제 2 교시

2024학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 모의고사

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

언 땅 뚫고 솟아오르는 끈질긴 잡초 뿌리로

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

그린란드

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

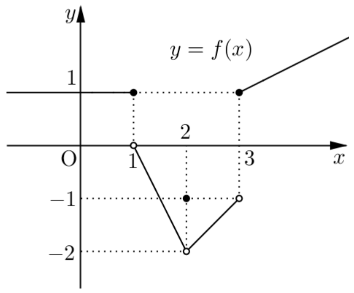
1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{3}} \times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2$에 대하여 $f'(1)=f'(2)$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① $-\frac{11}{2}$ ② $-\frac{9}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}$ ④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+} f(x)+f(2)+\lim_{x\to 3-} f(x)$의 값은? [3점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+ax+b & (x<1) \\ -2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

5. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여

$$f(-1)=f(3),\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1+\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

6. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$$

의 모든 실근의 합은? [3점]

① 3π ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{9}{4}\pi$ ⑤ 2π

7. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 곡선 $y=2^x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n S_{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$ ② $\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ ③ $\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

④ $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ ⑤ $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ kx & (1 \le x < 2) \\ x^3-2x & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

> 함수 $|f(x)+a|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 실수 a가 존재한다.

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

9. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-x+k$가 제2사분면과 제4사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 반직선 OP, OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하자. $\cos\alpha+\sin\beta=-\frac{1}{3}$일 때, 상수 k의 값은? (단, $-1<k<1$) [4점]

① $\frac{\sqrt{35}-1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{5-\sqrt{11}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{21}}{6}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=3$의 실근은 $x=-1$, $x=2$이다. 양의 상수 k에 대하여 방정식

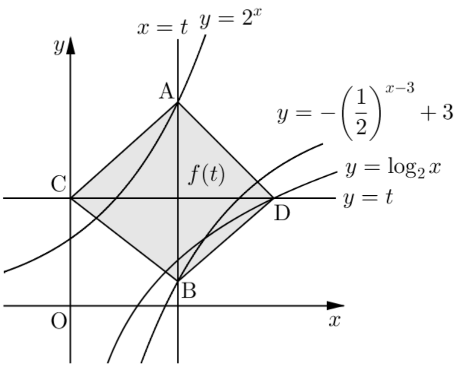
$$f(x)=3x-k, \quad f(x)=3x+k$$

의 실근의 개수가 각각 2일 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

11. 그림과 같이 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t$가 y축 및 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACBD의 넓이를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 $t=a$일 때 최솟값 m을 갖는다. $a+m$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{8}+\log_2 3$　② $\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\log_2 3$　③ $\frac{3}{2}+\log_2 3$
④ $\frac{1}{2}+2\log_2 3$　⑤ $\frac{15}{8}+\log_2 3$

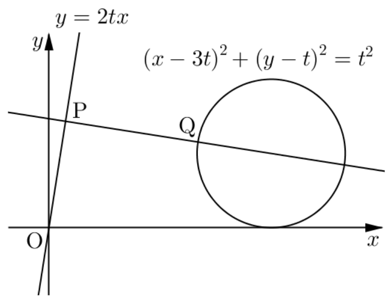


12. 양의 실수 t에 대하여 점 $(3t,\ t)$를 지나고 직선 $y=2tx$에 수직인 직선이 직선 $y=2tx$과 만나는 점을 P라 하고, 원 $(x-3t)^2+(y-t)^2=t^2$과 만나는 점 중 원점에 가까운 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t)-(at+b)\}=0$$

을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① 3　② $\frac{5}{2}$　③ 2　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 1

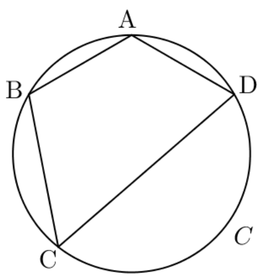


13. 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 인 원 C 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$
>
> (나) $\angle\mathrm{BCD} = \frac{\pi}{3}$
>
> (다) 삼각형 ABC의 넓이는 ADC의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 배이다.

$\sin(\angle\mathrm{BDC})$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{35}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{42}}{7}$



14. 실수 k에 대하여 시각 $t=0$일 때 점 A(k)를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가

$$|v(t)| = t^2 - 4t + c,\quad a(t) \leq 0$$

을 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, c는 상수이다.) [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. 점 P가 움직이는 방향은 바뀌지 않는다.
>
> ㄴ. $\int_0^2 v(t)\,dt = k$일 때, 시각 $t=4$에서 점 P의 위치는 $\frac{8}{3}$이다.
>
> ㄷ. 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 $|k|$가 되는 양의 실수 t의 값이 α, $\alpha+1$뿐일 때, 점 P의 위치의 최댓값은 $\frac{35}{6}$이다. (단, α는 양의 상수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 n에 대하여

$$\log_2(n+1)-\frac{1}{2}\log_2(n+k)$$

의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 k의 최솟값을 a_n이라 하자. 부등식

$$1 < a_n < n^2+n+1$$

을 만족시키는 자연수 n의 값을 작은 것부터 크기순으로 나열한 것을 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots$ 이라 할 때, $a_{31}+\sum_{i=1}^{15} b_i$의 값은? [4점]

① 288 ② 292 ③ 296 ④ 300 ⑤ 304

단답형

16. $\sum_{n=1}^{16} \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x>3$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} \le f(x) \le \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+12$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수 $f(x)=8\cos\pi x+k$ $(0 \le x \le 2)$의 그래프가 직선 $y=8$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{2}{3}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. (단, k는 $0<k<8$인 상수이다.) [3점]

19. 다음 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱이 10^{M}일 때, M의 값을 구하시오. [3점]

(가) $|\log x-3|<\frac{1}{2}$

(나) $\log x^{3}+3\log\sqrt{x}$ 의 값은 정수이다.

20. 최솟값이 0이고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)f'(x)}$$

라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)\times f'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $g(t)$는 $t=-1$, $t=1$에서만 불연속이고, $g(-1)>g(1)$이다.

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{24}의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

(가) $a_1 = 1$, $a_9 = 64$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2a_n)=0$$

이다.

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{25} a_n = 600$

$M-m$의 값을 구하시오. [4점]

22. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3x+\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\,dt & (x<0) \\ f(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|g(x+h)|-|g(x-h)|}{h}=0$을 만족시키는 x의 값 중에서 가장 작은 것은 0이고, 가장 큰 것은 3이다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 짝수의 개수는? [2점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

24. 확률변수 X가

$$\mathrm{E}(2X-1)=15, \quad \mathrm{E}\left((X-1)^2\right)=110$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① 53 ② 55 ③ 57 ④ 59 ⑤ 61

25. $(x-1)^2\left(2-\dfrac{a}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항이 40일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

26. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 주사위 1개를 던져 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5의 약수이면 점 P를 x축 방향으로 1만큼 평행이동시키고
> 나온 눈의 수가 5의 약수가 아니면 점 P를 y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨다.

위 시행을 6번 반복하여 얻은 점 P의 좌표가 (a, b)일 때, $\dfrac{b}{a} \geq 2$일 확률은? [3점]

① $\dfrac{13}{27}$ ② $\dfrac{14}{27}$ ③ $\dfrac{5}{9}$ ④ $\dfrac{16}{27}$ ⑤ $\dfrac{17}{27}$

27. 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중 임의로 선택한 한 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

$n(X)=3$ 이거나 $X \cap \{a, b\} \neq \varnothing$ 이다.

① $\frac{25}{32}$ ② $\frac{13}{16}$ ③ $\frac{27}{32}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{29}{32}$

28. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1, 0.5^2)$를 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2, \sigma^2)$을 따른다. $m_2-m_1=1.47$일 때,

$$\mathrm{P}(|X-m_1| \le k_1)=\mathrm{P}(|Y-m_2| \le k_2)=0.95$$

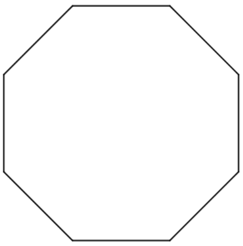
인 두 실수 k_1, k_2에 대하여 닫힌구간 $[m_1-k_1, m_1+k_1]$의 모든 원소가 닫힌구간 $[m_2-k_2, m_2+k_2]$의 원소가 되도록 하는 양수 σ의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

① 1 ② 1.25 ③ 1.5 ④ 1.75 ⑤ 2

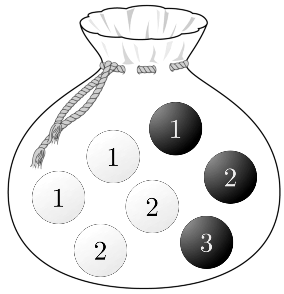
단답형

29. 정팔각형의 각 꼭짓점에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 임의로 하나씩 쓸 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 8이 적힌 꼭짓점과 이웃한 두 꼭짓점에는 각각 8의 약수가 적혀 있다.
>
> (나) 1이 적힌 꼭짓점과 이웃한 두 꼭짓점에는 각각 짝수가 적혀 있다.



30. 숫자 1, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공이 2개씩, 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 검은 공이 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자를 각각 a, b, c $(a \le b \le c)$라 하자. $c-a=1$일 때, 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다) [4점]



> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)^{-x}}{x^2}$ 의 값은? [2점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

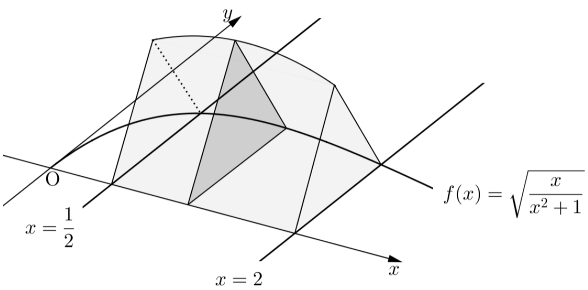
24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{a_n}{n^2+1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n \to \infty} \frac{n(2n-1)^3}{(3n+1)a_n}$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

25. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ 의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{10}\ln 2$　② $\frac{\sqrt{3}}{8}\ln 2$　③ $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln 2$　④ $\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$



26. $x \neq -\frac{1}{2}$ 인 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+1)^{n+2}+x^n}{(x+1)^n+x^{n+2}}$$

가 있다. 방정식 $f(x)=\frac{9}{4}$ 를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{2}$

27. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{\frac{x}{2}} t f(2t)\,dt = \frac{g(x)}{e^{x}}$$

를 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{40}{3}$ ② $\frac{20e}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{40e}{3}$ ⑤ $\frac{80}{3}$

28. 상수 k와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f(x)| = e^{\sin^2 2x} + k$$

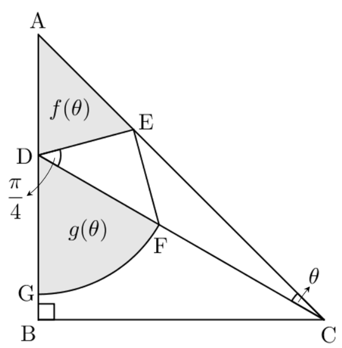
를 만족시킨다. 열린구간 $(-2\pi, 2\pi)$에서 함수 $y=f(x)$가 극대인 x의 개수가 4일 때, 함수 $y=f(x)$가 극대인 x의 값을 각각 α_1, α_2, α_3, α_4이라 하자. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=1$이고 $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DCE}=\theta$가 되도록 잡고, 선분 AC 위의 점 E를 $\angle \mathrm{CDE}=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EF}}$인 선분 CD 위의 점 F에 대하여 중심을 D로 하고 반지름을 $\overline{\mathrm{DF}}$로 하는 원이 선분 BD와 만나는 점을 G라 하자. 삼각형 ADE의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 DFG의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}=k\pi$이다. $80k$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{12}$) [4점]



30. 양의 실수 t에 대하여 반지름의 길이가 t이고 다음 조건을 만족시키는 원 C 중에서 중심의 x좌표가 최소인 원을 C_t라 하자.

