02 수학 II

정답

01	2	**11**	12	**21**	11
02	4	**12**	13	**22**	7
03	2	**13**	12	**23**	123
04	-56	**14**	4	**24**	14
05	3	**15**	7	**25**	16
06	5	**16**	-8	**26**	41
07	23	**17**	0	**27**	65
08	10	**18**	8	**28**	59
09	⑤	**19**	81	**29**	45
10	8	**20**	26	**30**	108

01

$\lim_{x\to3} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to3}\{3f(x)+4g(x)\} = 1$에서

$\lim_{x\to3} \dfrac{3f(x)+4g(x)}{f(x)} = 0$이므로

$$\lim_{x\to3}\left\{3+\frac{4g(x)}{f(x)}\right\}=0$$

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{4f(x)-2g(x)}{5f(x)+3g(x)} &= \lim_{x\to3}\frac{4-\frac{2g(x)}{f(x)}}{5+\frac{3g(x)}{f(x)}}\\ &= \frac{4-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{5+3\times\left(-\frac{3}{4}\right)}\\ &= \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{4}}\\ &= 2\end{aligned}$$

02

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x-1}=6$을 만족시키는 다항함수 $f(x)+x^2$은 최고차항의 계수가 6인 일차함수이므로

$$f(x)=-x^2+6x+b\ (\text{단, } b\text{는 상수}) \cdots ㉠$$

또한 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-8}{x-1}=a$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-8\}=f(1)-8=0$에서

$$f(1)=8$$

㉠에서 $f(1)=-1^2+6+b=5+b$이므로

$$5+b=8,\ b=3$$

따라서

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-8}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1}\frac{(-x^2+6x+3)-8}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+6x-5}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x-5)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1}\{-(x-5)\}\\ &=-(1-5)\\ &=4\end{aligned}$$

03

$\{xf(x)\}^2-2f(x)g(x)+4g(x)-4x^2=0$에서 $x\neq 0$이면

$$\{f(x)\}^2-\frac{2f(x)g(x)}{x^2}+\frac{4g(x)}{x^2}-4=0$$

$$\{f(x)\}^2-4=\frac{2g(x)\times\{f(x)-2\}}{x^2}$$

$\lim_{x\to 0}f(x)=1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\{f(x)\}^2-4}{f(x)-2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1^2-4}{1-2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{9x^2f(x)-2g(x)}{x^3f(x)+2g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{9f(x)-\frac{2g(x)}{x^2}}{xf(x)+\frac{2g(x)}{x^2}}\\&=\frac{9\lim_{x\to 0}f(x)-2\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}}{\lim_{x\to 0}xf(x)+2\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}}\\&=\frac{9\times 1-2\times\frac{3}{2}}{0+2\times\frac{3}{2}}\\&=2\end{aligned}$$

04

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{4x^2+3x}=2$를 만족시키는 다항함수 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 8인 이차함수이므로

$$f(x)=2x^3+8x^2+ax+b\ (a,\ b\text{는 상수})\ \cdots\ ㉠$$

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow -3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to -3}f(x)=f(-3)=0$$

이때 $f(x)$는 삼차함수이므로 $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{(x+3)^k}$의 값이 존재하려면 $f(x)$는 $(x+3)^k$으로 나누어떨어져야 한다.

k가 2 이상의 자연수이므로

$$k=2\text{ 또는 }k=3$$

(i) $k=2$일 때

$f(x)$는 $(x+3)^2$으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=2(x+3)^2(x+c)\\&=2x^3+2(c+6)x^2+6(2c+3)x+18c\ (c\text{는 상수})\ \cdots\ ㉡\end{aligned}$$

으로 놓을 수 있다.

