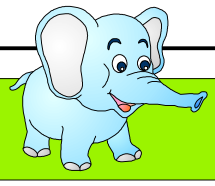
2016학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(B 형) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ②　(출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$AB=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+6 & -a+4 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$

$a+6=10$

$a=4$

2) [정답] ③　(출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{4}{e^x+1}=1\times\frac{4}{2}=2$

3) [정답] ②　(출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 삼각함수의 합성을 할 수 있는가?

[해설]

삼각함수 합성을 하면

$f(x)=\sqrt{4^2+3^2}\sin(\theta+\alpha)+a=5\sin(\theta+\alpha)+a$가 된다.

(단, $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$)

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $5+a$가 되고,

이 때, 이 값이 7이므로 $a=2$이다.

4) [정답] ④　(출제자 : 15이상민)

[출제의도] 정적분을 할 수 있는가?

[해설]

$\int_{-1}^{a}(1+x)^3dx=\frac{1}{4}(1+a)^4-0=2^{10}$

$(1+a)^4=2^{12}$

$1+a=8$

$\therefore a=7$

5) [정답] ③　(출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 공간좌표의 내분점을 구할 수 있는가?

[해설]

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 x좌표가 4이므로

$\frac{2a+2}{3}=4$이므로 $a=5$이다.

따라서 $\mathrm{A}(2,1,3)$, $\mathrm{B}(5,3,-1)$이고,

선분 AB의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-5)^2+(1-3)^2+(3+1)^2}=\sqrt{29}$이다.

6) [정답] ②　(출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$\log_{\sqrt{3}}x+\log_9\frac{1}{x}=3$을 로그의 성질을 이용하여 정리하면

$2\log_3x-\frac{1}{2}\log_3x=3$이고, $\log_3x=2$이다.

그러므로 $x=3^2=9$이다.

7) [정답] ①　(출제자 : 14임현우)

[출제의도] 1. 무한등비급수를 계산할 줄 아는가?

2. 무한급수의 성질(시그마의 성질)을 잘 아는가?

($\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$와 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 다르다는 것을 명심하자!

－ 특히 답을 $9\times15=135$로 계산한 친구들!)

[해설]

$\{a_n\}$의 첫째항을 a, $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 두면

$\frac{a}{1-\frac{2}{3}}=9$, $\frac{b}{1-\frac{2}{3}}=15$

$\therefore a=3$, $b=5$

수열 $\{a_nb_n\}$은 등비수열끼리 곱했기 때문에 역시 등비수열이다.

첫째항은 $a_1b_1=ab$이고, 공비는 $r\times r=r^2$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$을 계산하면

$\frac{ab}{1-r^2}=\frac{15}{1-\frac{4}{9}}=\frac{15\times9}{5}=27$

8) [정답] ③ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 주어진 조건을 이용해 확률 계산을 할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$를 만족시킨다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{5}{8}$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$ 이 되고,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$이 된다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{8+9-3}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{7}{12}$

9) [정답] ① (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 무한급수를 정적분으로 고치고 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{4}{n}$$

$$=2\int_1^3 f(x)dx$$

$$=2\int_1^3 2^x\,dx$$

$$=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^3=\frac{12}{\ln 2}$$

10) [정답] ① (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 직선과 평면의 위치관계를 이용하여 방향벡터와 법선벡터의 관계를 이해하는가?

[해설]

직선과 평면이 수직이면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 평행해야 한다.

직선 $\frac{x}{2}=-y=\frac{z}{3}$의 방향벡터 $\vec{d}=(2,-1,3)$

평면의 법선벡터 $\vec{h}=(2,\ a,\ 3)$이므로 $a=-1$

평면 $2x+ay+3z=b$이 점 $(2,\ -1,\ 3)$을 지나므로

$4-a+9=b$에서 $a=-1$이므로 $b=14$

따라서 $2a+b=12$

11) [정답] ④ (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 정규분포의 성질을 이용해 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

자장면 1그릇의 무게를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,30^2)$을 따른다.

자장면 4그릇의 무게의 평균을 확률변수 $\overline{X}$ 라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=300, \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{30^2}{4}=225=15^2$이고

$\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(300,15^2)$를 따른다.

$P(\overline{X}\le\frac{1140}{4})=P(\overline{X}\le 285)$

$=P(Z\le\frac{285-300}{15})=P(Z\le -1)$

$=0.5-P(-1\le Z\le 0)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

12) [정답] ⑤ (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 쌍곡선의 접선을 구할 수 있는가?

[해설]

F 와 F′의 좌표를 구해보자.

쌍곡선의 초점의 x좌표는 $\pm\sqrt{3+6}=\pm 3$이기 때문에,

F의 좌표는 $(3,0)$이고, F′의 좌표는 $(-3,0)$이다.

쌍곡선 위의 한 점 (p,q)에서의 접선이 선분F′F을 $2:1$로 내분하는 점을 지난다고 했으므로,

F′와 F을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 A라고 하면

A의 좌표는 $(1,0)$이 된다.

쌍곡선 위의 점 (p,q)에서의 접선의 방정식은 $\frac{p}{3}x-\frac{q}{6}y=1$,

이 방정식에 $(1,0)$을 대입하면 $\frac{p}{3}=1$ 이므로 $p=3$ 이다.

또한, 점 (p,q)가 쌍곡선 위의 점이므로 $\frac{p^2}{3}-\frac{q^2}{6}=1$을 만족하고,

위에서 구한 $p=3$을 대입하면 $\frac{q^2}{6}=2$가 되므로 $q^2=12$이다.

따라서 구하고자 하는 값인 p^2+q^2의 값은 $3^2+12=21$이다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$a=-2$일 때, 곡선 $f(x)$는 $-2x\cos\pi x$이다.

곡선 위의 점 $\left(\frac{1}{2},0\right)$에서 그은 접선은

$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$로 쓸 수 있기 때문에,

$m+n$의 값은 $\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)$이다.

$f'(x)$를 구해보면

$f'(x)=-2\cos\pi x+2\pi x\sin\pi x$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)$가 π인 것을 구하면 답은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

14) [정답] ③ (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 일차변환을 통한 점의 이동을 할 수 있는가?

[해설]

원점 O 를 중심으로 θ만큼 회전시키는 변환을 g라 하고, 원점 O 를 기준으로 k배 확대한 변환이 h임을 안다.