> 원 C 위의 임의의 점 (x, y)에 대하여 $x \geq 0$이고 $0 \leq y \leq 3\sqrt{x+1}$이다.

원 C_t의 중심의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $t \neq \alpha\ (2<\alpha<3)$인 모든 실수 t에서 미분가능한 함수 $f(t)$와 $f(\beta)=5$인 상수 β에 대하여 $f'\left(\frac{3}{2}\right)+\beta \times f'(\beta)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{b}=(3-2a, 2+a)$가 서로 평행할 때, 상수 a의 값은? [2점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ 1 ⑤ $\frac{9}{8}$

24. 타원 $x^2+k^2y^2=1$ $(k>1)$의 두 초점을 F, F′이라 하고 이 타원이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 CFF′이 정삼각형일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

25. 좌표공간 위의 두 점 $(0, 2, a)$, $(-1, 5, 5)$를 지름의 양 끝점으로 하는 구 S가 z축과 단 한 점에서만 만날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $4+2\sqrt{10}$ ② $8+\sqrt{10}$ ③ $5+2\sqrt{10}$
④ $9+\sqrt{10}$ ⑤ $6+2\sqrt{10}$

26. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-5, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$와 $\vec{p}=(2, -1)$에 대하여

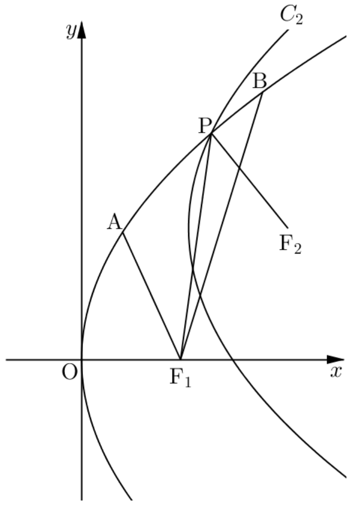
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}=0, \quad (t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}) \cdot \vec{p}=0$$

인 좌표평면 위의 점 P가 존재하도록 하는 실수 t의 최댓값은? [3점]

① $\dfrac{-1+2\sqrt{5}}{4}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\dfrac{1+2\sqrt{5}}{4}$

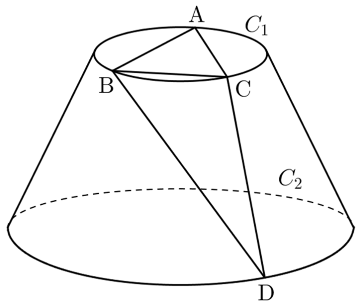
27. 그림과 같이 포물선 $C_1 : y^2 = 8x$ 의 초점 F_1과 포물선 C_1 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}_1} = 2\overline{\mathrm{AF}_1}$이고, 포물선 C_1을 평행이동하여 얻은 포물선 C_2의 꼭짓점이 삼각형 ABF_1의 무게중심이다. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 점 P와 포물선 C_2의 초점 F_2에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}_1} - \overline{\mathrm{PF}_2} = \dfrac{7}{3}$일 때, 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$의 길이는? (단, A, B는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

① $\dfrac{8}{3}$ ② 3 ③ $\dfrac{10}{3}$ ④ $\dfrac{11}{3}$ ⑤ 4



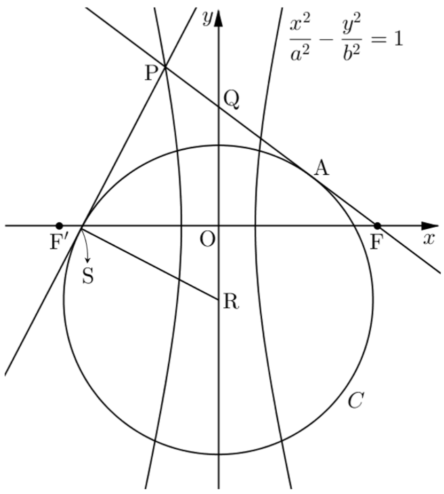
28. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 반지름의 길이가 4인 원 C_2를 각각 밑면으로 하고 높이가 4인 원뿔대가 있다. 원 C_1 위의 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC는 정삼각형이고, 원 C_2 위의 한 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}} = 2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{255}}{17}$ ② $\dfrac{5\sqrt{15}}{17}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{255}}{17}$ ④ $\dfrac{10\sqrt{15}}{17}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{255}}{17}$



단답형

29. 그림과 같이 두 점 F(4, 0), F′(−4, 0)을 각각 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 선분 PF를 11 : 5로 내분하는 점 A에 대하여 A에서 접하고 y축 위의 점 R을 중심으로 하는 원을 C라 하자. 직선 PF는 y축과 점 Q(0, 3)에서 만나고, 점 P에서 원 C에 그은 접선 중 직선 PF가 아닌 접선이 원 C와 접하는 점을 S라 할 때, 사각형 PQRS의 둘레의 길이는 15이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 $p-q\sqrt{13}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제2사분면 위의 점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 0), B(0, 4)에 대하여 선분 OA 위를 움직이는 점 P와 선분 OB 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 실수 s, t에 대하여 좌표평면 위의 점들을 원소로 하는 두 집합

$$A=\{X \mid \overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{QX}=0\},$$
$$B=\{Y \mid \overrightarrow{AY}=s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB},\ |s|\le a,\ |t|\le b\}$$

가 $A\subset B$를 만족시키도록 하는 양의 실수 a, b의 최솟값을 각각 m_1, m_2라 할 때, $m_1+m_2=\frac{p+q\sqrt{5}}{4}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2024학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 모의고사

수학 영역 정답표

공통과목						선택과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	②	2	12	④	4	23	③	2	23	⑤	2	23	①	2
2	⑤	2	13	②	4	24	⑤	3	24	②	3	24	⑤	3
3	③	3	14	④	4	25	②	3	25	④	3	25	③	3
4	①	3	15	⑤	4	26	④	3	26	③	3	26	②	3
5	④	3	16	24	3	27	①	3	27	①	3	27	④	3
6	①	3	17	24	3	28	②	4	28	②	4	28	③	4
7	③	3	18	8	3	29	216	4	29	40	4	29	8	4
8	②	3	19	12	3	30	38	4	30	11	4	30	11	4
9	①	4	20	108	4									
10	④	4	21	30	4									
11	⑤	4	22	47	4									

2024년도 대학수학능력시험 대비
녹색지대 모의고사 해설지
수학 영역

출제자 소개

이재종(그린란드)

- 성균관대 수학교육과 졸업
- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 네이버 수학 분야 파워지식IN(2013~)
- 녹색지대 모의고사(2020~) 출제 및 제작
- (前) 이투스247 근무
- (現) 경기도교육청 소속 수학과 교사
- (現) 기대N제(2024) 공저

수능 표본 예상 등급 구분 점수

<확률과 통계>	<미적분>	<기하>
1등급: 84	1등급: 81	1등급: 82

※ 2022학년도 수능부터 이용되는 점수 산출 방식으로 계산하였을 때 예상되는 등급 구분 점수로, 실제 등급 구분 점수와 차이가 있을 수 있음.

● 제작 후 검토에 참여해주신
김기대T, 이동훈님, 김한웅님
께 감사의 말씀을 전합니다.

주의 사항 및 이용 안내

공통과목(1 ~ 22)

1. [출제 의도] 지수법칙을 이해하고 있는가?

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{3}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=2^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$$

2. [출제 의도] 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=x^2+2ax$ 이므로
$f'(1)=1+2a$, $f'(2)=4+4a$
$1+2a=4+4a$ 에서 $2a=-3$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$

3. [출제 의도] 함수의 극한을 이해하고 있는가?

주어진 그래프에서
$\lim_{x\to 1+}f(x)=0$, $f(2)=-1$, $\lim_{x\to 3-}f(x)=-1$
이므로 주어진 식의 값은 -2이다.

4. [출제 의도] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하고 연속이다.
$\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$ 에서
$\frac{1}{3}+a+b=-2$, $a+b=-\frac{7}{3}$ $\cdots(*)$
$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 에서
$1+a=0$, $a=-1$
$(*)$에서 $b=-\frac{4}{3}$ $\therefore ab=\frac{4}{3}$

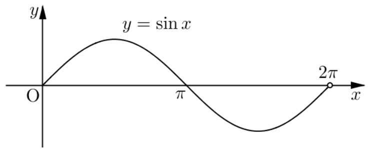
5. [출제 의도] 정적분의 성질을 이해하고 있는가?

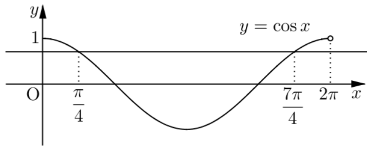
$f(-1)=f(3)$ 이므로 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에 대하여 대칭이다.
$y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}$ 이므로
$-\frac{a}{2}=1$ $\therefore a=-2$
$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=1+\int_{-1}^{2}f(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}f(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx=-1$$
$$\Rightarrow \int_{1}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx=-1$$
$$\Rightarrow \int_{1}^{2}(x^2-2x+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+bx\right]_1^2=-1$$
$$\Rightarrow \frac{7}{3}-3+b=-1,\ b=-\frac{1}{3}$$
$$\therefore f(2)=2^2-4-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

6. [출제 의도] 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

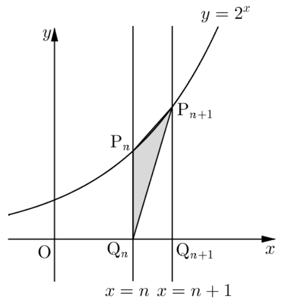
$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

아래 그림에서 $0\le x<2\pi$ 에서 방정식
$\sin x=0$ 의 모든 실근은 $x=0$, $x=\pi$
$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 모든 실근은 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{7\pi}{4}$
이므로 주어진 방정식의 모든 실근의 합은
$$0+\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=3\pi$$





7. [출제 의도] 등비수열의 합을 계산할 수 있는가?



그림과 같이 삼각형 $P_nQ_nP_{n+1}$은 밑변의 길이가 $\overline{P_nQ_n}=2^n$이고, 높이가 1이므로
$$S_n=\frac{1}{2}\times 2^n\times 1=2^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_nS_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^{n-1}\times 2^n}$$
$$=2\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4^n}$$
$$=2\times\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$$

8. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $|f(x)+a|$가 실수 전체의 집합에서 연속이라 하면
$\lim_{x\to 1-}|f(x)+a|=\lim_{x\to 1+}|f(x)+a|$ 에서
$|a|=|k+a|$ $\Rightarrow$ $k=-2a$ 또는 $k=0$ $\cdots$ (1)
$\lim_{x\to 2-}|f(x)+a|=\lim_{x\to 2+}|f(x)+a|$
$|2k+a|=|4+a|$
$\Rightarrow$ $k=2$ 또는 $k=-a-2$ $\cdots$ (2)
(1), (2)에서 k가 최소가 되는 경우는 $k<0$인 경우로,
$k=-2a$이고 $k=-a-2$ $\Rightarrow$ $a=2$, $k=-4$
인 경우이다. 따라서 k의 최솟값은 -4이다.