이때 ㉠, ㉡에서 x^2의 계수를 비교하면

$$8=2(c+6)$$

$$c=-2$$

즉, $f(x)=2(x+3)^2(x-2)$이므로

$$\begin{aligned}m&=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{(x+3)^2}\\&=\lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)^2(x-2)}{(x+3)^2}\\&=\lim_{x\to -3}2(x-2)\\&=-10\end{aligned}$$

(ii) $k=3$일 때

$f(x)$는 $(x+3)^3$으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$$f(x)=2(x+3)^3=2x^3+18x^2+54x+54$$

그러나 ㉠에서 $f(x)$의 x^2의 계수는 8이므로 이는 불가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x)=2(x+3)^2(x-2)$, $m=-10$이므로

$$f\left(\frac{m}{2}\right)=f(-5)=2\times(-2)^2\times(-7)=-56$$

05

조건 (가)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 1+a$이므로 $a=-1$인 경우와 $a \neq -1$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $a=-1$인 경우

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1$$

이므로

$$b=1$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3-x^2+x}{x^k}\right|$$

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3-x^2+x}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2-x+1|=1$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$k \geq 2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3-x^2+x}{x^k}\right|=\infty$$

로 발산한다.

(ii) $a \neq -1$인 경우

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax}=\frac{1-1}{1^2+a}=0$이므로

$$b=0$$

$a \neq -1,\ b=0$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^k}\right| \cdots ㉠$$

이때 $a=0$이면 ㉠은 $\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^k}\right|$이고

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2|=0,$$

$k=2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x|=0,$$

$k=3$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^3}\right|=\lim_{x\to0}|1|=1$$

로 각각 수렴하며

$k \geq 4$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{1}{x^{k-3}}\right|=\infty$$

로 발산하므로 ㉠이 1로 수렴하는 경우는 $k=3$이고 $a=0$인 경우이다.

$a \neq 0$이면 ㉠은

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2+ax|=0,$$

$k=2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x+a|=|a|$$

로 각각 수렴하며

$k \geq 3$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^k}\right|=\infty$$

로 발산한다.

즉, ㉠이 1로 수렴하는 경우는 $k=2$이고 $a=1$인 경우이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 0)$$

06

두 함수 $f(x)+g(x),\ f(x)-g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수

$$f(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2},$$
$$g(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$$

도 모두 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$이다.

$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(-ax+17)=2a+17,$$
$$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}(x^2+x+a^2)=2+a^2,$$
$$f(-2)=2+a^2$$

이므로

$$2a+17=2+a^2$$
$$a^2-2a-15=0$$
$$(a+3)(a-5)=0$$
$$a=-3 \text{ 또는 } a=5 \cdots ㉠$$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$이다.

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\left(-\frac{5}{2}x^2+a^2\right)=a^2-10,$$
$$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+6x-1)=15,$$
$$g(2)=15$$

이므로 $a^2-10=15$에서

$$a^2=25$$
$$a=5 \text{ 또는 } a=-5 \cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=5$

07

모든 자연수 k에 대하여 두 곡선 $y=x^3+k$, $y=4x^2-5x$는 한 점에서만 만나고 그 점의 x좌표가 α_k이므로 $f(x)=x^3-4x^2+5x+k$라 하면 방정식 $f(x)=0$은 항상 단 한 개의 실근 α_k를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ -1]$에서 연속이므로 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2,\ -1)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(-1)<0$이어야 한다.

$$f(-2)=-8-16-10+k=k-34,$$

$$f(-1)=-1-4-5+k=k-10$$

이므로

$$(k-34)(k-10)<0$$

$$10<k<34$$

따라서 자연수 k의 값은 $11,\ 12,\ 13,\ \cdots,\ 33$이고 그 개수는 23이다.

08

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$이다.

$$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}\frac{x^3+ax^2+bx+2}{x+2}\ \cdots\ ㉠$$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2-}f(x)&=\lim_{x\to-2-}f(|x|)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)\\&=\frac{8+4a+2b+2}{2+2}\\&=\frac{2a+b+5}{2}\ \cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to-2+}\frac{x^3+ax^2+bx+2}{x+2}=\frac{2a+b+5}{2}\ \cdots\ ㉢$$

이어야 한다.