점 $(2, -2\sqrt{3})$가 곡선위의 점이므로, a가 $-\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 이 점이 합성변환 $g \circ h$에 의해 옮겨지는 점은, 원점을 기준으로 θ만큼 회전시키고, 원점으로부터 이루는 거리가 k배 확대된 점이다. θ가 최대인 순간을 물었다. 원점에서 곡선 위의 점 $(t, f(t))$ 에 그은 직선을 생각해 보면, 그 직선의 기울기는 $\dfrac{-\sqrt{3}t\cos\pi t}{t}$ 즉, $-\sqrt{3}\cos\pi t$이다. $t=1$일 때, 그 기울기가 최대가 되고, 그 점과 x축이 이루는 각 또한 최대가 되어 θ또한 최대가 되는 것을 알 수 있다. 점 $(2, -2\sqrt{3})$가 이동하는 점은 $t=1$일 때인 $(1, \sqrt{3})$이다. 원점으로 부터의 거리를 따져보면, 그 길이가 4에서 2로 $\dfrac{1}{2}$배가 되었으므로, k의 값은 $\dfrac{1}{2}$이고, 점 $(2, -2\sqrt{3})$과 점 $(1, \sqrt{3})$이 이루는 각인 θ의 값은 $\dfrac{2}{3}\pi$이다. 따라서 θk의 값은 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

15) [정답] ① (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 조건을 만족시키는 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

$$a_n = \frac{S_n - 3^{n+1}}{n} + 2 \cdot 3^n \ (n \ge 2)$$

에서 양변에 n을 곱하면

$na_n = S_n - 3^{n+1} + 2n \cdot 3^n$이므로

$na_n = S_n + (2n-3) \cdot 3^n$ $\cdots$ ㉠

$(n-1) \cdot a_{n-1} = S_{n-1} + (2n-5) \cdot 3^{n-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$na_n - (n-1)a_{n-1} = a_n + 4(n-1) \cdot 3^{n-1}$이 되고,

$(n-1)a_n = (n-1)a_{n-1} + 4(n-1) \cdot 3^{n-1}$이므로

$a_n = a_{n-1} + \boxed{4 \cdot 3^{n-1}}\ (n \ge 3)$

n대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^n\ (n \ge 2)$ 이 되고,

수열$\{a_n\}$의 일반항 $a_n = a_2 + \boxed{\sum_{k=2}^{n-1} 4 \cdot 3^k}\ (n \ge 3)$

$f(n) = 4 \cdot 3^{n-1}$, $g(n) = \sum_{k=2}^{n-1} 4 \cdot 3^k = 2(3^n - 9)$

$\therefore \dfrac{f(7)}{g(4)} = \dfrac{81}{4}$

16) [정답] ④ (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 주어진 함수를 통해 교점을 구하고 이를 활용하여 구하고자 하는 값을 추론할 수 있는가?

[해설]

2번의 시행에서 뽑은 카드에 적혀있는 수를 순서대로 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $\overline{X}=2$가 되는 경우는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$이다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=2) = \frac{1}{2}p \times \frac{1}{2}p + (1-p)(1-p) + \frac{1}{2}p \times \frac{1}{2}p$

$= \frac{1}{4}p^2 + 1 - 2p + p^2 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{3}{2}p^2 - 2p + 1 = \frac{3}{2}(p - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$이므로

$p = \dfrac{2}{3}$일 때, $P(\overline{X}=2)$의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

17) [정답] ⑤ (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 행렬의 성질을 이용해 주어진 식을 변형하여 문제를 풀어낼 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

$A^2 - 2BA = E$에서 $(A-2B)A = E$이다.

따라서 행렬 $A-2B$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참)

ㄱ에서 역행렬이 존재하기 때문에 $(A-2B)A = E = A(A-2B)$ 이므로 $AB = BA$이다.

ㄷ. (참)

ㄱ과 ㄴ이 참인 것을 이용해서 $A^2 - 2B^2 = AB$을 정리해보자.

먼저 $A^2 = 2BA + E$이므로, $A^2 - 2B^2 = AB$에 대입해보면

$2BA + E - 2B^2 = AB$이다.

한편, $AB = BA$이므로 $2AB + E - 2B^2 = AB$이고

즉 $AB - 2B^2 + E = O$이다.

$AB - 2B^2 + E = O$에서 $2B^2 - AB = E$이고

이를 인수분해하면 $B(2B - A) = -B(A - 2B) = E$이다.

이 식에서 $A - 2B$의 역행렬이 $-B$이고 $-B$는 $(A-2B)A = E$에서 구한 역행렬 A와 같으므로 $A = -B$이다.

따라서 이 식을 $A^2 - 2BA = E$에 대입하면, $A^2 + 2A^2 = E$이므로, $3A^2 = E$이다.

[별해]

$A^2 - 2B^2 = AB$는 $A^2 - AB - 2B^2 = O$이고 이 식을 인수분해하면 $(A-2B)(A+B) = O$이다. 한편, $A-2B$의 역행렬이 존재하므로, 양변에 $(A-2B)^{-1}$을 곱하면 $A + B = O$이어야 한다.

따라서 $A = -B$이다.

18) [정답] ② (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 주어진 함수를 통해 교점을 구하고 이를 활용하여 구하고자 하는 값을 추론할 수 있는가?

[해설]

점 A의 x좌표가 1보다 크므로 점 A는 함수 $y = n\log_n x$와 $y = n$의 교점이다.

$n = n\log_n x \Leftrightarrow 1 = \log_n x$

$\therefore x = n$

점 B의 x좌표가 1보다 작으므로 점 B는 함수 $y = -n\log_n x$와 $y = \dfrac{n}{2}$의 교점이다.

$\frac{n}{2} = -n\log_n x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \log_n x$

$\therefore x = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 P 이라 하면, 사각형 ABCD의 넓이는 사다리꼴 ABCP의 넓이에서 삼각형 ADP의 넓이를 뺀 값이다.

(사다리꼴 ABCP의 넓이)$=\frac{1}{2}(n+\frac{n}{2})(n-\frac{1}{\sqrt{n}})$

(삼각형 ADP의 넓이)$=\frac{1}{2}n(n-1)$이다.

이를 토대로 구하면

$S_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{3n}{2}(n-\frac{1}{\sqrt{n}}) - (n^2-n)\right\}$이고 구하고자하는 값이

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}n^2 + n - \frac{3}{2}\sqrt{n})$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{S_n}$이고 S_n의 최고차항의 계수가 n^2이므로 최고차항의 계수를 비교하는 것으로 값을 구할 수 있다.

(S_n의 최고차항의 계수)$=\frac{1}{4}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{S_n} = 4$이다.

19) [정답] ④ (출제자 : 14임현우)

[출제의도]

1. 수학적 확률의 정의를 정확히 아는가? (표본공간의 원소 설정)

2. 여사건의 확률을 이용하여 계산할 줄 아는가?

[해설]

7장의 카드 중 4장을 임의로 배열하는 경우의 수는 ${}_7P_4$이다.

(왜 ${}_7P_4 \times \frac{1}{2!}$가 아니라 ${}_7P_4$인지 이해가 되지 않는 학생은 해설 하단에 있는 '수학적 확률'에 대한 설명을 참고하자.)

카드에 적힌 숫자가 크지 않은 것부터 배열하는 경우의 수를 구해보자. 먼저, ${}_7C_4$가 아님을 주의하자!

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$에서 숫자가 크지 않은 것부터 배열하는 경우의 수는 ${}_7C_4$가 맞지만, 이 문제에서는 1을 2개까지 중복해서 선택할 수 있기 때문에 (1, 1, 2, 3)을 선택한 경우 배열하는 경우의 수가 2가지가 된다. 그래서 1이 적힌 카드가 2번 쓰인 경우, 1번 쓰인 경우, 쓰이지 않은 경우를 나누어서 생각해야한다.