9. [출제 의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-x+k$는 모두 직선 $y=x$에 대칭이므로 두 점 P, Q 또한 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $\cdots$ (*)
삼각함수의 정의에 의하여
$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$이고 (*)에 의하여
$\cos\alpha=\sin\beta$, $\sin\alpha=\cos\beta$이다.

따라서 $\cos\alpha+\sin\beta=2\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos\alpha=-\frac{1}{6}$

점 P 는 제2사분면 위의 점이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{35}}{6}$

$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$\therefore\ k=\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{35}-1}{6}$

10. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$g(x)=f(x)-3x$ 라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이고 두 방정식 $g(x)=-k$, $g(x)=k$ 의 실근의 개수는 각각 2 이다.

따라서 $g(x)$의 극댓값과 극솟값은 각각 k, $-k$ 이다.

$g'(x)=f'(x)-3$ 이므로 문제의 조건에서

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1,\ x=2$

$\therefore\ g'(x)=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$g(-1)-g(2)=\int_2^{-1}(3x^2-3x-6)dx$$
$$=\left[x^3-\frac{3}{2}x^2-6x\right]_2^{-1}=\frac{27}{2}$$

$\therefore\ 2k=\frac{27}{2}$, $k=\frac{27}{4}$

함수 $g(x)$는 $x=-1$ 에서 극댓값을 가지므로

$g(-1)=k=\frac{27}{4}$

$\therefore\ f(-1)=g(-1)-3=\frac{15}{4}$

11. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

점 A, B 의 좌표는 각각

$A(t,\ 2^t)$, $B\left(t,\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}+3\right)$이고

점 C, D 의 좌표는 각각

$C(0,\ t)$, $D(2^t,\ t)$이다.

방정식 $2^t=-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}+3$ 은 실근을 갖지 않고,

$2^0>-\left(\frac{1}{2}\right)^{0-3}+3$ 이므로

모든 실수 t에 대하여 $2^t>-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}+3$ 이다.

따라서

$\overline{AB}=2^t-\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}+3\right\}=2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}-3$

$\overline{CD}=2^t$

이다. $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}-3\right\}\times 2^t$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2^{2t}-3\times 2^t+8\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2^t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\right\}$$

따라서 함수 $f(t)$는

$$2^t=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ t=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)=\log_2 3-1$$

일 때, 최솟값 $\frac{23}{8}$ 을 갖는다.

$\therefore\ a+m=\frac{15}{8}+\log_2 3$

12. [출제 의도] 원의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

원 $(x-3t)^2+(y-t)^2=t^2$ 의 중심을 M 이라 하면 M 의 좌표는 $(3t,\ t)$이다.

$$\overline{PQ}=\overline{MP}-\overline{MQ}$$

이고,

$$\overline{MP}=\frac{|2t\times 3t-t|}{\sqrt{(2t)^2+1^2}}=\frac{|6t^2-t|}{\sqrt{4t^2+1}},$$
$$\overline{MQ}=t$$

이므로 $t>\frac{1}{6}$ 이면

$$\overline{PQ}=f(t)=\frac{6t^2-t}{\sqrt{4t^2+1}}-t$$

이다.

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\{f(t)-(at+b)\}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{6t^2-t}{\sqrt{4t^2+1}}-t-at-b\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{6t^2-(a+1)t\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{4t^2+1}}-\left(\frac{t}{\sqrt{4t^2+1}}+b\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{6t-(a+1)\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}-\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}+b\right)\right\}$$
$$=0$$

이고,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}+b\right)=\frac{1}{2}+b,$$

에서 $\lim_{t\to\infty}\frac{6t-(a+1)\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}$ 의 값이 존재해야 한다.

$\lim_{t\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}=2$ 이고,

$$\lim_{t\to\infty}\left\{6t-(a+1)\sqrt{4t^2+1}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{36t^2-(a+1)^2(4t^2+1)}{6t+(a+1)\sqrt{4t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\{36-4(a+1)^2\}t-\frac{(a+1)^2}{t}}{6+(a+1)\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}$$

에서 이 극한이 수렴할 필요충분조건은

$$36-4(a+1)^2=0,\ a+1>0$$

이다.

$\therefore\ a=2$

또한 $\frac{1}{2}+b=0$ 이므로 $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

13. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=2\sqrt{21}$$

$\Rightarrow\ \overline{BD}=2\sqrt{21}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{7}\ \cdots$ ①

삼각형 ABC 와 ACD 에서 원주각의 성질에서

$$\overline{AB}=\overline{AD}\ \Rightarrow\ \angle ACB=\angle ACD$$

조건 (다)에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ACB)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{DC}\times\sin(\angle ACD)$

$\Rightarrow\ \overline{BC}=\frac{2}{3}\overline{DC}\ \cdots$ ②

①, ②에서 $\overline{BC}=2k$, $\overline{DC}=3k$ 라 두면 삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BCD)$

$\Rightarrow\ (3\sqrt{7})^2=(2k)^2+(3k)^2-2\times 2k\times 3k\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ 13k^2-6k^2=63,\ k=3$

$\therefore\ \overline{BC}=2k=6$

삼각형 BCD 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=2\sqrt{21}$$

$\therefore\ \sin(\angle BDC)=\frac{6}{2\sqrt{21}}=\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

14. [출제 의도] 정적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 속도, 가속도를 구할 수 있는가?

주어진 조건에서 $t\ge 0$ 일 때 가속도 $a(t)$가 정의되므로 $v(t)$는 $t>0$ 에서 미분가능하다. ⋯ ①

$|v(t)|\ge 0$ 이므로

이차방정식 $t^2-4t+c=0$ 의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$ 이다.

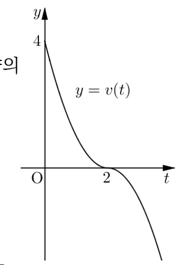
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-c\le 0\ \Rightarrow\ c\ge 4\ \cdots ②$$

$a(t)\le 0$ 이므로 $v(t)$는 $t\ge 0$ 에서 감소한다. ⋯ ③

①, ②, ③에서 $c=4$ 이고, 그림과 같이 $v(t)$는

$$v(t)=\begin{cases}(t-2)^2 & (t<2)\\ -(t-2)^2 & (t\ge 2)\end{cases}$$

이어야 한다.



(ㄱ) 점 P 는 $0<t<2$ 에서 양의 방향으로, $t>2$ 에서 음의 방향으로 움직인다. **(거짓)**

(ㄴ)

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2(t-2)^2dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}(t-2)^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

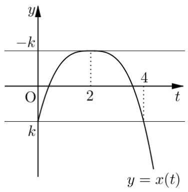
이므로 $k=\frac{8}{3}$ 이다.

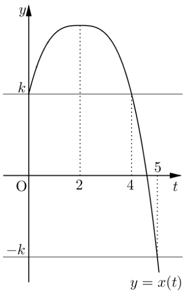
또한, $\int_0^4 v(t)dt=0$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지의 위치의 변화량은 0 이다.

따라서 시각 $t=4$ 에서 점 P 의 위치는 $k=\frac{8}{3}$ 이다.

(참)

(ㄷ) ㄴ에서 시각 $t=4$ 에서 점 P 의 위치는 k 이고, 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 의 위치는 증가, 시각 $t>2$ 에서 점 P 의 위치는 감소하므로 시각 t 에서 점 P 와 원점 사이의 거리가 $|k|$ 가 되는 양의 실수 t 의 값이 2 개가 되는 경우는 점 P 의 위치 $x(t)$ 의 그래프가 다음과 같은 경우뿐이다.





왼쪽 그림의 경우 $t=2$, $t=4$에서 점 P와 원점 사이의 거리가 $|k|$가 되므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\alpha=4$인 경우가 문제의 조건을 만족시키는 경우이다.

$\int_4^5 v(t)\,dt=-2k$에서

$\left[-\frac{1}{3}(t-2)^3\right]_4^5=-\frac{19}{3}=-2k \quad \therefore\ k=\frac{19}{6}$

$\int_0^2 v(t)dt=\frac{8}{3}$이므로 점 P의 위치의 최댓값은

$\frac{19}{6}+\frac{8}{3}=\frac{35}{6}$이다. (참)

이로부터 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15. [출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 그 값을 계산할 수 있는가?

로그의 성질에 의하여

$\log_2(n+1)-\frac{1}{2}\log_2(n+k)=\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}$

이다. k는 자연수이고,

$k=n^2+n+1$인 경우

$\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=0$

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$1\le a_n\le n^2+n+1$

이 성립한다.

(i) $a_n=1$인 경우,

$\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}\log_2(n+1)$

이고, 이 값이 정수이므로

$\log_2(n+1)=2m$

$\Rightarrow\ n+1=2^{2m}\ \Rightarrow\ n=2^{2m}-1$ (m은 자연수)

이다.

역으로, $n=2^{2m}-1$ (m은 자연수)이면

$k=1$일 때, $\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=\frac{1}{2}\log_2(n+1)=m$

이고 k는 자연수이므로 $a_n=1$이다.

따라서 $a_n=1$일 필요충분조건은

$n=2^{2m}-1$ (m은 자연수)인 것이다.

(ii) $a_n=n^2+n+1$인 경우

$k<n^2+n+1$이면

$\log_2(n+1)>\log_2\sqrt{n+k}\ \Rightarrow\ \log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}>0$

이므로 $n+1=2p$ (p는 자연수)라 두면

$\sqrt{n+k}=p\ \Rightarrow\ k=p^2-n$

일 때 $\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=\log_2 2=1$이 되고,

$k=p^2-n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-n=\frac{n^2+1}{4}>0$

이므로 k는 자연수이다.

따라서 $n+1$이 짝수이면 $a_n<n^2+n+1$이다. ⋯ ①

반대로, $n+1$이 홀수인 경우

$n+1=2q+1$ (q는 자연수)라 두면

$\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=\log_2\frac{2q+1}{\sqrt{2q+1+k}}$

이고, $\frac{2q+1}{\sqrt{2q+1+k}}=2^l$ (l은 정수)라 두면

$2q+1=2^l\times\sqrt{2q+1+k}$ ⋯ (#)

이다. 여기서 $\sqrt{2q+1+k}=\frac{2q+1}{2^l}$이므로

$\sqrt{2q+1+k}$는 유리수이고, k, q가 자연수이므로

$\sqrt{2q+1+k}$ 또한 자연수가 되어야 한다.

(#)에서

$l>0$이면 좌변은 홀수, 우변은 짝수이므로 모순이다.

$l=0$이면 $k=n^2+n+1$이다.

$l<0$이면 $k>n^2+n+1$이다.

이로부터 $n+1$이 홀수이면 $a_n=n^2+n+1$이다. ⋯ ②

①, ②에서 $a_n=n^2+n+1$일 필요충분조건은

$n+1$이 홀수 $\Rightarrow$ n이 짝수

인 것이다.

(i), (ii)에서 $1<a_n<n^2+n+1$이 성립하기 위해서는 n이 홀수이고, $n\ne 2^{2m}-1$ (m은 자연수) 이어야 한다.