㉢에서 $x\longrightarrow-2-$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2+}(x^3+ax^2+bx+2)=-8+4a-2b+2=0$에서

$$b=2a-3$$

$b=2a-3$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-2+}\frac{x^3+ax^2+bx+2}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2+}\frac{x^3+ax^2+(2a-3)x+2}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2+}\frac{(x+2)\{x^2+(a-2)x+1\}}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2+}\{x^2+(a-2)x+1\}\\&=4-2(a-2)+1\\&=9-2a\end{aligned}$$

$b=2a-3$을 ㉡에 대입하면

$$\frac{2a+b+5}{2}=\frac{2a+(2a-3)+5}{2}=2a+1$$

이때 ㉢에서 $9-2a=2a+1$이므로 $a=2$이고 $b=2a-3=1$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x+2} & (x>-2)\\ f(|x|) & (x\le-2)\end{cases}$$

이므로

$$f(-3)=f(3)=\frac{27+18+3+2}{3+2}=10$$

09

ㄱ. $\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-}(x^2-a) = -a,\ \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+}(x+2) = 2,$

$f(0) = 2$이고 $a > 0$이므로 $\lim_{x\to0-} f(x) \neq \lim_{x\to0+} f(x)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다. (참)

ㄴ. $a = 2$이면 함수 $|f(x)|$는

$$|f(x)| = \begin{cases} |x^2-2| & (x<0) \\ |x+2| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고 $x \neq 0$일 때 연속이다.

이때 $\lim_{x\to0-}|f(x)| = \lim_{x\to0-}|x^2-2| = 2,\ \lim_{x\to0+}|f(x)| = \lim_{x\to0+}|x+2| = 2,$

$|f(0)| = 2$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x = 0$에서 연속이다.

따라서 $a = 2$이면 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $xf(x)$는

$$xf(x) = \begin{cases} x(x^2-a) & (x<0) \\ x^2+2x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고 $x \neq 0$일 때 연속이다.

이때 a의 값에 관계없이 $\lim_{x\to0-} xf(x) = \lim_{x\to0-} x(x^2-a) = 0,$

$\lim_{x\to0+} xf(x) = \lim_{x\to0+}(x^2+2x) = 0,\ 0 \times f(0) = 0$이므로 함수 $xf(x)$는

$x = 0$에서 연속이다.

그러므로 함수 $xf(x)$는 a의 값에 관계없이 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로

$$|f(x)| = f(x)$$

조건 (가)에서 함수 $|f(x)g(x)| = f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이고

연속함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$이므로 함수

$\dfrac{f(x)|g(x)|}{f(x)} = |g(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3+} g(x) = a,\ \lim_{x\to3-} g(x) = b$라 할 때,

$\lim_{x\to3+}|g(x)| = |a|,\ \lim_{x\to3-}|g(x)| = |b|$이고 $|a| = |b| = |g(3)|$이다.

이때 $\lim_{x\to3+} g(x) > \lim_{x\to3-} g(x)$에서 $a > b$이므로 $a > 0 > b$이고

$$b = -a \ \cdots \ ㉠$$

한편, 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-} f(x)g(x) &= \lim_{x\to3-}(-x^2+3x-4) \\ &= -9+9-4 \\ &= -4\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x\to3-}|f(x)g(x)| = 4$이고 함수 $|f(x)g(x)|$는 $x = 3$에서 연속이므로

$$|f(3)g(3)| = f(3)|g(3)| = 4 \ \cdots \ ㉡$$

또한

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to3+}(2x-5) \\ &= 6-5 \\ &= 1\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x\to3+} \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| = 1$이고 함수 $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| = \dfrac{|g(x)|}{f(x)}$는 $x = 3$에서 연속이므로

$$\frac{|g(3)|}{f(3)} = 1 \ \cdots \ ㉢$$

㉡, ㉢에서 $|g(3)|^2 = 4$이므로

$$|g(3)| = 2$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$f(3) = 2$$

또한 $|a| = |b| = 2$이므로 ㉠에서

$$a = 2,\ b = -2$$

따라서

$$\begin{aligned}f(3) \times \{\lim_{x\to3+} g(x) - \lim_{x\to3-} g(x)\} &= 2 \times \{2-(-2)\} \\ &= 8\end{aligned}$$

11

$f(x)=x^2+6x$에서 $f'(x)=2x+6$이므로

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x+9)f'(x)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+9)(2x+6)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}2(x+9)$$
$$=2\times 6$$
$$=12$$

12

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하고 조건 (가)에서 분모, 분자의 최고차항끼리만 비교하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5ax^4}{2ax^4+a^2x^4}=\frac{5a}{2a+a^2}=1$$
$$5a=2a+a^2$$
$$a^2-3a=0$$

$a\neq 0$이므로

$$a=3\ \cdots\ ㉠$$

또한 조건 (나)에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to0}\{f(x)-1\}=f(0)-1=c-1=0$$
$$c=1\ \cdots\ ㉡$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)=b=-5\ \cdots\ ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $f(x)=3x^2-5x+1$이므로

$$f'(x)=6x-5$$

따라서

$$f'(3)=13$$

13

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 다음 세 가지 경우가 존재한다.