1) 1이 적힌 카드가 2번 쓰인 경우

1이 적힌 카드를 제외한 5장의 카드에서 2장을 고르는 경우의 수 ${}_5C_2$

예를 들어 2, 3을 골랐다고 하면 1, 1, 2, 3을 크지 않은 것부터 배열하는 경우의 수는 2가지

따라서 $2\times{}_5C_2$

2) 1이 적힌 카드가 1번 쓰인 경우

1이 적힌 카드 2장 중 한 장을 고르는 경우의 수 ${}_2C_1 = 2$

1이 적힌 카드를 제외한 5장의 카드에서 3장을 고르는 경우의 수 $= {}_5C_3$

따라서 $2\times{}_5C_3$

3) 1이 적힌 카드를 쓰지 않는 경우

1이 적힌 카드를 제외한 5장의 카드에서 4장을 고르는 경우의 수 $= {}_5C_4$

따라서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열했을 때, 나열된 순서에서 카드에 적힌 숫자가 크지 않은 것부터 배열되었을 확률은

$$\frac{(2\times{}_5C_2)+(2\times{}_5C_3)+({}_5C_4)}{{}_7P_4}$$

이제 가장 큰 숫자가 12의 약수였을 확률을 조사해보자.

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12인데, 네 장의 카드를 배열 했을 때 가장 큰 숫자가 나올 수 있는 숫자는 3, 4, 5, 6이다. 따라서 가장 큰 숫자가 12의 약수가 되는 대상은 3, 4, 6이다. 이 경우 가장 큰 숫자가 5일 확률을 빼주는 것(여사건)이 보다 계산이 편할 것이다.

가장 큰 숫자가 5이면서 크지 않은 것부터 배열될 경우의 수를 세 보자. 앞에서 구했던 방법과 같이 1이 2번 쓰인 경우, 1번 쓰인 경우, 쓰이지 않은 경우로 나누어 구하면 된다.

1) 1이 2번 쓰인 경우 => 11( )5

( )에 들어갈 수를 결정하는 경우의 수 : ${}_3C_1$

11이 위치가 서로 바뀔 수 있는 경우의 수 : 2

따라서 ${}_3C_1\times 2$

2) 1이 1번 쓰인 경우 => 1( )( )5

1을 고르는 경우의 수 : ${}_2C_1 = 2$

( )에 들어갈 수를 결정하는 경우의 수 : ${}_3C_2$

따라서 $2\times{}_3C_2$

3) 1이 쓰이지 않은 경우 => ( )( )( )5

( )에 들어갈 수를 결정하는 경우의 수 : ${}_3C_3$

따라서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열했을 때, 나열된 순서에서 카드에 적힌 숫자가 크지 않은 것부터 배열되었으면서 가장 큰 수가 5일 확률은

$$\frac{(2\times{}_3C_1)+(2\times{}_3C_2)+({}_3C_3)}{{}_7P_4}$$

따라서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열했을 때, 나열된 순서에서 카드에 적힌 숫자가 크지 않은 것부터 배열되었으면서 가장 큰 수가 12의 약수일 확률은

$$1-\frac{\frac{(2\times{}_3C_1)+(2\times{}_3C_2)+({}_3C_3)}{{}_7P_4}}{\frac{(2\times{}_5C_2)+(2\times{}_5C_3)+({}_5C_4)}{{}_7P_4}} = \frac{32}{45}$$

★ 수학적 확률이 정의되기 위한 조건

여러분의 교과서를 보면 수학적 확률에 대한 정의가 잘 써져 있겠지만, 수학적 확률은 표본 공간 내의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같아야 정의된다. 예를 들어 이해해보자.

1, 1, 2가 적힌 크기와 모양이 같은 공 3개가 들어있는 상자에서 2개의 공을 뽑을 때, 2가 적힌 공을 뽑을 확률을 구하라는 문제가 있다. 여기서 공을 뽑는 경우의 수를 (1, 1)과 (1, 2)의 두 가지로만 생각해서 $\frac{1}{2}$라고 답하면 틀린 답이다. 왜냐하면, 공을 뽑을 때 (1, 2)을 뽑을 가능성은 (1, 1)을 뽑을 가능성의 2배이기 때문이다.

(1번 공 하나를 1_a, 다른 하나를 1_b라고 명명하면, $(1_a, 1_b)$, $(1_a, 2)$, $(1_b, 2)$이기 때문)

따라서 위와 같이 세 공을 각각 1_a, 1_b, 2라고 생각해주어야 한다. (같은 1이 적힌 공이라도 다르게 생각해주어야 한다.)

그래서 위의 예시문제에 대한 답은 $\frac{1}{3}$이 된다. ($\frac{{}_1C_1 \times {}_2C_1}{{}_3C_2}$)
위의 예시와 상황을 잘 이해하며 문제를 잘 이해하시길 바랍니다.
2016학년도 9월 평가원 수학 B형 15번 문제에 대해 제대로 이해했는지 묻고자 출제하였습니다.

☺ 같이 풀어보면 좋은 문제 1

−2016.09평가원.B.15

15. 주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[정답] ① $\frac{1}{15}$

☺ 같이 풀어보면 좋은 문제 1

−2016 엡실론 2회 B형 후보문제

주머니에 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열했을 때, 첫 번째 공과 네 번째 공에 각각 적힌 숫자의 차와 두 번째 공과 세 번째 공에 각각 적힌 숫자의 차의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{19}{35}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{23}{35}$
④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{27}{35}$

[정답] ③ $\frac{23}{35}$

[출제의도]
1. 수학적 확률의 정의를 정확히 아는가? (표본공간의 원소 설정)
2. 여사건의 확률을 이용하여 계산할 줄 아는가?

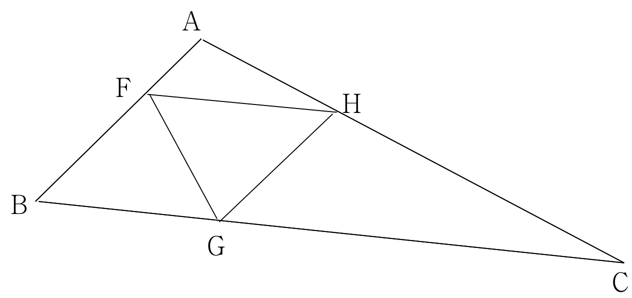
[해설]

$$1 - \frac{(4\times3\times2)\times(3\times2\times2)}{{}_7P_4} \text{ 또는 } 1 - \frac{{}_4C_2 \times {}_3C_2 \times 4 \times 2 \times 2}{{}_7P_4} = \frac{23}{35}$$

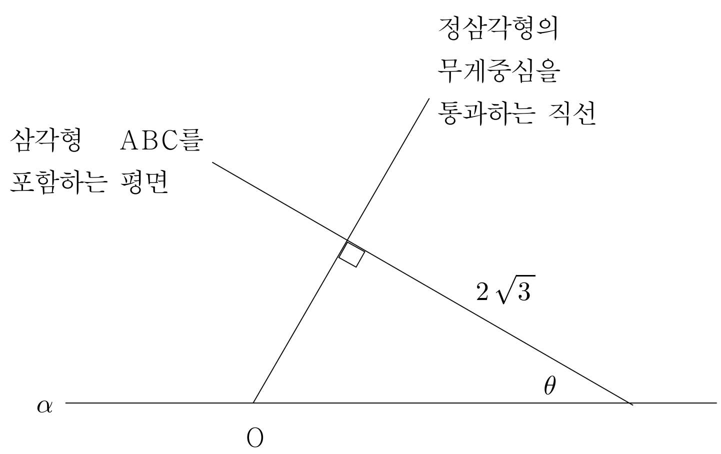
20) [정답] ⑤ (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 1. 점들의 올바른 자취를 구할 수 있는가?
2. 직선과 평면이 이루는 각을 유추해 낼 수 있는가?