따라서 수열 $\{b_i\}$는 홀수 중에서 $2^{2m}-1$ 꼴의 홀수(3, 15, 63, ⋯)를 제외한 것을 크기순으로 나열한 수열이다.

$\therefore\ \sum_{i=1}^{15}b_i=\sum_{i=1}^{17}(2i-1)-(3+15)=17^2-18=271$

또한, $n=31$인 경우

$\log_2\frac{n+1}{\sqrt{n+k}}=5-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{31+k}$

이고, 이 값이 정수가 되는 k의 최솟값은

$\log_2\sqrt{31+k}=6\ \Rightarrow\ k=33$

이다. $\therefore\ a_{31}=33$ ⋯ ③

$\therefore\ a_{31}+\sum_{i=1}^{15}b_i=33+271=304$

16. [출제 의도] 분모를 유리화하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$\sum_{n=1}^{16}\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{16}\frac{9\sqrt{2}\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+2}\right)}{\left(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}\right)\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+2}\right)}$$
$$=\sum_{n=1}^{16}\frac{9\sqrt{2}\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+2}\right)}{(3n-1)-(3n+2)}$$
$$=3\sqrt{2}\sum_{n=1}^{16}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}\right)$$
$$=3\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{50}-\sqrt{47}\right)$$
$$=3\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=24$$

17. [출제 의도] 함수의 극한의 대소관계를 이해하고 있는가?

$$\lim_{x\to3+}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)=24$$

이고, $\lim_{x\to3+}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+12\right)=24$이다.

따라서 수열의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim_{x\to3+}f(x)=24$

이다. 또한 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$f(3)=\lim_{x\to3+}f(x)=24$

이다.

18. [출제 의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하고 있는가?

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{2}{3}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{C}\left(\frac{2}{3},0\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{4}{3},0\right)$이다.

즉, $f\left(\frac{2}{3}\right)=8\cos\frac{2\pi}{3}+k=0$이므로 $k=4$이다.

점 A, B의 x좌표는 방정식 $f(x)=8$의 해와 같고,

$f(x)=8\ \Leftrightarrow\ 8\cos\pi x+4=8$

$\Leftrightarrow\ \cos\pi x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{3},\ x=\frac{5}{3}$

이다. 따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{3},8\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},8\right)$이다.

$\therefore\ S=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)\times8\times\frac{1}{2}=8$

19. [출제 의도] 로그가 정수가 될 조건을 이해하고 있는가?

(가)에서 $\frac{5}{2}<\log x<\frac{7}{2}$이다.

(나)에서

$\log x^3+3\log\sqrt{x}=3\log x+\frac{3}{2}\log x=\frac{9}{2}\log x$

이고, $\frac{9}{2}\log x=k$ (k는 정수)라 두면

$\log x=\frac{2k}{9}$

이어야 한다.

$\frac{5}{2}<\frac{2k}{9}<\frac{7}{2}$에서 $\frac{45}{4}<k<\frac{63}{4}$

이고, k는 정수이므로 $k=12$, 13, 14, 15이다.

따라서

$\log x=\frac{24}{9}$, $\frac{26}{9}$, $\frac{28}{9}$, $\frac{30}{9}$

이고, $x=10^{\frac{24}{9}}$, $10^{\frac{26}{9}}$, $10^{\frac{28}{9}}$, $10^{\frac{30}{9}}$이다.

$\therefore\ M=\frac{24}{9}+\frac{26}{9}+\frac{28}{9}+\frac{30}{9}=12$

20. [출제 의도] 미분계수의 정의와 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 미분계수의 정의에서

$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=f'(t)$

이다. $f'(x)$는 연속함수이므로 $f'(t)\ne0$이면

$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\times\lim_{x\to t}\frac{1}{f'(x)}=\frac{f'(t)}{f'(t)}=1$

이다. 한편, $f'(t)=0$인 경우

다항식 $f(x)-f(t)$가 $(x-t)^2$을 인수로 가지므로

$f(x)-f(t)=(x-t)^nQ(x)$

(n은 2 이상의 자연수, $Q(t)\ne0$)

라 둘 수 있다. 위 등식의 양변을 미분하면

$f'(x)=n(x-t)^{n-1}Q(x)+(x-t)^nQ'(x)$ ⋯ (#)

이므로

$$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{(x-t)^nQ(x)}{n(x-t)^nQ(x)+(x-t)^{n+1}Q'(x)}$$
$$=\frac{Q(t)}{nQ(t)}=\frac{1}{n}$$
이다. 따라서
$$g(t)=\begin{cases}1 & (f'(t)\neq 0)\\ \frac{1}{n} & (f(x)-f(t)=(x-t)^nQ(x),\ n\geq 2)\end{cases}$$
이다. 주어진 조건에서 $f'(t)=0$ 인 t 가 $t=-1$, $t=1$ 뿐이고, $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이므로

$f'(x)=4(x+1)^2(x-1)$ 또는

$f'(x)=4(x+1)(x-1)^2$

이다. (#)에서

(i) $f'(x)=4(x+1)^2(x-1)$ 인 경우,

$g(-1)=\frac{1}{3}$, $g(1)=\frac{1}{2}$ 이다. $\Rightarrow$ $g(-1)<g(1)$

(ii) $f'(x)=4(x+1)(x-1)^2$ 인 경우,

$g(-1)=\frac{1}{2}$, $g(1)=\frac{1}{3}$ 이다. $\Rightarrow$ $g(-1)>g(1)$

$\therefore$ $f'(x)=4(x+1)(x-1)^2$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0 이고, $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 유일한 극솟값을 가지므로 $x=-1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$f'(x)=4x^3-4x^2-4x+4$ 에서

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+C$ 라 두면

$f(-1)=-\frac{11}{3}+C=0$ $\quad\therefore$ $C=\frac{11}{3}$

$f(2)=16-\frac{32}{3}+\frac{11}{3}=9$,

$f'(2)=32-16-8+4=12$

$\therefore$ $f(2)\times f'(2)=108$

21. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의와 등비수열의 합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$ 의 정의로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1 이고 공비가 2 인 등비수열 여러 개로 이루어진 수열이다.

(다) 조건에서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항 $(n\leq 25)$ 까지의 합이 600 을 넘지 않도록 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제25 항까지를 정하자.

(가) 조건에 의하여 수열 $\{a_n\}$의 최댓값은 64 보다 크거나 같고, $\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}=1023>600$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 최댓값은 512 보다 작다.

(i) 수열 $\{a_n\}$의 최댓값이 64인 경우

수열 $\{a_n\}$ 의 항의 개수를 최소화하면서 합을 600 에 가깝게 하려면, 수열 $\{a_n\}$ 의 부분을 이루는 각각의 등비수열의 항의 개수를 최대로 해야 한다.

$\sum_{n=1}^{7}2^{n-1}=1+2+4+\cdots+64=127$

이고, $127\times 4<600$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 합이 600 이 되려면 28 개보다 더 많은 항이 필요하다.

이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) 수열 $\{a_n\}$ 의 최댓값이 128 인 경우

$\sum_{n=1}^{8}2^{n-1}=1+2+4+\cdots+128=255$,

$\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}=1+2+4+\cdots+32=63$,

$\sum_{n=1}^{3}2^{n-1}=1+2+4=7$

이고, $255\times 2+64+7=581<600$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 합이 600 이 되려면 25 개보다 더 많은 항이 필요하다.

이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(iii) 수열 $\{a_n\}$ 의 최댓값이 256 인 경우

$\sum_{n=1}^{9}2^{n-1}=511$, $\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}=63$, $\sum_{n=1}^{4}2^{n-1}=15$

$\sum_{n=1}^{3}2^{n-1}=7$, $\sum_{n=1}^{2}2^{n-1}=3$, $\sum_{n=1}^{1}2^{n-1}=1$

이고

$$511+63+15+7+3+1=600$$

이다. 또한 위 6 개의 등비수열의 합을 이루는 모든 항의 개수는

$$9+6+4+3+2+1=25$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 위와 같은 6 개의 등비수열의 합을 이루는 항으로만 이루어진다. … (*)

이때 $a_9=64$ 이므로

$a_3=2$, $a_4=4$, $a_5=8$, $\cdots$, $a_9=64$

이고, (*)에 의하여

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{10}=128$, $a_{11}=256$ 이다.

남은 등비수열의 항의 개수는 6, 4, 3, 1 이므로 a_{24} 의 값이 최대가 되는 경우는

$a_{25}=1$ 이고 $a_{24}=32$ 인 경우이다.

$\therefore$ $M=32$

a_{24} 의 값이 최소가 되는 경우는,

$a_{23}=1$, $a_{24}=2$, $a_{25}=4$ 인 경우이다.

$\therefore$ $m=2$

(i), (ii), (iii)에서 $M-m=30$ 이다.

22. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 0-}g(x)=0$, $\lim_{x\to 0+}g(x)=f(0)$ 이므로

$f(0)=0$ 이다.

문제의 조건에서 $g(0)=0$,

$\lim_{h\to 0}\frac{|g(h)|-|g(-h)|}{h}=0$ 이므로 … (#)

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|g(h)|-|g(-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{|g(h)|-|g(-h)|}{h}=0$$

이고,

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(-h)}{-h}=f'(0)$,

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(-h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{-h}=-3$

이므로 (#)이 성립하려면 $|f'(0)|=3$ 이어야 한다.

(i) <u>$f'(0)=-3$ 인 경우</u>

$g(x)$ 는 $x=0$ 을 제외한 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x_0\neq 0$ 일 때 $g(x_0)=0$ 이면

(a) $x=x_0$ 의 좌우에서 $g(x)$ 의 부호가 바뀌는 경우

$$\lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)|-|g(x_0-h)|}{h}$$
$$=\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)+g(x_0-h)}{h}$$
$$=\pm\left\{\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{-h}\right\}$$
$$=\pm\{g'(x_0)-g'(x_0)\}=0$$

(b) $x=x_0$ 의 좌우에서 $g(x)$ 의 부호가 바뀌지 않는 경우, $x=x_0$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극값을 가지므로 $g'(x_0)=0$ 이고

$$\lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)|-|g(x_0-h)|}{h}$$
$$=\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{h}$$
$$=\pm\left\{\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{-h}\right\}$$
$$=\pm 2g'(x_0)=0$$

이다. 따라서 $x_0\neq 0$ 일 때 $g(x_0)=0$ 이면

$\lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)|-|g(x_0-h)|}{h}=0$

이다. 또한, (b)와 같은 방법으로 $g(x_0)\neq 0$ 일 때

$\lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)|-|g(x_0-h)|}{h}=0$ 일 필요충분조건은 $g'(x_0)=0$ 인 것임을 알 수 있다.

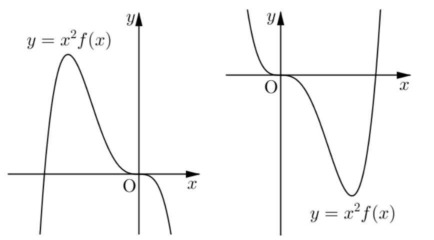
이로부터 문제의 조건에서 방정식 $g(x)g'(x)=0$ 의 실근 중 가장 작은 것이 0 이고, 가장 큰 것은 3 임을 알 수 있다. … (##)

$f(0)=0$ 이고, $f'(0)=-3$ 이므로

$f(x)=ax^2-3x$ $(a\neq 0)$ 라 둘 수 있다.