(ⅰ) $f(x)=(x+1)^2(x-2)(x-3)$

(ⅱ) $f(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)$

(ⅲ) $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)^2$

이때 $f'(x)$는 각각

$$f'(x)=2(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$+(x+1)^2(x-3)+(x+1)^2(x-2)$$
$$f'(x)=(x-2)^2(x-3)+2(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$+(x+1)(x-2)^2$$
$$f'(x)=(x-2)(x-3)^2+(x+1)(x-3)^2$$
$$+2(x+1)(x-2)(x-3)$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 (ⅲ)의 경우이다.

따라서

$$f'(1)=(-1)\times(-2)^2+2\times(-2)^2$$
$$+2\times2\times(-1)\times(-2)$$
$$=12$$

14

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{9}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(x+\frac{h}{9}\right)-f(x)}{h}\times\frac{f(h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{9}\right)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{9}\right)-f(x)}{\frac{h}{9}}\times\frac{1}{9}\times\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(x)\times\frac{1}{9}\times f'(0)$$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\times f'(0)\times\frac{1}{9}=x^2-3x+1$이므로

$$f'(x)\times f'(0)=9x^2-27x+9$$

에서 우변은 x에 대한 이차식이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$$(3x^2+2ax+b)\times b=9x^2-27x+9\ \cdots\ ㉠$$

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로 $3b=9$, $2ab=-27$, $b^2=9$에서

$$a=-\frac{9}{2},\ b=3$$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x$이므로

$$f(4)=4^3-\frac{9}{2}\times4^2+3\times4=4$$

15

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이므로 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

이때 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2a$이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \times 2a \le 0$$

$$a(a+6) \le 0$$

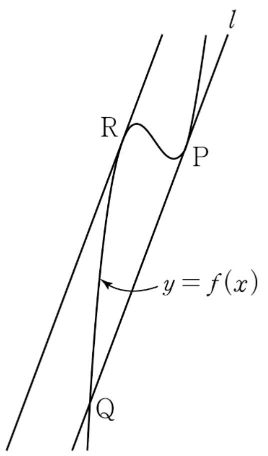
즉, $-6 \le a \le 0$일 때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이므로 구하는 모든 정수 a의 개수는 7이다.

16

접선 l은 두 점 P, Q를 지나므로 접선 l의 기울기는

$$\frac{-54-(-6)}{-4-2} = 8$$

또한 주어진 조건을 만족시키는 곡선 $y = f(x)$와 접선 l의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 점 $\mathrm{R}(a,\ b)$ $(-4 < a < 2)$와 접선 l 사이의 거리가 최대가 되는 경우는 위의 그림과 같이 접선 l과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$와 점 R에서 접할 때이다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 4$이므로 $3x^2 - 4 = 8$에서

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, $a = -2$이므로

$$b = (-2)^3 - 4 \times (-2) - 6 = -6$$

따라서

$$a + b = -2 + (-6) = -8$$

17

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에 의하여

$$f'(4) = 16 + 8a + b = 0$$

$$8a + b = -16$$

$$b = -8a - 16 \cdots ㉠$$

또한 조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \le 0$$

즉,

$$a^2 \le b \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$a^2 + 8a + 16 \le 0$$

$$(a+4)^2 \le 0$$

a는 실수이므로

$$a = -4$$

㉠에서

$$b = 16$$

또한 조건 (다)에 의하여 접선 l의 방정식은

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$y - (c + 21) = x - 3$에서

$$y = x + c + 18$$

접선 l이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$c + 18 = -2$$

$$c = -20$$

$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 16t - 20\right)$, $\mathrm{Q}(t,\ t-2)$이므로

$$h(t) = \overline{\mathrm{PQ}}$$

$$= (t-2) - \left(\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 16t - 20\right)$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 15t + 18$$