[해설]
먼저, 삼각형 ABC위에 정삼각형 FGH를 그려보자.
선분 BC의 길이가 18이므로, 선분 FH의 길이를 x라 하면, 선분 FA의 길이는 $\frac{x}{2}$이므로, 정삼각형의 한 변의 길이는 6임을 알 수 있다.



이제 평면 α위의 점 O를 찾기 위해, 점 F,G,H와 같은 거리에 있는 점을 생각해 보면, 정삼각형 FGH의 무게중심을 지나고, 삼각형 ABC와 수직인 직선임을 알 수 있다. 선분 FH가 선분 BC와 평행하므로, 점 G와 정삼각형의 무게중심을 이은 선분은 선분 BC와 수직이다. 정삼각형의 한 변의 길이가 6인 것을 이용하면, 점 G와 정삼각형의 무게중심을 이은 선분의 길이는 $2\sqrt{3}$이다. 이제 점 O의 위치를 알기 위해 그림을 그려보면,



이렇게 그릴 수 있는데, 이를 통해 점 O의 위치를 알 수 있다. 점 O와 정삼각형의 무게중심을 이은 선분이 사면체의 높이라고 생각하면, 그 높이는 $2\sqrt{3}\times\tan\theta$이고, 문제에서 $\cos\theta = \frac{3}{5}$인 것을 주었으므로, $\tan\theta = \frac{4}{3}$이다. 따라서 사면체의 부피는

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2\times2\sqrt{3}\times\frac{4}{3} = 24$이다.

21) [정답] ③ (출제자 : 11양종현)

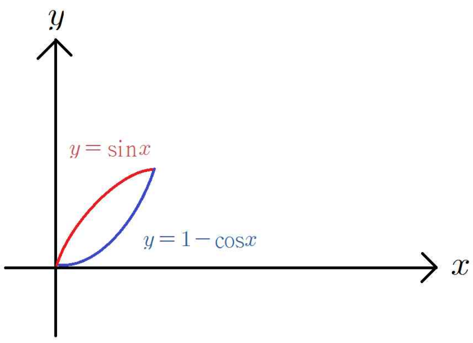
[출제의도] 정적분으로 정의된 점대칭 함수의 그래프를 그리고 경우의 수를 파악할 수 있는가?

[해설] <컬러로 보세요!!>

(가) 조건의 함수를 해석하기 위하여 n의 자리에 정수를 각각 대입해보자.

ⅰ) $n=0$일 때

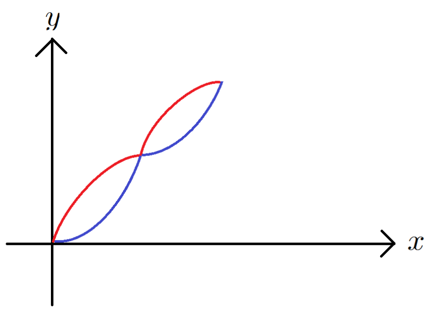
$f(x)=\sin x$ 또는 $f(x)=1-\cos x$이다. $y=\sin x$와 $y=1-\cos x$의 그래프를 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 동시에 그려보면 아래 그림과 같다.



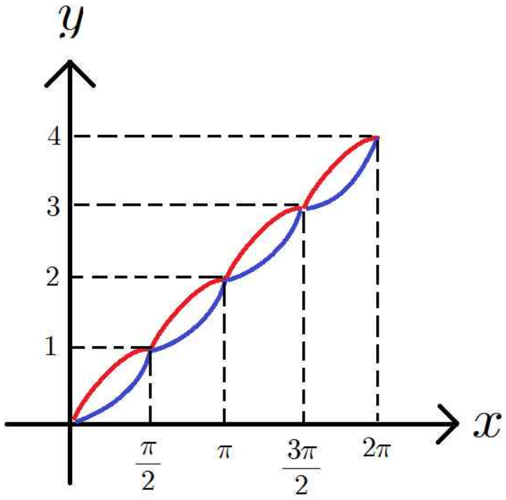
ⅱ) $n=1$일 때

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x+1$ 또는 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2-\cos x$이다. 여기서 $x+\frac{\pi}{2}=t$로 치환하면

$f(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+1$ 또는 $f(t)=2-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$인데 각각의 식은 $n=1$일 때의 함수를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수이다. $n=1$일 때의 t의 구간은 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$이다. 이 그래프를 $n=0$일 때와 이어서 그려보면 아래 그림과 같다.

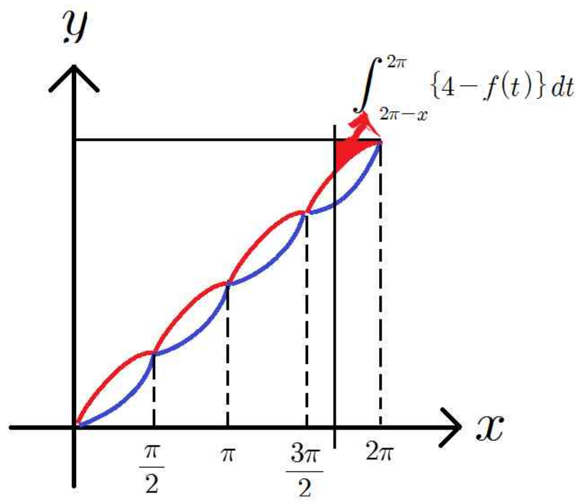


같은 방법으로 $n=2$일 때와 $n=3$일 때의 그래프도 같이 그려보면 다음과 같다.

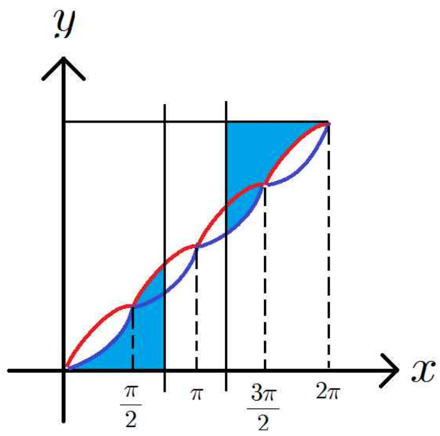


위 그림에서 각각의 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$마다 함수를 하나를 택할 수 있는 상황이다.