$x<0$ 일 때, $g'(x)=3+x^2f(x)$ 이고,

a 의 부호에 따라 다음과 같이 $y=x^2f(x)$ 의 그래프를 나타낼 수 있다.



$a<0$ $\qquad$ $a>0$

$a<0$ 인 경우 $y=g'(x)=x^2f(x)+3$ 의 그래프는 $x<0$ 에서 반드시 적어도 한 개의 근을 가지므로 (##)을 만족시키지 않는다.

$a>0$ 인 경우 $x>0$ 일 때,

$$g(x)=f(x)+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\frac{1}{3}ax^3+\left(a-\frac{3}{2}\right)x^2-3x$$

이고,

$g'(x)=ax^2+(2a-3)x-3$

이다. 따라서 (##)에서

(a) $g(3)=0$ 인 경우

$\Rightarrow$ $18a-\frac{45}{2}=0$, $a=\frac{5}{4}$

$g(x)=\frac{1}{12}x(x-3)(5x+12)$

이므로 방정식 $g(x)=0$ 의 가장 큰 실근은 3 이고,

$g'(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{2}x-3$ 에서

이차함수 $y=g'(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\frac{1}{5}$,

$g'(3)=\frac{45}{4}-\frac{3}{2}-3>0$

이므로 방정식 $g'(x)=0$ 은 $x>3$ 인 해를 갖지 않는다.

따라서 $f(x)=\frac{5}{4}x^2-3x$ 은 문제의 조건을

만족시킨다.

(b) $g'(3)=0$ 인 경우

$\Rightarrow\ 15a-12=0\,,\ a=\dfrac{4}{5}$

$g(x)=\dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{7}{10}x^2-3x\,,$

$g(3)=\dfrac{4}{15}\times 27-\dfrac{7}{10}\times 9-9<0$

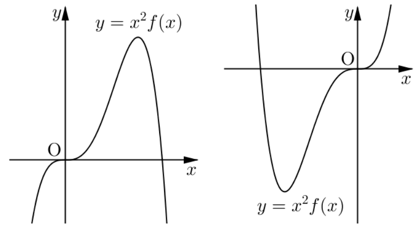
$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(3\,,\infty)$ 에서 실근을 갖는다. 이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f'(0)=3$ 인 경우

$f(0)=0$ 이고, $f'(0)=3$ 이므로

$f(x)=ax^2+3x\ (a\neq 0)$ 라 둘 수 있다.

a 의 부호에 따라 다음과 같이 $y=x^2f(x)$ 의 그래프를 나타낼 수 있다.



$a<0$ $\qquad$ $a>0$

(i)과 같은 방법으로 $a<0$ 인 경우 $x<0$ 에서 $g'(x)=0$ 인 x 가 1 개 존재하므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

$a>0$ 인 경우, $x>0$ 일 때,

$g(x)=ax^2+3x+\displaystyle\int_0^x(ax^2+3x)dx$

$\quad=\dfrac{1}{3}ax^3+\left(a+\dfrac{3}{2}\right)x^2+3x$

이고

$g'(x)=ax^2+(2a+3)x+3$

이다.

$g(3)=0\ \Rightarrow\ 18a+\dfrac{45}{2}=0\,,\ a=-\dfrac{5}{4}$

$g'(3)=0\ \Rightarrow\ 15a+12=0\,,\ a=-\dfrac{4}{5}$

이므로 어떤 경우라도 $a<0$ 이 된다. 이는 위의 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=\dfrac{5}{4}x^2-3x$ 이고,

$x<0$ 일 때,

$$g'(x)=3+x^2f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^3+3$$

이므로 $g'(-2)=20+24+3=47$ 이다.

확률과 통계(23 ~ 30)

23. [출제 의도] 중복순열의 수를 구할 수 있는가?

짝수가 되려면 일의 자리수가 2 또는 4 이어야 하므로 구하는 짝수의 개수는

$$4\times 4\times 2=32$$

24. [출제 의도] 이산확률변수의 성질을 이해하고, 그 평균과 분산을 구할 수 있는가?

$\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=15$ 에서 $\mathrm{E}(X)=8$

$\mathrm{E}\big((X-1)^2\big)=\mathrm{E}(X^2-2X+1)$

$\qquad=\mathrm{E}(X^2)-2\mathrm{E}(X)+1$

$\qquad=\mathrm{E}(X^2)-15=110$

이므로 $\mathrm{E}(X^2)=125$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=125-64=61$

25. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 각 항의 계수를 구할 수 있는가?

이항정리에 의하여

$(x-1)^2$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 1 ,

$\left(2-\dfrac{a}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$ 의 계수는

$2^2\times a^2\times {}_4\mathrm{C}_2=24a^2$

$(x-1)^2$ 의 전개식에서 x 의 계수는 -2 ,

$\left(2-\dfrac{a}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 $\dfrac{1}{x}$ 의 계수는

$2^3\times(-a)\times {}_4\mathrm{C}_1=-32a$

$(x-1)^2$ 의 전개식에서 상수항은 1 ,

$\left(2-\dfrac{a}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항은 $2^4=16$

이므로 주어진 식의 전개식에서 상수항은

$1\times 24a^2-2\times(-32a)+1\times 16=24a^2+64a+16$

주어진 조건으로부터

$24a^2+64a+16=40$

$3a^2+8a-3=0\,,\ (3a-1)(a+3)=0$

$a>0$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$ 이다.

26. [출제 의도] 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

$a+b=6$ 이므로 $\dfrac{b}{a}\geq 2\ \Rightarrow\ b\geq 2a>0$ 인

순서쌍 $(a\,,b)$ 는 $(1\,,5)$, $(2\,,4)$ 뿐이다.

(i) $(a\,,b)=(1\,,5)$ 인 경우

5 의 약수인 눈이 1 번, 5 의 약수가 아닌 눈이 5 번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^6}{3^5}$$

(ii) $(a\,,b)=(2\,,4)$ 인 경우

5 의 약수인 눈이 2 번, 5 의 약수가 아닌 눈이 4 번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{5\times 2^4}{3^5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2^6+5\times 2^4}{3^5}=\frac{16\times 9}{3^5}=\frac{16}{27}$$

27. [출제 의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

집합 A 의 모든 부분집합의 개수는 $2^5=32$ 이다.

(i) $n(X)=3$ 인 집합 X 의 개수는

$${}_5\mathrm{C}_3=10$$

(ii) $X\cap\{a,b\}\neq\varnothing$ 인 집합 X 의 개수는 집합 A 의 모든 부분집합의 개수에서 $Y\cap\{a,b\}=\varnothing$ 인 A 의 부분집합 Y 의 개수를 빼면 되므로

$$2^5-2^3=24$$

(iii) $n(X)=3$ 이고 $X\cap\{a,b\}\neq\varnothing$ 인 집합 X 의 개수는 원소의 개수가 3 인 A 의 모든 부분집합의 개수에서 $\{c,d,e\}$ 1 개만 제외하면 되므로

$${}_5\mathrm{C}_3-1=9$$

(i), (ii), (iii)에서 문제에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{10+24-9}{32}=\frac{25}{32}$$

28. [출제 의도] 정규분포를 따르는 확률변수의 표준화를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\mathrm{P}(|X-m_1|\leq k_1)=\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X-m_1}{0.5}\right|\leq\dfrac{k_1}{0.5}\right)$

$\qquad=\mathrm{P}\left(|Z|\leq\dfrac{k_1}{0.5}\right)=0.95$

이므로 $\dfrac{k_1}{0.5}=1.96\ \Rightarrow\ k_1=0.98$

비슷한 방법으로 $k_2=1.96\sigma$ 이다.

닫힌구간 $[m_1-k_1\,,m_1+k_1]$ 의 모든 원소가 닫힌구간 $[m_2-k_2\,,m_2+k_2]$ 의 모든 원소가 되려면

$m_2-k_2\leq m_1-k_1\,,\ m_1+k_1\leq m_2+k_2$

이어야 한다.

$m_2-m_1=1.47$ 이므로

$k_2\geq k_1+m_2-m_1$

$\Rightarrow\ 1.96\sigma\geq 0.98+1.47=2.45$

$\Rightarrow\ \sigma\geq 1.25$

$k_2\geq k_1+m_1-m_2$

$\Rightarrow\ 1.96\sigma\geq 0.98-1.47=-0.49$

$\Rightarrow\ \sigma\geq -0.25$

따라서 σ 의 최솟값은 1.25 이다.

29. [출제 의도] 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

(가) 조건에 따라 8 이 적힌 꼭짓점과 이웃한 꼭짓점에 1 이 있는 경우와 없는 경우로 나누어 생각한다.

정팔각형의 꼭짓점 중 하나에 8 이 적힌 꼭짓점을 적는 방법의 수는 1 이다. … ①

(i) 8 이 적힌 꼭짓점과 이웃한 꼭짓점에 1 이 있는 경우,

1 을 적는 방법의 수는 8 의 양 옆자리 중 하나를 선택하는 방법의 수이므로 2

8 과 이웃한 꼭짓점 중 1 이 적힌 꼭짓점을 제외한 나머지 한 점에 숫자를 적는 방법의 수는 2 (2 와 4 중에 하나 선택)

1 이 적힌 꼭짓점과 이웃한 꼭짓점에는 8 과 짝수가 있어야 하므로, 위에서 8 과 이웃한 두 꼭짓점 중 하나에 배열한 짝수가 아닌 다른 두 짝수 중 하나는 반드시 1 과 이웃해야 한다.

(즉, 8 의 양 옆에 1 , 2 가 있는 경우, 1 의 양 옆에는 2 와 4 또는 2 와 6 이 있어야 한다.)

따라서 나머지 꼭짓점에 숫자를 적는 방법의 수는

$$2\times 4!=48$$

따라서 이 경우 정팔각형의 각 꼭짓점에 숫자를 배열하는 방법의 수는

$2\times2\times48=192$

(ii) 8이 적힌 꼭짓점과 이웃한 꼭짓점에 1이 없는 경우

8과 이웃한 두 꼭짓점에 숫자를 적는 방법의 수는 2 (2, 4를 배치)

남은 짝수는 6뿐이고, 1이 적힌 꼭짓점과 이웃한 두 꼭짓점에는 각각 짝수가 있어야 하므로

1이 적힌 꼭짓점은 2 또는 4가 적힌 꼭짓점과 이웃해야 한다.

따라서 숫자 1을 배치하는 방법의 수는 2

이때 6이 적힌 꼭짓점은 1이 적힌 꼭짓점과 이웃해야 하므로 숫자 6을 배치하는 방법의 수는 1이다.

나머지 숫자들을 배열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우 정팔각형의 각 꼭짓점에 숫자를 배열하는 방법의 수는

$2\times2\times2\times6=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$192+48=216$

30. [출제 의도] 조건부확률의 뜻을 이해하고, 여사건을 이용하여 확률의 계산을 할 수 있는가?

$c-a=1$이므로 $c=2$이거나 $c=3$이다. c의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다. (확률의 계산이므로 주머니 속의 공은 모두 다른 것으로 취급한다.)