$h'(t) = -t^2 + 8t - 15 = -(t-3)(t-5)$이므로 $h'(t) = 0$을 만족시키는 해는

$$t = 3 \text{ 또는 } t = 5$$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $t = 3$에서 함수 $h(t)$는 극소이므로 구하는 극솟값은

$$h(3) = -9 + 36 - 45 + 18 = 0$$

18

조건 (나)를 만족시키는 접선의 방정식은

$$y-f(1)=x-1$$

즉,

$$y=x+f(1)-1$$

이 직선이 점 $(-3,\ f(-3))$을 지나므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$$f(x)-\{x+f(1)-1\}=k(x-1)^2(x+3)$$

$$f(x)=k(x-1)^2(x+3)+x+f(1)-1$$

$$f'(x)=2k(x-1)(x+3)+k(x-1)^2+1$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$$f(-1)=8k+f(1)-2=0\ \cdots\ ㉠$$

$$f'(-1)=-8k+4k+1=-4k+1=0\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$k=\frac{1}{4},\ f(1)=0$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+3)+x-1$이므로

$$f(3)=\frac{1}{4}\times2^2\times6+3-1=8$$

19

$f(x)=2x^3-3x^2-36x$라 하고, 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 주어진 명제가 참이려면 $a\le m,\ b\ge M$이어야 하므로 $b-a$는 $a=m,\ b=M$일 때 최솟값 $M-m$을 갖는다.

$f(x)=2x^3-3x^2-36x$에서

$$f'(x)=6x^2-6x-36=3(x+2)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	↘	-81	↗	-5

닫힌구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 0을 갖고, $x=3$일 때 최솟값 -81을 갖는다.

따라서 $M=0,\ m=-81$이므로 $b-a$의 최솟값은

$$M-m=0-(-81)=81$$

20

점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 속도, 가속도를 각각 $v(t),\ a(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=6t^2-10t$$

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=12t-10$$

시각 $t=p\ (p>0)$에서의 점 P의 속도가 24이므로 $v(p)=24$에서

$$6p^2-10p=24$$

$$3p^2-5p-12=0,\ (3p+4)(p-3)=0$$

$p>0$이므로

$$p=3$$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$$a(3)=12\times3-10=26$$

21

$f(x)=5x^2$이라 하면 $f'(x)=10x$이므로 직선 l의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t)+5t^2 \\ &= 10t(x-t)+5t^2 \\ &= 10tx-5t^2 \end{aligned}$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2}t,\ 0\right)$, $(0,\ -5t^2)$이다.

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{10t}$이므로 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{10t}(x-t)+5t^2 \\ &= -\frac{1}{10t}x+5t^2+\frac{1}{10} \end{aligned}$$

두 점 C, D의 좌표는 각각 $(50t^3+t,\ 0)$, $\left(0,\ 5t^2+\frac{1}{10}\right)$이다.

$0<t<\frac{1}{5}$에서

$$\overline{\mathrm{AC}}=\left|(50t^3+t)-\frac{1}{2}t\right|=\left|50t^3+\frac{1}{2}t\right|=50t^3+\frac{1}{2}t$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{BD}} &= \left|\left(5t^2+\frac{1}{10}\right)-(-5t^2)\right|=\left|10t^2+\frac{1}{10}\right| \\ &= 10t^2+\frac{1}{10} \end{aligned}$$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}=5t\times\overline{\mathrm{BD}}$이고 $0<5t<1$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{BD}}$이다.

즉, 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차를 $g(t)$라 하면

$$\begin{aligned} g(t) &= \overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AC}} \\ &= \left(10t^2+\frac{1}{10}\right)-\left(50t^3+\frac{1}{2}t\right) \\ &= -50t^3+10t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -150t^2+20t-\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(300t^2-40t+1) \\ &= -\frac{1}{2}(30t-1)(10t-1) \end{aligned}$$

$g'(t)=0$에서

$$t=\frac{1}{30} \text{ 또는 } t=\frac{1}{10}$$

열린구간 $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{30}$	$\cdots$	$\frac{1}{10}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{5}\right)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\left(\frac{1}{10}\right)$	↘	$\frac{5}{54}$	↗	$\frac{1}{10}$	↘	(0)

즉, 열린구간 $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{10}$일 때 최댓값 $\frac{1}{10}$을 갖는다.