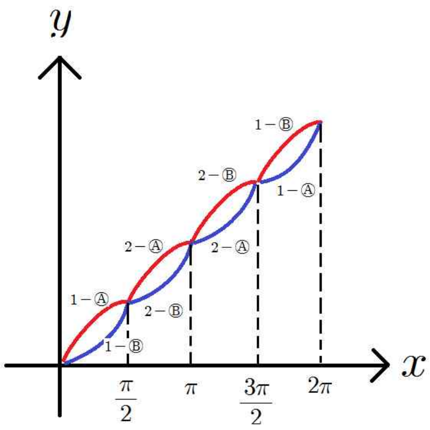
$\int_{2\pi}^{2\pi-x}\{f(t)-4\}\,dt=\int_{2\pi-x}^{2\pi}\{4-f(t)\}\,dt$가 되고, 이는 아래 그림과 같이 오른쪽 위의 색칠된 부분의 넓이를 의미한다. (단, 아래 그림은 구간 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$일 때 위쪽 함수를 선택했다고 가정한 그림이다.)



모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt=\int_{2\pi-x}^{2\pi}\{4-f(t)\}\,dt$가 성립하기 위해서는 곡선 $y=f(x)$가 점 $(\pi, 2)$에 대해 점대칭인 그래프이어야 한다.



한편, 각 구간마다의 함수를 선택하는 방법을 고려해볼 수 있다. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 아래 그림의 1−Ⓐ를 선택하면 구간 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$에서도 1−Ⓐ가 선택되며, 마찬가지로 1−Ⓑ도 동시에 선택된다. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 2−Ⓐ를 선택하면 구간 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$에서도 2−Ⓐ가 선택되며, 마찬가지로 2−Ⓑ도 동시에 선택된다. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$와 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$는 독립적으로 선택할 수 있으므로 총 경우의 수는 $2\times 2=4$이다.



[별해]

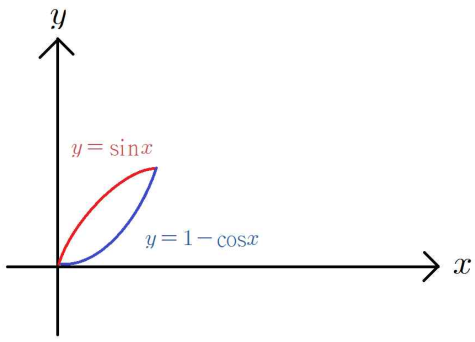
(나)에서 $0 \le x \le 2\pi$인 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_{2\pi}^{2\pi - x}\{f(t)-4\}\,dt$$

가 성립하므로 양변을 x에 대해 미분할 수 있다. 그러면

$f(x) = -\{f(2\pi - x) - 4\}$이므로 $\dfrac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = 2$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(\pi, 2)$에 대한 점대칭이라는 사실을 알 수 있다.

[출제자의 말]



$\int_0^x \sin t\,dt = [-\cos t]_0^x = 1-\cos x$이고

$$\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\{1-(1-\cos t)\}\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$= [\sin t]_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} = 1-\cos x$$ 이다. 또한,

$\int_0^x (1-\cos t)\,dt = [t-\sin t]_0^x = x-\sin x$이고

$$\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)\,dt = [t+\cos t]_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left\{\frac{\pi}{2}-x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$$

$$= x - \sin x$$

이므로 적분 구간을 늘려도 대칭성에 의해

$\int_0^x f(t)\,dt = \int_{2\pi}^{2\pi-x}\{f(t)-4\}\,dt$가 성립하기 위한 조건을 추론할 수 있다.

22) [정답] 12 (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 극한 계산을 구할 수 있는가?

[해설]

분자와 분모를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$ 이 된다.

$\frac{2}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$은 0으로 수렴하고,

$\frac{1}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$도 0으로 수렴하므로,

분자와 분모 모두 수렴하기 때문에, 위 값도 수렴함을 알 수 있다. 따라서 수렴하는 값은 12이다.

23) [정답] 4 (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = \frac{1}{x}+3$

$\therefore f'(1) = 4$

24) [정답] 100 (출제자 : 15이민욱)

[출제의도] 무리방정식을 풀 수 있는가?

[해설 1]

주어진 방정식에서 $x^2-12x = t$로 치환하여 정리하면

$t-7 = \sqrt{t-1}$ 방정식으로 나타낼 수 있다.

(단, $t \ge 7$ 이다.)

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-15t+50 = (t-5)(t-10) = 0$ 이다.

$t = 10$이다. ($\because t \ge 7$)

따라서 $x^2-12x-10 = 0$ 이다.

이 방정식의 근은 $x = 6 \pm \sqrt{46}$ 이므로 모든 실근의 곱 k는 -10이며 $k^2 = 100$이다.

[해설 2]

주어진 방정식에서 $x^2-12x = t$로 치환하여 정리하면

$t-7 = \sqrt{t-1}$ 방정식으로 나타낼 수 있다.

(단, $t \ge 7$ 이다.)

양변을 제곱하여 정리하면 $t^2-15t+50 = 0$인데 $t \ge 7$ 이므로

$t = 10$이다. 이를 $x^2-12x = t$에 대입하여 정리하면

$x^2-12x-10 = 0$ 이다.

이 방정식의 짝수 판별식은 $D/4 = 36-(-10) = 46$이므로

서로 다른 2개의 실근을 가진다.

모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용해

$k = -10$이고 따라서 $k^2 = 100$이다.

25) [정답] 10 (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 직선의 방정식과 평면의 방정식을 이해하고 있는가?

[해설]

혼합용액 A에 관한 식은 $\log\lambda_A = \dfrac{\mu_A - \frac{1}{2}}{200k}$ … ①

혼합용액 B에 관한 식은 $\log\lambda_B = \dfrac{\mu_B - \frac{3}{4}}{300k}$ … ②

식 ①에서 식 ②를 빼면

$$\log\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \left(\frac{\mu_A}{200k} - \frac{\mu_B}{300k}\right) - \left(\frac{1}{400k} - \frac{1}{400k}\right)$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\mu_B}{200k} - \frac{\mu_B}{300k} \left(\because \mu_A = \frac{2}{3}\mu_B\right)$$
$$= 0$$

따라서 $\log\dfrac{\lambda_A}{\lambda_B} = 0$이므로 $\dfrac{\lambda_A}{\lambda_B} = 1$이고,

$\dfrac{10\lambda_A}{\lambda_B} = 10$이다.

26) [정답] 50 (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 중복조합을 이해하고 실생활에 적용할 수 있는가?

[해설]

A초콜릿의 개수를 a, B초콜릿의 개수를 b, C초콜릿의 개수를 c, D초콜릿 개수를 d, E초콜릿 개수를 e라고 할 때, 1000원을 남김없이 사용하여 초콜릿을 사려면 $200a + 200b + 400c + 400d + 200e = 1000$이다.