(i) $c=2$인 경우

$a=1$이므로

$b=1$일 때, 세 개의 공을 뽑는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_1=9$

$b=2$일 때, 세 개의 공을 뽑는 방법의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2=9$

따라서 $c=2$일 때, 세 개의 공을 뽑는 방법의 수는

$9+9=18$

(ii) $c=3$인 경우

$a=b=2$이므로 세 개의 공을 뽑는 방법의 수는

${}_3C_2=3$

또한, 이때 3이 적힌 공의 색이 검은색이므로 꺼낸 3개의 공 중 적어도 하나는 검은 공이다.

(iii) $c=2$이고, 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 있는 경우

$a=1$이므로

$b=1$일 때, 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 단 하나도 없는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_2=2$

즉, 이때 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 있는 경우의 수는 (i)에서

$9-2=7$

$b=2$일 때, 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 단 하나도 없는 경우의 수는

${}_2C_2\times{}_2C_1=2$

즉, 이때 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 있는 경우의 수는 (i)에서

$9-2=7$

따라서 $c=2$이고, 꺼낸 3개의 공 중 검은 공이 있는 경우의 수는

$7+7=14$

(i), (ii), (iii)과 조건부확률의 정의에서 구하는 확률은

$\frac{14+3}{18+3}=\frac{17}{21}$

$\therefore\ p+q=21+17=38$

미 적 분 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 초월함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x\ln(1+2x)}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=-2$$

24. [출제 의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{a_n}{n^2+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{a_n}{n^2+1}\right)=0$$

$b_n=2n+\frac{a_n}{n^2+1}$이라 두면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고,

$a_n=(n^2+1)(b_n-2n)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)^3}{(3n+1)a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)^3}{(3n+1)(n^2+1)(b_n-2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{b_n}{n}-2\right)}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$$

25. [출제 의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 계산할 수 있는가?

x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 문제의 조건에서

$$S(x)=\frac{\sqrt3}{4}\{f(x)\}^2=\frac{\sqrt3}{4}\cdot\frac{x}{x^2+1}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac12}^{2}S(x)dx=\frac{\sqrt3}{4}\int_{\frac12}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\sqrt3}{8}\int_{\frac12}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{\sqrt3}{8}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_{\frac12}^{2}=\frac{\sqrt3}{8}\left(\ln5-\ln\frac54\right)=\frac{\sqrt3}{4}\ln2$$

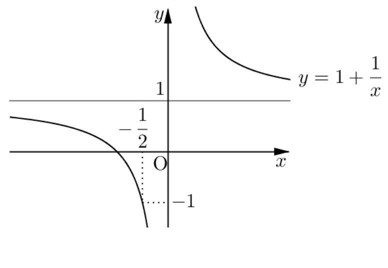
26. [출제 의도] 등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

$f(0)=1$이므로 $x=0$은 주어진 방정식의 해가 아니다.

$x\neq0$인 경우, 분자와 분모를 x^n으로 나누어 정리하면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac1x\right)^{n+2}(1+x)^2+1}{\left(1+\frac1x\right)^n+x^2}$$

이다. 이때 함수 $y=1+\frac1x$의 그래프는 다음과 같다.



이에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) $x<-\frac12$인 경우, $-1<1+\frac1x<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^n=0$이다. 따라서

$f(x)=\frac{1}{x^2}$이다.

$f(x)=\frac94\ \Rightarrow\ \frac{1}{x^2}=\frac94,\ x=\pm\frac23$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 x의 값은 $-\frac23$이다.

(ii) $-\frac12<x<0$인 경우, $1+\frac1x<-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac1x\right)^n}=0$이다. 따라서

$f(x)=(1+x)^2$이다.

$f(x)=\frac94\ \Rightarrow\ (1+x)^2=\frac94,$

$\Rightarrow\ x=\frac12$ 또는 $x=-\frac52$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $x>0$인 경우 $1+\frac1x>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac1x\right)^n}=0$이다. 따라서

$f(x)=(1+x)^2$이다.

$f(x)=\frac94\ \Rightarrow\ (1+x)^2=\frac94,$

$\Rightarrow\ x=\frac12$ 또는 $x=-\frac52$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 x의 값은 $\frac12$이다.

(i)~(iii)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 합은 $-\frac23+\frac12=-\frac16$이다.

27. [출제 의도] 여러 가지 미분법과 적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 두자.

문제에서 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$e^2g(2)=4+2a+b=0,\ 2a+b=-4\ \cdots$ ①

$y=xf(2x)$의 한 부정적분을 $y=F(x)$라 하면

미적분의 기본 정리에서

$$F\left(\frac{x}{2}\right)-F(1)=\frac{g(x)}{e^x}=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

가 성립한다.

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac12F'\left(\frac{x}{2}\right)=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$$

$\Rightarrow\ \frac{x}{4}f(x)=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$

위 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a-b=0\ \cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=b=-\frac43$

$\therefore\ xf(x)=4\left(-x^2+\frac{10}{3}x\right)e^{-x}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고,

$x\neq0$이면 $f(x)=4\left(-x+\frac{10}{3}\right)e^{-x}$이므로

$\therefore\ f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\frac{40}{3}$

28. [출제 의도] 함수의 그래프를 그리고, 함수의 극대와

극소를 판별할 수 있는가?

모든 실수 x에 대하여 $0 \le \sin^2 2x \le 1$이므로
$1 \le e^{\sin^2 2x} \le e$가 성립한다. 또한

$$|f(x)| = e^{\sin^2 2x} + k \ge 0$$

이므로 $k \ge -1$이다.

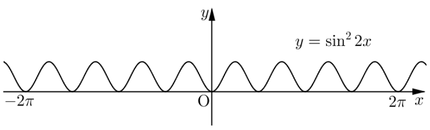
(i) $k > -1$인 경우, $|f(x)| > 0$이고 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(x) = e^{\sin^2 2x} + k$ 또는 $f(x) = -e^{\sin^2 2x} - k$

가 성립한다.

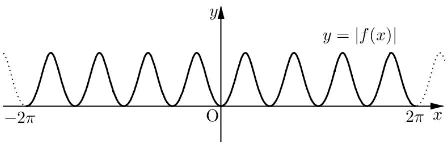
함수 $y = e^x$는 증가함수이므로 위의 경우 함수 $y = f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 함수 $y = \sin^2 2x$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값과 같다.

열린구간 $(-2\pi, 2\pi)$에서
함수 $y = \sin^2 2x$가 극대가 되는 x는 $\sin^2 2x = 1$인 x와 같고, 그 개수는 8이다.
또한, 함수 $y = \sin^2 2x$가 극소가 되는 x는 $\sin^2 2x = 0$인 x와 같고, 그 개수는 7이다.

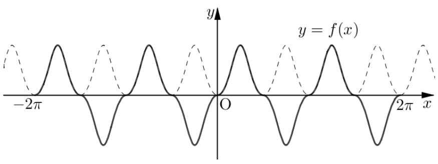


이 경우, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

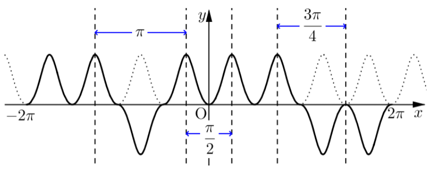
(ii) $k = -1$인 경우, 함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 $\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$인 점에서 x축과 접한다.
따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 $\sin 2x = 0$인 x의 값을 기준으로
함수 $y = e^{\sin^2 2x} - 1$의 그래프 또는
함수 $y = -e^{\sin^2 2x} + 1$의 그래프 중 하나를 택하여 그린 것과 같다. ⋯ (#)



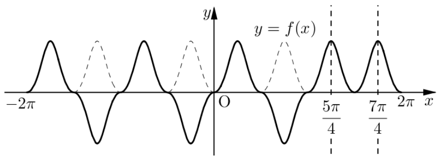
다음은 함수 $y = f(x)$가 4개의 점에서 극댓값을 갖는 경우 중 하나이다.

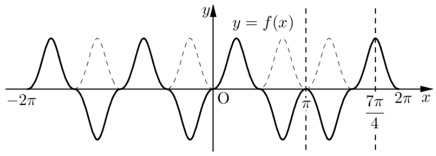


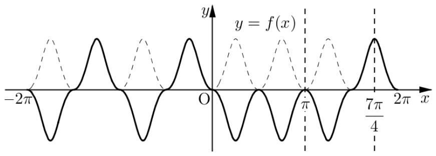
(#)에 의하여 $y = f(x)$가 극댓값을 갖는 연속된 두 개의 x의 값의 차는 다음 그림과 같이
$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π 중 하나이다. ⋯ (##)



(1) $x = \frac{7\pi}{4}$이 함수 $y = f(x)$가 극댓값을 갖는 x 중 가장 큰 값인 경우, (##)에 의하여 $\frac{7\pi}{4}$보다 작고,
함수 $y = f(x)$가 극대인 것 중 가장 큰 x의 값은
$\frac{5\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{4}$ 중 하나이다.

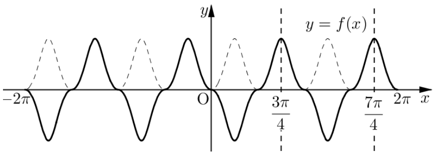






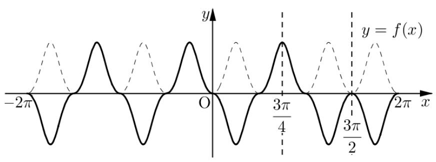
위와 같이 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{5\pi}{4}$에서 함수 $y = f(x)$가 극대인 경우, 함수 $y = f(x)$는 최소 5개의 극대점을 갖는다. (어떤 경우라도 $x > 0$에서 3개 이상의 극대점을 가지기 때문이다.)

이와 비슷한 방법으로, 함수 $y = f(x)$가 $x = \frac{7\pi}{4}$에서 극대인 경우, 연속된 두 극대점의 차가 $\frac{3\pi}{4}$이거나 π인 두 x의 값이 존재하면 항상 5개 이상의 극대점이 존재한다.



따라서 위 그림과 같이 $x = -\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$에서 극댓값을 갖는 경우만 문제를 만족시킨다.
즉, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$의 최댓값은 π이다.

(2) $x = \frac{3\pi}{2}$가 함수 $y = f(x)$가 극댓값을 갖는 x 중 가장 큰 값인 경우, (1)과 비슷한 방법으로 $x > 0$인 극대점이 2개만 존재해야 하므로 다음 그림과 같이 $x = -\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$인 경우가 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$가 최대가 되는 경우이다.



즉, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$의 최댓값은 $\frac{3\pi}{4}$이다.

(3) $x = \frac{5\pi}{4}$가 함수 $y = f(x)$가 극댓값을 갖는 x 중 가장 큰 값인 경우는 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$의 최댓값은 (1)의 경우보다 작다.

(1)~(3)에서 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$의 최댓값은 π이다.

29. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\overline{AC} = \sqrt{2}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{4} - \theta$이므로

$$\overline{CD} = \overline{BC}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

한편 삼각형 ACD와 DCE에서
$\angle A = \angle CDE = \frac{\pi}{4}$, $\angle ACE$는 공통이므로
$\therefore\ \triangle ACD \backsim \triangle DCE$
위 두 삼각형의 닮음비는

$$\overline{AC} : \overline{CD} = \sqrt{2} : \sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \ \cdots\ (\#)$$

이므로 두 삼각형의 넓이비는 $2 : \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$이다.

