나는 직선은 원과 만나지 않으므로 개수를 세주어야 한다.
따라서 $f(3)=8\times8+1=65$
$f(1)+f(2)+f(3)=81+80+65=226$