식을 정리하면 $a + b + 2c + 2d + e = 5$을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 개수를 구하면 된다. 가격이 다른 초콜릿을 분류하면, a, b, e(200원)와 c, d(400원)이기 때문에 두 종류를 따로 생각해야 한다.
즉 400원 초콜릿을 종류에 상관없이 몇 개 뽑을 건지 결정한 후 (400원의 초콜릿은 최대 2개까지 뽑을 수 있다.)
c, d를 중복하여 뽑는 경우의 수와 남은 a, b, c를 뽑는 경우의 수를 구하여 곱하면 된다.

i) 400원 초콜릿 0개 뽑는 경우

$c + d = 0$이고 $a + b + e = 5$ 이므로
a, b, e 중에서 중복을 허락하여 5개 뽑는 경우의 수 $= {}_3H_5$

ii) 400원 초콜릿 1개 뽑는 경우

$c + d = 1$이고 $a + b + e = 3$이므로
c, d 중 하나 뽑는 경우의 수
$\times$ a, b, e 중에서 중복을 허락하여 3개 뽑는 경우의 수
$= 2 \times {}_3H_3$

iii) 400원 초콜릿 2개 뽑는 경우

$c + d = 2$이고 $a + b + e = 1$이므로
c, d 중 중복을 허락하여 2개 뽑는 경우의 수
$\times$ a, b, e 중에서 중복을 허락하여 1개 뽑는 경우의 수
$= {}_2H_2 \times {}_3H_1$

따라서 구하는 정답은
${}_3H_5 + 2 \times {}_3H_3 + {}_2H_2 \times {}_3H_1 = 50$

27) [정답] 8 (출제자 : 15이상민)

[출제의도] 포물선의 성질을 사용하여 문제를 풀 수 있는가?

[해설]

$y^2 = 4x$의 초점은 $F(1, 0)$이다.
중심을 $F(1, 0)$으로 하는 원 C_1이 직선 $x = -1$에 접하므로 원의 반지름은 2임을 알 수 있다.
$\overline{AF}$의 길이가 2이므로 포물선 성질에 의해서 점 A는 준선으로부터의 거리가 2임을 알 수 있다.
즉 A의 x좌표가 1이므로 $\overline{AF}$는 x축과 수직이다.
원 C_2의 반지름의 길이를 r이라 하면 점 P와 준선 사이의 거리는 초점과의 거리랑 같으므로 $r + 2$이다.
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P'이라 할 때 $\overline{FP'}$의 길이는 점 P와 점 A의 준선까지 거리의 차 이므로 r이다.
피타고라스의 정리에 의해 삼각형 AFP에서
$r^2 + r^2 = (r + 2)^2$이고 계산하면
$r = 2 + 2\sqrt{2}$이다.
삼각형 AFP의 넓이는 밑변 $\overline{AF}$와 높이 $\overline{FP'}$의 곱의 $\dfrac{1}{2}$이므로
$2 \times (2 + 2\sqrt{2}) \times \dfrac{1}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$이다.
즉 $a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$

28) [정답] 5 (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 삼각함수의 극한값을 구하고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

삼각형 EAB는 이등변삼각형이므로 선분 AE의 길이는 $\dfrac{1}{\cos\theta}$이다. $\angle EBC = \dfrac{\pi}{2}$ 이고 $\angle EBF = \theta$이므로 $\angle FBC = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, $\angle BEF = 2\theta$ 이고 선분 BE의 길이 또한 $\dfrac{1}{\cos\theta}$이므로 선분 BC의 길이는 $\dfrac{\tan 2\theta}{\cos\theta}$이다. $\angle EBF = \theta$, $\angle BFE = \pi - 3\theta$ 를 이용해서 선분 BF의 길이를 구하면

$$\frac{\overline{BE}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BF}}{\sin 2\theta}, \quad \overline{BF} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos\theta}$$

삼각형 BCF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{BC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos\theta} \times \frac{\tan 2\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \frac{\sin 2\theta \tan 2\theta}{2\sin 3\theta \cos\theta}$$

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin 2\theta \tan 2\theta}{2\theta \sin 3\theta \cos\theta} = \frac{2}{3}$$

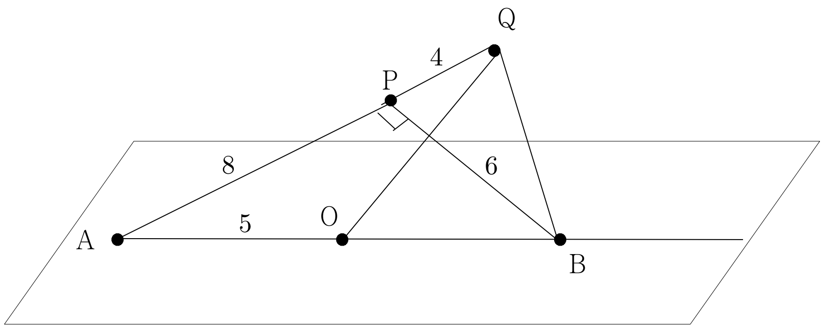
$p = 2$, $q = 3$ 이므로 정답은 5

29) [정답] : 12 (출제자 : 15 유정훈)

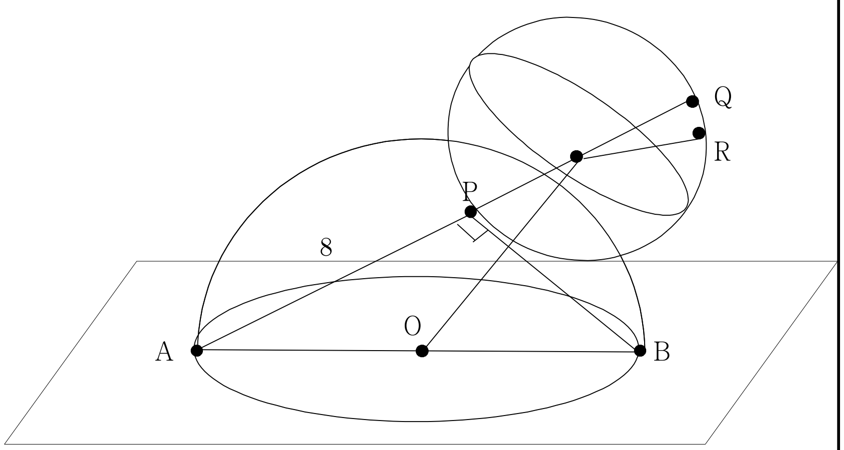
[출제의도] 1. 백터를 해석할 수 있는가?
2. 삼수선 정리를 통해 이면각의 크기를 구할 수 있는가?
3. 구와 직선의 자취를 파악할 수 있는가?