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CD} \times \sin(\angle ACD)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\sin\theta$$

이므로

$$\triangle DCE = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\triangle ACD$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sec^3\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\sin\theta$$

$$\therefore\ f(\theta) = \triangle ACD - \triangle DCE$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\sin\theta\left\{1 - \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} \times \frac{\sin\theta\tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$(\because\ 1 - \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$
$= 1 - \frac{1}{2}\left\{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$
$= \frac{1}{2}\left\{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$
$= \frac{1}{2}\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}\left\{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$
$= \frac{1}{2}\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}\left(1 - \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)$
$= \left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} \times \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta})$

한편

$$\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD}$$
$$= 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

이므로 (#)에서

$$\overline{DE} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \times \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

따라서 $\triangle DEF$는 $\angle DEF = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{DF} = \sqrt{2} \times \overline{DE} = \sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \times \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$\angle FDG = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\pi}{4} + \theta$이므로

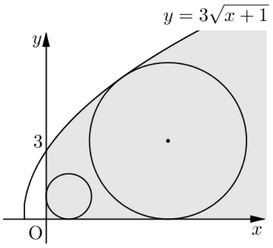
$$\therefore\ g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{DF}^2 \times \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2$$

$$\therefore\ \lim_{\theta \to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times 2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \times 2} \times \lim_{\theta \to 0+}\frac{4\tan^2\theta}{\sin\theta\tan\theta}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

이므로 $k = \frac{1}{2}$이다. $\therefore\ 80k = 40$

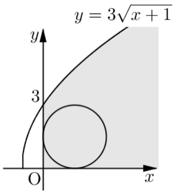
30. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

문제의 조건을 만족시키는 원 C_t는 그림과 같이 x축에 접하면서 $y = 3\sqrt{x+1}$ 또는 y축에 접하는 원이다.



(i) 곡선 $y=3\sqrt{x+1}$ 의 y 절편은 3이고,

$t=\dfrac{3}{2}$ 인 경우, 원 C_t 의 지름의 길이가 3이므로 원 C_t 는 곡선 $y=3\sqrt{x+1}$ 과 만나지 않는다.

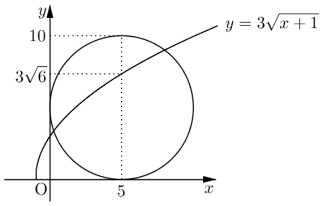


즉, 원 C_t 는 제1사분면에서 x 축과 y 축에 각각 접하는 원이다.

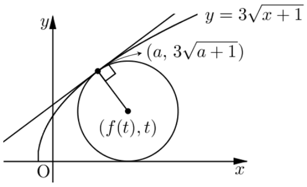
또한, 비슷하게 $t=\dfrac{3}{2}$ 의 근방에서도 원 C_t 는 제1사분면에서 x 축과 y 축에 각각 접하는 원이다. 따라서 이때 원 C_t 의 중심의 좌표는 (t, t) 이다.

$\therefore\ f(t)=t \ \Rightarrow\ f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$

(ii) $t=\beta$ 인 경우, 원 C_t 의 중심이 (t, t) 라고 가정하면, $f(\beta)=5$ 이므로 $\beta=f(\beta)=5$ 이다.
이때 원 C_t 의 지름의 길이는 10이고,
곡선 $y=3\sqrt{x+1}$ 은 점 $(5, 3\sqrt{6})$ 을 지나므로 $10>3\sqrt{6}$ 에서 원 C_t 와 $y=3\sqrt{x+1}$ 은 접할 수 없다.



따라서 $t=\beta$ 인 경우, 원 C_t 는 x 축 및 곡선 $y=3\sqrt{x+1}$ 과 접하는 원이다.



위 그림과 같이 원 C_t 와 곡선 $y=3\sqrt{x+1}$ 이 접하는 점의 좌표를 $(a, 3\sqrt{a+1})$ 이라 하면

(참고) a 는 t 의 값에 의존하므로 a 는 t 에 대한 함수이다.
$a(t)$ 와 같이 표기하는 것이 옳으나, 여기서는 편의상 그냥 a 로 표기하고, 필요할 때만 $a(t)$ 로 표기하겠다.

$$y=3\sqrt{x+1}\ \Rightarrow\ y'=\frac{3}{2\sqrt{x+1}}\ \text{에서}$$

점 $(a, 3\sqrt{a+1})$ 에서의 접선과 두 점 $(a, 3\sqrt{a+1})$, $(f(t), t)$ 을 지나는 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{3}{2\sqrt{a+1}}\times\frac{t-3\sqrt{a+1}}{f(t)-a}=-1 \quad \cdots (1)$$

$\Rightarrow\ t-3\sqrt{a+1}=\dfrac{2}{3}\sqrt{a+1}\{a-f(t)\}$

$t=\beta$ 를 대입하면

$$\beta-3\sqrt{a+1}=\frac{2}{3}\sqrt{a+1}(a-5) \quad \cdots (2)$$

두 점 $(a, 3\sqrt{a+1})$, $(f(t), t)$ 사이의 거리가 t 이므로

$$\{f(t)-a\}^2+\left(t-3\sqrt{a+1}\right)^2=t^2 \quad \cdots (3)$$

$t=\beta$ 를 대입하면

$$(a-5)^2+\left(\beta-3\sqrt{a+1}\right)^2=\beta^2$$

(2)을 위 등식에 대입하면

$$(a-5)^2+\frac{4}{9}(a+1)(a-5)^2=(a+1)\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}\right)^2$$

$\Rightarrow\ (a-5)^2=(a+1)\left\{\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}(a-5)^2\right\}$

$\Rightarrow\ (a-5)^2=(a+1)(4a-11)$

$\Rightarrow\ a^2+a-12=0$

$a>0$ 이므로 $a=3$ 이고, (1)에서 $\beta=\dfrac{10}{3}$ 이다.

문제의 조건에서 $t>\alpha$ 일 때 함수 $f(t)$ 는 미분가능하고, (즉, $t=\beta$ 의 근방에서 미분가능하고) (1)에서 $a(t)$ 또한 미분가능하다.

따라서 (3)의 양변을 t 에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$2\{f(t)-a\}\times\{f'(t)-a'\}+2\left(t-3\sqrt{a+1}\right)\left(1-\frac{3a'}{2\sqrt{a+1}}\right)=2t$$

$t=\beta$ 를 양변에 대입하면

$$4\{f'(\beta)-a'(\beta)\}-\frac{16}{3}\left(1-\frac{3a'(\beta)}{4}\right)=\frac{20}{3}$$

$4f'(\beta)=12 \qquad \therefore\ f'(\beta)=3$

(i), (ii)에서

$$\therefore\ f'\left(\frac{3}{2}\right)+\beta\times f'(\beta)=1+\frac{10}{3}\times 3=11$$

기 하 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 두 벡터가 평행할 조건을 알고 있는가?

두 벡터가 평행하므로

$\dfrac{3-2a}{2}=\dfrac{2+a}{3}$,

$9-6a=2a+4$, $8a=5$, $\therefore\ a=\dfrac{5}{8}$

24. [출제 의도] 타원의 정의를 이해하고 있는가?

주어진 타원은 $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{k^2}}=1$ 이므로

초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c, 0)\ (c>0)$ 이라 하면

$$c=\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\ (\because\ k>1)$$

점 C의 좌표는 $\left(0, \dfrac{1}{k}\right)$ 이고, 삼각형 CFF′ 이 정삼각형이므로

$\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}:\dfrac{1}{k}=1:\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{k}=\sqrt{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}$, $\dfrac{1}{k^2}=3-\dfrac{3}{k^2}$

$\Rightarrow\ k^2=\dfrac{4}{3}$, $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

25. [출제 의도] 구의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

구 S 의 중심은 두 점 $(0, 2, a)$, $(-1, 5, 5)$ 의 중점이므로 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{a+5}{2}\right)$ 이다.

또한, 구 S 의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+3^2+(a-5)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-10a+35}$

이다. 따라서 구 S 의 방정식은

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a+5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(a^2-10a+35\right)$$

이다. 구 S 가 z 축과 단 한 점에서만 만나므로 $x=y=0$ 을 대입하였을 때, 위 방정식을 만족하는 z 의 값이 단 하나 존재해야 한다.

즉, z 에 대한 방정식

$$\left(z-\frac{a+5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(a^2-10a+35\right)-\frac{25}{2}$$

$\Rightarrow\ \left(z-\dfrac{a+5}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(a^2-10a-15\right)$

이 중근을 가지므로

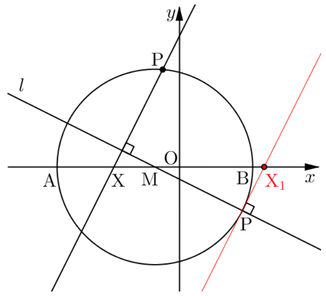
$a^2-10a-15=0 \quad \therefore\ a=5+2\sqrt{10}$

26. [출제 의도] 벡터를 포함한 방정식을 만족시키는 도형의 성질을 추론할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ 이므로 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ 이다. 따라서 원주각의 성질에 의하여 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

한편 $t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 에서

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 라 하면 점 X는 직선 AB 위에 있다. 즉, 점 X는 x 축 위의 점이다.
이를 정리하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{PX}\cdot\vec{p}=0$ 이므로 직선 PX는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선과 수직이다.

선분 AB의 중점 M에 대하여 M을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선을 l이라 하면, 직선 PX는 l과 수직이다. 이때 t가 최대가 되려면 그림과 같이 직선 PX가 원과 점 P에서 접해야 한다.

즉, 직선 l과 원이 만나는 점이 P일 때 t가 최댓값을 가진다. (이때 점 X의 위치를 X_1이라 하자.)

점 M은 원의 중심이므로 $\overline{PM}=\overline{AM}=4$이고, $\tan(\angle PMB)=-\frac{1}{2}$ 이므로

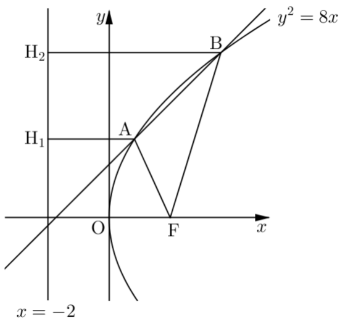
$\overline{MX_1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{PM}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AX_1}=4+2\sqrt{5}$

따라서 t의 최댓값은 $\frac{\overline{AX_1}}{\overline{AB}}=\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ 이다.

27. [출제 의도] 포물선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

주어진 포물선의 준선은 $x=-2$이고, 그림과 같이 두 점 A, B에서 포물선의 준선으로 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



$\overline{AF}=a$라 하면, 포물선의 정의에서 $\overline{AH_1}=a$이고, $\overline{BF}=2a$이므로 $\overline{BH_2}=2a$이다.

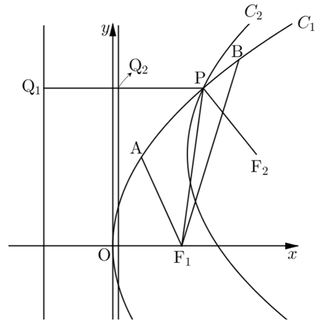
따라서 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-2+a$, $-2+2a$이다.