따라서 $p=10,\ q=1$이므로

$$p+q=11$$

22

삼차함수 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+4)x$의 그래프와 이차함수 $g(x)=x^2-2x+b$의 그래프가 어떤 실수 b에 대하여 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 방정식 $x^3+(a+1)x^2+(a+4)x=x^2-2x+b$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 방정식 $b=x^3+ax^2+(a+6)x$의 실근이 3개 존재해야 한다.

함수 $y=x^3+ax^2+(a+6)x$의 극값이 존재해야 하므로

$y'=3x^2+2ax+a+6$에서 이차방정식 $3x^2+2ax+a+6=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3a-18=(a+3)(a-6)>0$이어야 한다.

따라서 $a<-3$ 또는 $a>6$이므로 자연수 a의 최솟값은 7이다.

23

$f(x)=\frac{1}{12}x^2(x-13)$에서

$$f'(x)=\frac{2}{12}x(x-13)+\frac{1}{12}x^2=\frac{1}{12}x\,(3x-26)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{26}{3}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{26}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

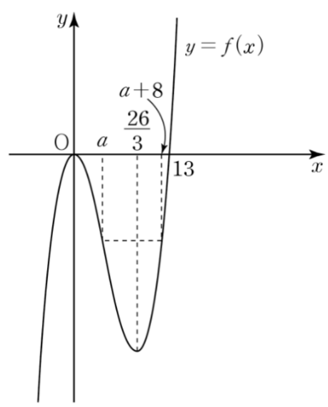
함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값, $x=\frac{26}{3}$일 때 극솟값을 갖는다.

$f(x)=0$에서

$$\frac{1}{12}x^2(x-13)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=13$$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$0 < x < \frac{26}{3}$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $\frac{26}{3} < x < 13$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $0 < a < \frac{26}{3}$이고 $\frac{26}{3} < a+8 < 13$, 즉 $\frac{2}{3} < a < 5$일 때

$f(a) = f(a+8)$인 실수 a가 존재한다.

$f(a) = f(a+8)$에서

$$\frac{1}{12}a^2(a-13) = \frac{1}{12}(a+8)^2(a-5)$$

$$a^3 - 13a^2 = a^3 + 11a^2 - 16a - 320$$

$$24a^2 - 16a - 320 = 0$$

$$3a^2 - 2a - 40 = 0$$

$$(a-4)(3a+10) = 0$$

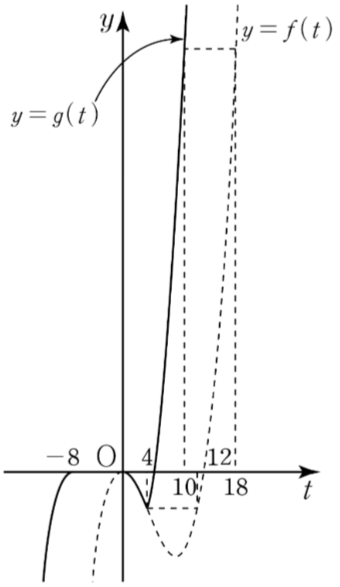
이때 $\frac{2}{3} < a < 5$이므로

$$a = 4$$

즉, 함수 $g(t)$는

$$g(t) = \begin{cases} f(t+8) & (t < -8) \\ f(0) & (-8 \le t < 0) \\ f(t) & (0 \le t < 4) \\ f(t+8) & (t \ge 4) \end{cases}$$

이고 함수 $y = g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$0 < t < 4$일 때 함수 $g(t)$는 감소하고, $t > 4$일 때 함수 $g(t)$는 증가한다.

$$g(0) = f(0) = 0$$

$$g(4) = f(12) = \frac{1}{12} \times 12^2 \times (-1) = -12$$

$$g(10) = f(18) = \frac{1}{12} \times 18^2 \times 5 = 135$$

즉, $0 \le t \le 10$에서 함수 $g(t)$는 $t = 10$일 때 최댓값 135, $t = 4$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$135 + (-12) = 123$$

24

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2x + a$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + ax + b)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = 12 \ \cdots \ ㉠$$

$$\int_{-1}^2 f'(x)dx = \int_{-1}^2 (2x + a)dx$$

$$= \left[x^2 + ax\right]_{-1}^2$$

$$= (4 + 2a) - (1 - a)$$

$$= 3a + 3 = -5 \ \cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{8}{3},\ b = 13$$