[해설]

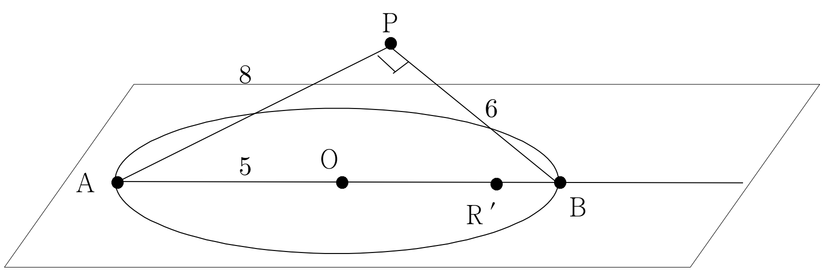
문제를 통해, 반구의 밑면인 원 C가 평면 α 위에 있고, 이 원 C의 반지름이 5이므로, 선분 AB의 길이는 10임을 알 수 있다. 점 P가 구 위에 있기 때문에 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$을 만족한다. 조건 (가)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=8$ 인 것을 통해, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$ 임을 알 수 있고, 삼각형 ABP가 직각삼각형임을 알 수 있다. 조건 (나)에서 조건을 해석해 보자. 우리가 아는 것은 점 P가 구 위에 있다는 사실 뿐이고, 조건 (나)에서는 점 Q에 대한 식이 나와 있으므로, 조건 (나)를 통해 점 Q의 위치를 알 수 있다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$라는 조건에서 좌변은 시점이 O이고, 종점이 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 위의 점을 나타내는 것을 알 수 있는데, 우변에서는 시점이 O이고, 종점이 Q이기 때문에, 점 Q가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 위의 점이고, 선분 AQ의 길이는 12임을 알 수 있다.



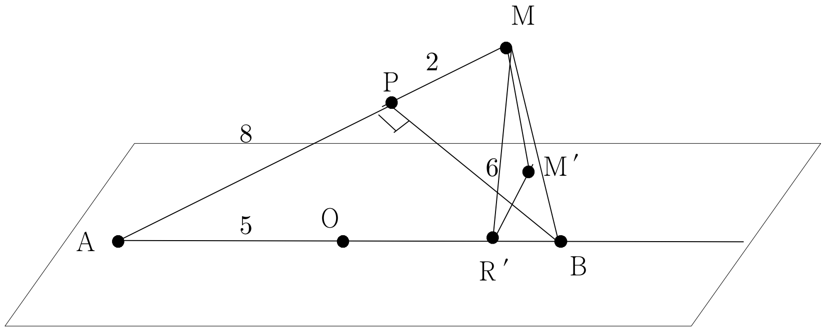
조건 (다)의 해석에 앞서 점 P와 점 Q가 한 직선 위에 있고, 점 R에 대해 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ 인데, 선분 PR과 선분 QR이 항상 수직이 되어야 한다. 평면에서 생각하면, 점 R의 자취는 원이지만, 공간 위의 점이기 때문에 점 R는 지름이 PQ인 구의 자취이다.



이제 그림을 보고, 조건을 확인해 보자. 평면 AOR과 평면 α가 수직일 때, 그 조건을 만족시키는 점 R을 평면 α에 정사영 시킨 점을 R′이라 하면, 점 R′이 직선 AB위에 있어야 한다.



평면 ABQ와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 정사영의 넓이가 최대가 되려면, 각의 크기 θ는 최소가 되어야 한다. 점 R의 자취가 구이므로, 점 R′의 자취는 구의 중심 M을 평면 α에 정사영 시킨 점 M′이 중심인 원의 내부가 된다. 이 원의 중심에서 R′에 이르는 거리를 생각해 보자, 구의 반지름의 길이가 2이므로, 원의 중심에서 점 R′에 그은 선분의 길이 또한 최댓값이 2이고, 최솟값은 0이 나온다. 이를 통해, 삼각형 AMR′을 그려보면,



위와 같이 그릴 수 있고, 선분 MR′의 길이와 선분 M′R′의 길이를 통해 이면각을 이용하여 $\cos\theta$의 최댓값을 구해보면, 선분 MR′의 길이는 6으로 일정하지만, 선분 M′R′의 길이는 0에서 2까지 변한다. $\cos\theta$의 값이 최대일 때, 정사영의 넓이가 최대가 되므로, $\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때에 만족한다.

삼각형ABQ의 넓이 S는 삼각형 ABP와 삼각형 PBQ의 넓이의 합이다. 삼각형 ABP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times8\times6=24$, 삼각형 PBQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times4=12$이므로 넓이 S는 36이다. 따라서 k는 $36\times\frac{1}{3}=12$이다.

30) [정답] 508 (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 1. 초월함수의 미분법, 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 알고 도함수를 구할 수 있는가?
2. 도함수의 Case를 분류하여 생각하고, 도함수를 이용하여 그래프를 그려낼 수 있는가?
3. 새롭게 정의된 함수를 이해할 줄 아는가?

[해설]

$$f'(x)=\frac{(\ln x)^{n-1}(n-m\ln x)}{x^{m+1}}$$

$f'(x)$의 부호는 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우에 다르게 변함을 알 수 있다.

1) n이 짝수인 경우

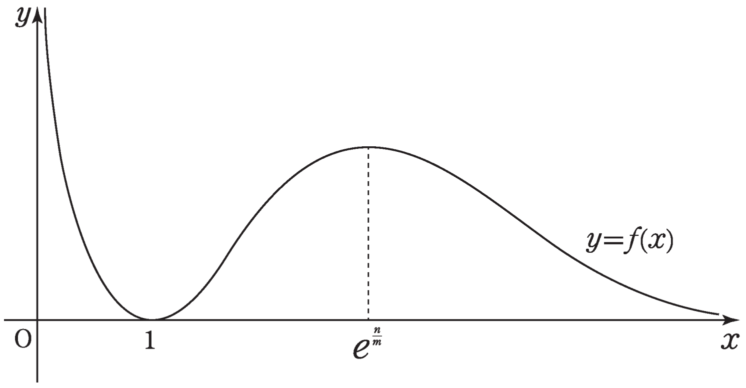
x	(0)	…	1	…	$e^{\frac{n}{m}}$	…
$f'(x)$		−	0	+	0	−

2) n이 홀수인 경우

x	(0)	…	1	…	$e^{\frac{n}{m}}$	…
$f'(x)$		+	0	+	0	-

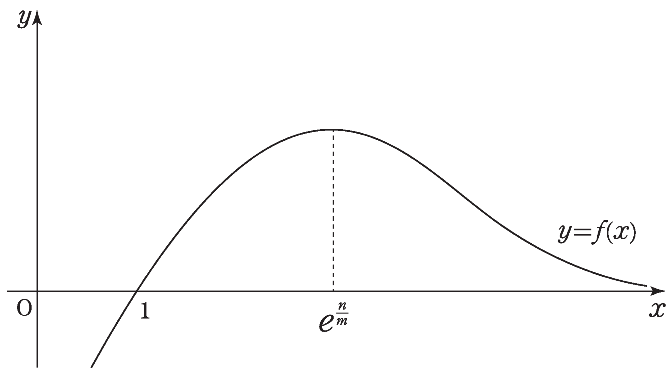
1보다 큰 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^m}>0$임과 위의 증감표를 이용하여 그래프를 그려보면

1) n이 짝수인 경우 ($\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$)



<그림 1>

2) n이 홀수인 경우 ($\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$)

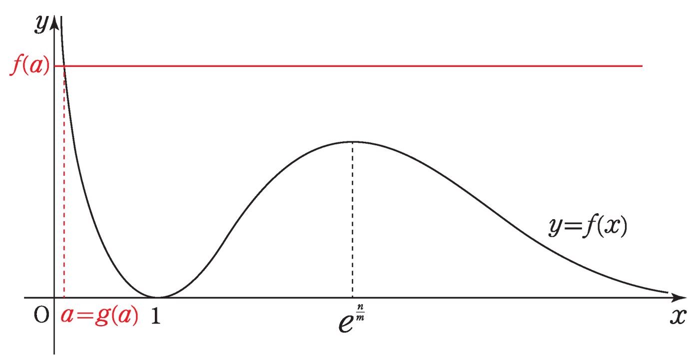


<그림 2>

함수 $g(t)$를 이해해보자.