따라서 삼각형 ABF_1의 무게중심의 x좌표는

$\frac{1}{3}(-2+a-2+2a+2)=\frac{3a-2}{3}=a-\frac{2}{3}$

이다. 따라서 포물선 C_2의 꼭짓점의 x좌표는

$a-\frac{2}{3}$ 이다.



포물선 C_2의 준선의 방정식은

$$x=-2+a-\frac{2}{3}=a-\frac{8}{3}$$

이다. 이때 그림과 같이 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 C_1, C_2의 준선과 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

그러면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PF_1}-\overline{PF_2}&=\overline{PQ_1}-\overline{PQ_2}\\&=\overline{Q_1Q_2}\\&=\left(a-\frac{8}{3}\right)-(-2)=a-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 문제의 조건에서

$$a-\frac{2}{3}=\frac{7}{3},\ a=3$$

따라서 두 점 A, B의 x좌표는 각각 1, 4이고, 두 점 A, B의 좌표는 $A(1,\ 2\sqrt{2})$, $B(4,\ 4\sqrt{2})$ 이다.

따라서 삼각형 ABF_1의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+4+2}{3},\ \frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{3}\right)=\left(\frac{7}{3},\ 2\sqrt{2}\right)$

이다. 이는 포물선 C_2의 꼭짓점의 좌표와 같다.

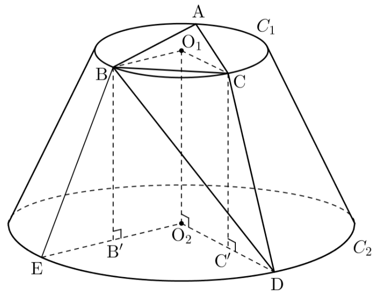
선분 F_1F_2의 길이는 원점과 포물선 C_2의 꼭짓점 사이의 거리와 같으므로

$\therefore\ \overline{F_1F_2}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{49+72}{9}}=\frac{11}{3}$

28. [출제 의도] 정사영의 정의를 알고, 선분의 정사영의 길이를 구할 수 있는가?

원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 두 점 B, C의 원 C_2를 포함하는 평면 위로의 정사영을 각각 B′, C′이라 하자.

또, 직선 O_2B'이 원 C_2와 만나는 점 중 B′과 가까운 점을 E라 하자.



문제의 조건에서 $\overline{CC'}=4$, $\overline{CD}=2\sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{C'D}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$$

$\overline{O_2C'}=\overline{O_1C}=2$이고 원 C_2의 반지름의 길이가 4이므로 세 점 O_2, C′, D는 한 직선 위에 있다.

두 선분 BC, B′C′은 평행하고, 두 점 B′, C′은 각각 두 선분 O_2E, O_2D의 중점이므로 중점연결정리에 의하여 두 선분 B′C′과 ED는 평행하다.

따라서 두 선분 BC, ED는 평행하다.

즉, 사각형 BCDE는 $\overline{CD}=\overline{BE}$인 등변사다리꼴이고, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\overline{ED}=4\sqrt{3}$ 이다.

점 C에서 선분 ED 위로 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DH}=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}-2\sqrt{3})=\sqrt{3}$ 이므로

삼각형 CDH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{17}$$

$\therefore\ \triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CH}=\sqrt{51}$

한편 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 H′이라 하면 정사면체 ABCD의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times\overline{AH'}=\frac{\sqrt{51}}{3}\times\overline{AH'}$$

이다. 또한, $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$ 이고, $\overline{O_1O_2}=4$이므로 정사면체 ABCD의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{O_1O_2}=4\sqrt{3}$$

이다. 따라서

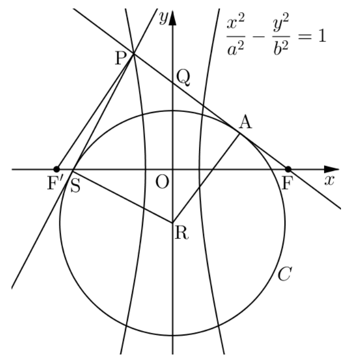
$$\frac{\sqrt{51}}{3}\times\overline{AH'}=4\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \overline{AH'}=\frac{12}{\sqrt{17}}$$

삼각형 ABH′에서 선분 BH′가 선분 AB의 평면 BCD 위로의 정사영이고,

$$\begin{aligned}\overline{BH'}&=\sqrt{(\overline{AB})^2-(\overline{AH'})^2}\\&=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{17\times12}{17}-\frac{12\times12}{17}}=\frac{2\sqrt{255}}{17}\end{aligned}$$

이므로 선분 AB의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는 $\frac{2\sqrt{255}}{17}$ 이다.

29. [출제 의도] 쌍곡선과 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



$\overline{OQ}=3$이므로 $\triangle OFQ$에서 $\overline{FQ}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다. 이때 $\triangle FOQ\backsim\triangle RAQ$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AR}=x$라 하면 $\overline{AQ}=\frac{3}{4}x$, $\overline{QR}=\frac{5}{4}x$

□PQRS의 둘레의 길이가 15이고

$\overline{PA}=\overline{PS}$, $\overline{AR}=\overline{RS}$ 이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{PS}=15$

$\Rightarrow\ (\overline{PA}-\overline{AQ})+\overline{QR}+\overline{AR}+\overline{PA}=15$

$\Rightarrow\ 2\overline{PA}-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}x+x=15$

$\Rightarrow\ \overline{PA}=\frac{15}{2}-\frac{3}{4}x\ \cdots$ ①

조건에서 $\overline{PA}:\overline{AF}=11:5$ 이므로

$\left(\frac{15}{2}-\frac{3}{4}x\right):\left(5-\frac{3}{4}x\right)=11:5$

$\Rightarrow\ \frac{75}{2}-\frac{15}{4}x=55-\frac{33}{4}x,\ x=\frac{35}{9}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{16}{5}\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{16}{5}\left(5-\dfrac{3}{4}x\right)=\dfrac{20}{3}$

삼각형 PFF′ 에서 $\cos(\angle \mathrm{PFF'})=\dfrac{4}{5}$ 이므로

코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos(\angle \mathrm{PFF'})$$

$$=\left(\dfrac{20}{3}\right)^2+8^2-2\times\dfrac{20}{3}\times 8\times\dfrac{4}{5}$$

$$=\dfrac{400}{9}+64-\dfrac{256}{3}=\dfrac{208}{9}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$

따라서 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는

$$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{20}{3}-\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$$

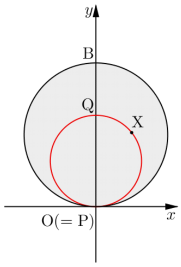
$\therefore\ p+q=\dfrac{20}{3}+\dfrac{4}{3}=8$

30. [출제 의도] 벡터를 포함한 방정식을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?

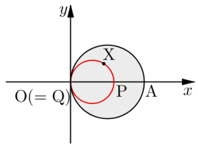
(1) 집합 A 에 속하는 점 X는 $\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}}=0$ 을 만족시키므로 $\angle \mathrm{PXQ}=90^\circ$ 이다. 즉, 점 X는 선분 PQ를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

점 X가 움직이는 영역을 다음과 같이 나누어 생각한다.

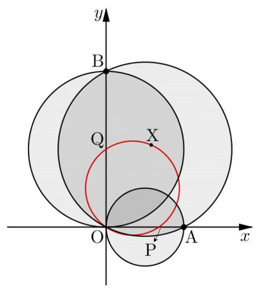
(i) 점 P가 원점에 있고, 점 Q가 $\overline{\mathrm{OB}}$ 위를 움직이는 경우, 오른쪽 그림과 같이 점 X가 그리는 영역은 선분 OB를 지름으로 하는 원과 그 내부이다.



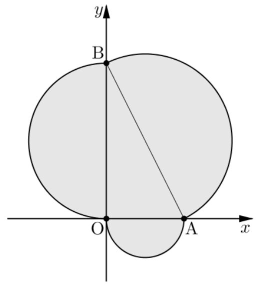
(ii) 점 Q가 원점에 있고, 점 P가 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위를 움직이는 경우, 아래 그림과 같이 점 X가 그리는 영역은 선분 OA를 지름으로 하는 원과 그 내부이다.



(iii) 점 P, Q가 각각 선분 OA, OB 위를 움직이는 경우, 점 X가 그리는 영역은 선분 AB를 지름으로 하는 원과 그 내부이다. 이때 $\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$, $\angle \mathrm{PXQ}=90^\circ$ 이므로 그림과 같이 점 X가 그리는 영역 중 제2사분면과 제4사분면에 속한 영역은 선분 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 원 밑 그 내부에 온전히 포함된다.



(i), (ii), (iii)에서 집합 A 의 원소들이 나타내는 영역은 다음과 같다.



(2) 집합 B에 속하는 점 Y는

$\overrightarrow{\mathrm{AY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

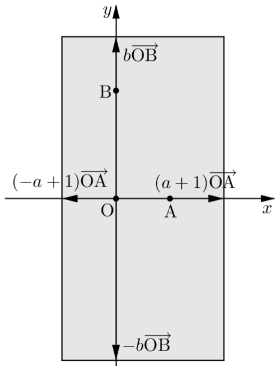
$\Rightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OY}}=(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

를 만족시키므로 점 Y는 두 벡터 $(s+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 와 $t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형에서 원점 O와 대각의 위치에 있는 점이다.

$|s|\le a$, $|t|\le b$ 이므로 점 Y가 그리는 영역은 그림과 같이 네 벡터

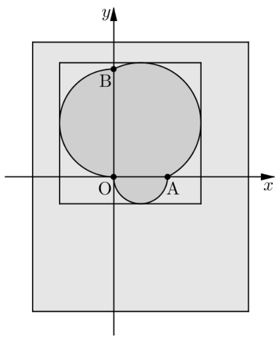
$(a+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $(-a+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $-b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

로 생성되는 직사각형 및 그 내부이다. ⋯ (*)

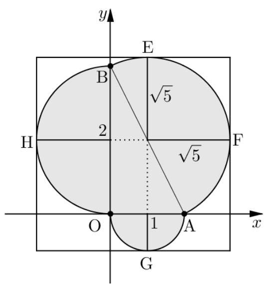


(1), (2)에서 $A\subset B$가 되려면 집합 B의 원소가 나타내는 영역인 직사각형과 그 내부가 집합 A가 나타내는 영역을 완전히 포함해야 한다.

위의 상황과 집합 A가 나타내는 도형을 포함하는 가장 크기가 작은 직사각형을 나타내면 그림과 같다.



크기가 가장 작은 직사각형이 집합 A가 나타내는 도형과 접하는 점을 아래 그림과 같이 각각 E, F, G, H라 하자.



그러면 그림으로부터 네 점 E, F, G, H의 좌표는 각각 $\mathrm{E}(1,2+\sqrt{5})$, $\mathrm{F}(1+\sqrt{5},2)$, $\mathrm{G}(1,-1)$, $\mathrm{H}(-2,2)$ 이다.

따라서 (*)에서

$a+1\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-a+1\le\dfrac{-2}{\overline{\mathrm{OA}}}=-1$

$\Rightarrow\ a\ge 2$

$b\ge\dfrac{2+\sqrt{5}}{\overline{\mathrm{OB}}}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$, $-b\le\dfrac{-1}{\overline{\mathrm{OB}}}=-\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\ b\ge\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ m_1=2$, $m_2=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow\ m_1+m_2=\dfrac{10+\sqrt{5}}{4}$ $\quad\therefore\ p+q=11$