따라서 $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x + 13$이므로

$$f(3) = 9 - 8 + 13 = 14$$

25

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^2 + ax + b \ (a,\ b\text{는 상수})$$

라 하면 조건 (가)에서

$$(1 + a + b) + (1 - a + b) = 0$$

$$2 + 2b = \frac{10}{3},\ b = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 + ax + \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3}x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2}a + 1$$

조건 (나)에서 $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}a + 1 \le 2$이므로

$$-3 \le a \le 2 \ \cdots \ ㉠$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \left(x^2 + ax + \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3}x\right]_1^3$$

$$= \left(9 + \frac{9}{2}a + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 4a + 10$$

㉠에서

$$-2 \leq 4a + 10 \leq 18$$

따라서 $\int_1^3 f(x)dx$의 최댓값은 18이고 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$18 + (-2) = 16$$

26

$G(t) = \int tf(t)dt$라 하면 $G'(t) = tf(t) = t(at^2 + b)$이므로

$$G(t) = \int t(at^2 + b)dt = \int (at^3 + bt)dt$$

$$= \frac{1}{4}at^4 + \frac{1}{2}bt^2 + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \cdots ㉠$$

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \int_0^x tf(t)dt = \lim_{x \to 3} \frac{G(x) - G(0)}{x - 3} = 27$에서 $x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 3}\{G(x) - G(0)\} = 0$이므로

$$\lim_{x \to 3} G(x) = G(0)$$

이때 함수 $G(x)$는 다항함수이므로

$$\lim_{x \to 3} G(x) = G(3) = G(0)$$

㉠에서

$$\frac{81}{4}a + \frac{9}{2}b + C = C$$

$$b = -\frac{9}{2}a$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{G(x) - G(0)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{G(x) - G(3)}{x - 3}$$

$$= G'(3) = 3f(3)$$

$$= 27$$

$f(3) = 9$이므로

$$9a + b = 9$$

$b = -\frac{9}{2}a$이므로

$$9a + \left(-\frac{9}{2}a\right) = \frac{9}{2}a = 9$$

즉,

$$a = 2,\ b = -9$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 9$이므로

$$f(5) = 50 - 9 = 41$$

27

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 8}{x} = 12$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}\{f(x) - 8\} = f(0) - 8 = 0$에서

$$f(0) = 8$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 8}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= f'(0)$$

$$= 12$$

따라서 삼차함수 $f(x)$는 $f(0) = 8,\ f'(0) = 12$이므로

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 12x + 8 \text{ (}a,\ b\text{는 상수, } a \neq 0\text{)}$$

으로 놓을 수 있다.

$4F(x) = (x+2)f(x)$의 양변에 $x = 0$을 대입하면 $4F(0) = 2f(0) = 16$, 즉

$$F(0) = 4$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$= \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + 6x^2 + 8x + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(0) = 4$에서

$$C = 4$$

즉,

$$F(x) = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + 6x^2 + 8x + 4$$

모든 실수 x에 대하여 $4F(x) = (x+2)f(x)$이므로

$$ax^4 + \frac{4b}{3}x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$= (x+2)(ax^3 + bx^2 + 12x + 8)$$

$$= ax^4 + (b + 2a)x^3 + (12 + 2b)x^2 + 32x + 16$$

에서

$$\frac{4b}{3} = b + 2a,\ 24 = 12 + 2b$$

따라서 $a = 1,\ b = 6$이므로

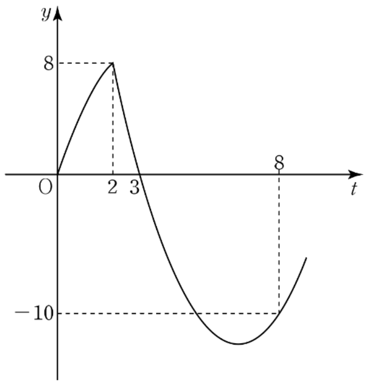
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