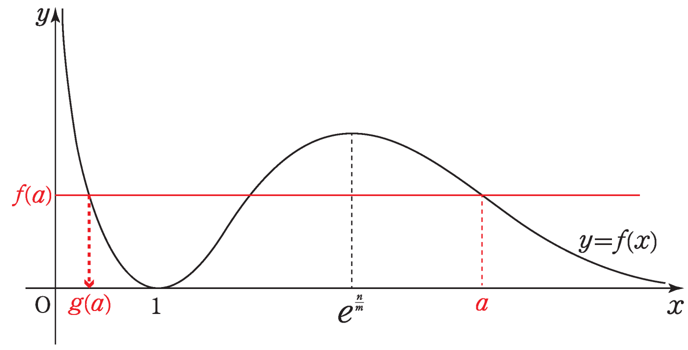
n이 짝수인 경우에 대해 $g(t)$를 이해해보면

대충 생각해보기 위해서 먼저 t를 매우 작은 양수 a라고 생각한다면 $g(a)$는 $f(x)=f(a)$를 만족시키는 x의 최솟값이므로 $g(a)=a$가 될 것이다.



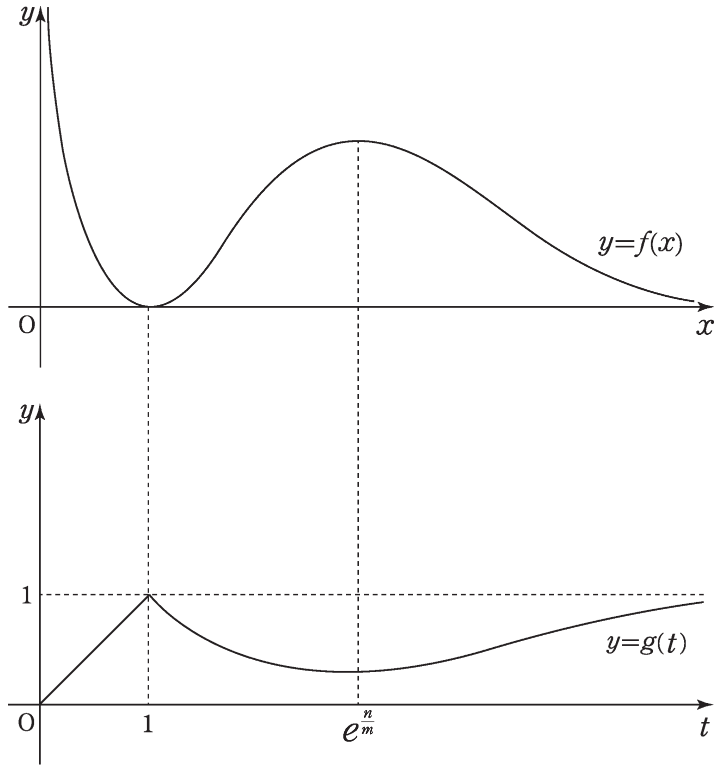
<그림3>

만약 t가 충분히 큰 ($e^{\frac{n}{m}}$보다 큰) 양수 a라고 생각한다면 $g(a)$는 $f(x)=f(a)$를 만족시키는 x의 최솟값이므로 아래 그림과 같이 $g(a)$의 값을 가질 것이다.



<그림4>

위와 같은 이해의 과정을 통해 n이 짝수일 때에 대해 $g(t)$의 그래프의 개형을 생각해보면

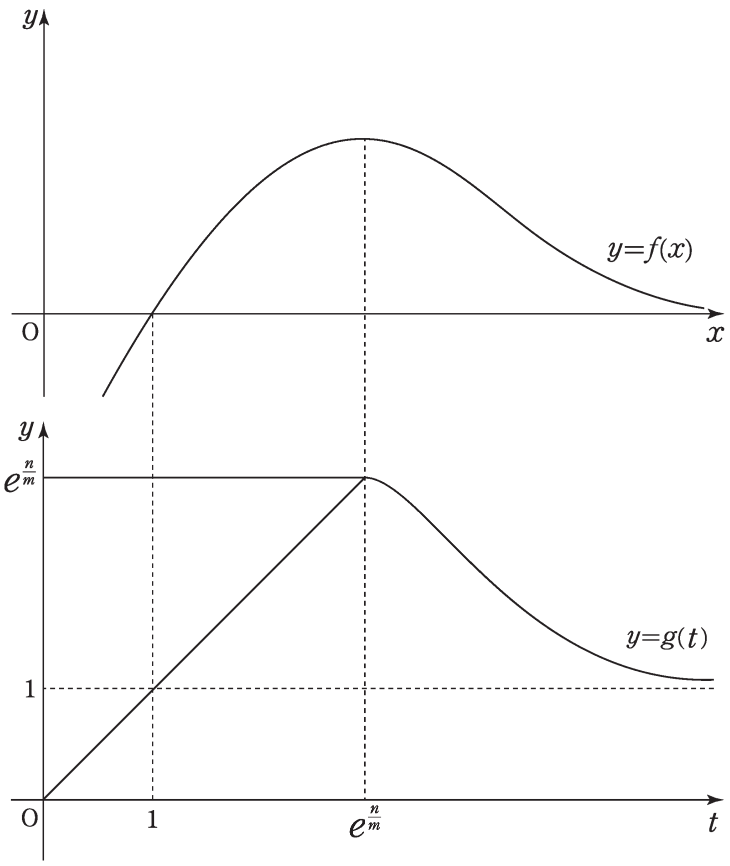


<그림5>

위와 같고, n이 짝수이면 $g(t)$의 최댓값은 1임을 알 수 있다.

다시 말해 n이 짝수이면 주어진 조건을 충족시킨다.

마찬가지로 n이 홀수일 때에 대해 $g(t)$의 그래프의 개형을 생각해보면



<그림6>

위와 같고, 이 경우에는 $g(t)$의 최댓값이 $e^{\frac{n}{m}}$임을 알 수 있다.

주어진 조건을 만족시키려면 $g(t)$의 최댓값은 1 또는 e^3이여야

하는데, $e^{\frac{n}{m}} > 1$이므로 ($\because m$, n은 자연수) 조건을 만족시키기

위해서는 $e^{\frac{n}{m}} = e^3$, 즉 $\dfrac{n}{m} = 3$이다.

다시 말해 <u>n이 홀수이면서 $n = 3m$이면 주어진 조건을 만족시킨다.</u>

따라서 n이 짝수일 때의 (m, n) 순서쌍의 개수는 $20 \times 25 = 500$

n이 홀수일 때의 (m, n) 순서쌍의 개수는 $(1, 3)$, $(3, 9)$, $(5, 15)$, ..., $(15, 45)$로 8개

$\therefore m + n = 508$