이때 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 4$이므로

$$f(-1) + F(2) = 1 + 64 = 65$$

28

함수 $y = v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 P가 시각 $t = 0$에서 $t = 8$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
&\int_0^8 |v(t)|dt \\
&= \int_0^2 (-t^2+6t)dt + \int_2^3 (t^2-13t+30)dt \\
&+ \int_3^8 (-t^2+13t-30)dt \\
&= \left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{13}{2}t^2+30t\right]_2^3 \\
&+ \left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{13}{2}t^2-30t\right]_3^8 \\
&= \frac{28}{3}+\frac{23}{6}+\frac{275}{6} \\
&= 59
\end{aligned}$$

29

$f(x) = x^3-4x^2+7x-9$에서

$$f'(x) = 3x^2-8x+7 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표는 $x^3-4x^2+7x-9 = x$에서

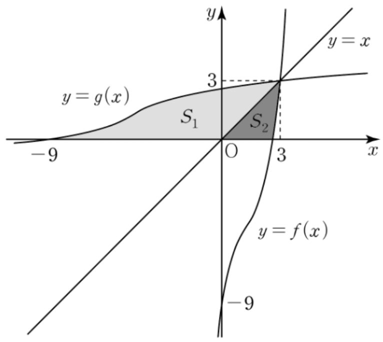
$$x^3-4x^2+6x-9 = 0$$

$$(x-3)(x^2-x+3) = 0$$

따라서

$$x = 3$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 직선 $y = x$는 다음 그림과 같다.



곡선 $y = g(x)$와 x축 및 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 구하는 넓이 S는

$$S = S_1 + S_2$$

두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^3 \{x-f(x)\}dx \\
&= \int_0^3 \{x-(x^3-4x^2+7x-9)\}dx \\
&= \int_0^3 (-x^3+4x^2-6x+9)dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3 \\
&= \frac{63}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^3 \{g(x)-x\}dx \\
&= \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 xdx \\
&= \int_0^3 g(x)dx - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 \\
&= \int_0^3 g(x)dx - \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 \\
&= \frac{63}{4} + \left\{\int_0^3 g(x)dx - \frac{9}{2}\right\} \\
&= \frac{45}{4} + \int_0^3 g(x)dx
\end{aligned}$$

따라서

$$4 \times \left(S - \int_0^3 g(x)dx\right) = 4 \times \frac{45}{4} = 45$$

30

$$g(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)>0) \\ 0 & (f(x)\le 0)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $g(0)=0$이므로

$$f(0)\le 0$$

$f(0)<0$이라 하면 열린구간 $(-c,\ 0)$에 속하는 모든 x에 대하여

$f(x)<0,\ g(x)=0$인 양수 c가 존재한다.

이때 열린구간 $(-c,\ 0)$에 속하는 모든 x에 대하여 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되어 조건

(나)를 만족시키지 못한다.

따라서 $f(0)=0$이어야 한다.

한편, $a<0<b$인 어떤 두 실수 $a,\ b$에 대하여

(i) $a<x<0$에서 $f(x)<0,\ 0<x<b$에서 $f(x)>0$이면 열린구간

$(a,\ 0)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건

(나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a<x<0$에서 $f(x)>0,\ 0<x<b$에서 $f(x)<0$이면 열린구간

$(0,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건

(나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a<x<0$에서 $f(x)<0,\ 0<x<b$에서 $f(x)<0$이면 열린구간

$(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건

(나)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a<x<0$에서 $f(x)>0,\ 0<x<b$에서 $f(x)>0$이어야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(x)=x^2(x+p)$ (p는 양수)로 놓을 수 있다.

$f(-2)=16$에서 $(-2)^2\times(-2+p)=16$이므로

$$p=6$$

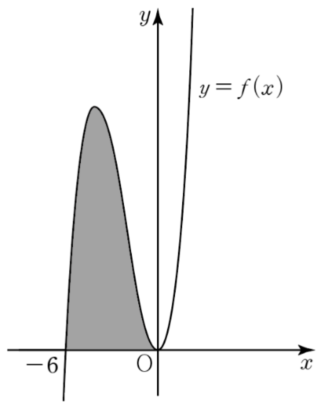
즉,

$$f(x)=x^2(x+6)$$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $x^2(x+6)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=-6$$

그러므로 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-6}^{0}|x^2(x+6)|dx &= \int_{-6}^{0}(x^3+6x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4+2x^3\right]_{-6}^{0} \\ &= -(324-432) \\ &= 108\end{aligned}$$