SEASON 2024

7 주차

작은 고추가 맵다

- 수학1/2 쉬4 빈출 유형

SEOL:NAME THE SIGNATURE

설레임

테마별 기출분석집

설레임 모의고사

Team SeolName

07 작은 고추가 맵긴 맵더라

한순간 방심하면 점수가 훅 떨어진다.. 30번 틀린 점수와 9번 틀린 점수가 같다는 건 알고 있지..?

STYLE 01

n 제곱근, 그냥 $\frac{1}{n}$ 제곱이잖아? - 거듭제곱근, 어렵지~ 않아요~~

$3 \sim 4$ 등급에 머무르는 친구들 중 **'제곱근'**과 관련된 문항이 13번에 출제되어 다소 어렵게 나오면
지레 겁먹고 건들지도 않는 친구들이 많아보여.
하지만, 작년에 시행된 2023학년도 수능만 보더라도, 12번 보다 13번이 **훠어어어~~~얼씬 쉬웠다**는 걸 아니?

[2023학년도 대학수학능력시험 13번]

자연수 $m\,(m \geq 2)$ 에 대하여 m^{12} 의 n 제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 $f\,(m)$ 이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f\,(m)$ 의 값은? [4점]

① 37　② 42　③ 47　④ 52　⑤ 57

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 제곱근을 다룰 때 다음과 같은 사항들을 머릿속에 꽉 잡아두고 있어야해.

1) 어떤 수의 제곱근 중 실수인 것은 많아봤자 두개다.
2) 제곱근은 우리가 편의상 '지수에 분모'로 표현한다.
3) 제곱수를 주의하자.

특히 3번, 즉 '제곱수'를 주의해야 하는데, 반대로 이야기하면 **3번만 주의하면 거의 99.9%의 확률로 이런 유형의 문제를 맞출 수 있어.**

STEP 1 **시그마가 나왔을 때 중요한 건 꺾이지 않고 대입하는 마음**

먼저, 우리가 구해야 할 것을 살펴보자. $\sum_{m=2}^{9} f(m)$이라.. f라는 함수는 우리가 완전히 새롭게 정의한 함수이니 규칙성이 전혀 없어. 즉 **직접 우리가 모든 함숫값을 구해야한다는 뜻이야.** 일단 함숫값에 규칙성을 잘 모르는 상태이니 m에 2를 대입해볼까?

('죽이 되든 밥이 되든 일단 해보자' 마인드를 갖는 것이 특히 '시그마' 기호가 나오면 아주 중요해.)

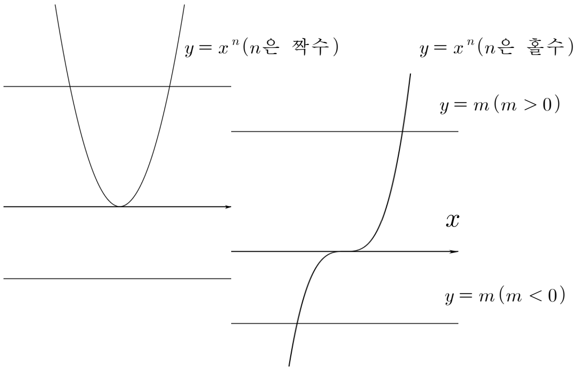
그렇다면 2^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 자연수 n의 개수를 찾으라는 거겠지?

여기에서 퀴즈. 다음 명제 '2^{12}의 n제곱근은 $2^{\frac{12}{n}}$이다.'는 참일까?

정답은 NO...ㅠㅠ 만약 YES를 고른 친구들은 다음 표를 반드시 숙지하도록 해.

어떤 수 m의 n제곱근중 실수인 것은 다음과 같다.
(단, n은 2이상의 자연수)

	$m>0$	$m<0$	$m=0$
n이 짝수	$\pm m^{\frac{1}{n}}$	없음	0
n이 홀수	$m^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{m}$	0



좌표평면은 x값과 y값이 모두 '실수'인 경우만 그림으로 나타낼 수 있어. 그렇기 때문에 왼쪽 그림에서 $y=x^n$과 $y=m$의 **교점의 x좌표는 모두 실수**라고 생각하면 돼. 또 알다시피 $\sqrt[n]{m}$을 편의상 $m^{\frac{1}{n}}$으로 나타내지만, 이렇게 표현할 수 있으려면 다음 조건 단 하나만 만족하면 돼.

1) m이 양수인가? (앞에 번호 붙여놓고 하나만 적어놓기 ㅋㅋ)

그렇기 때문에 $2^{\frac{12}{n}}$은 2^{12}의 n제곱근 중 하나일 뿐이지, 2^{12}의 n제곱근이 $2^{\frac{12}{n}}$라고 할 수 없어.

어떤 수의 n제곱근은 무조건 n개 존재해야 하거든. 방정식 $x^n=m$의 근의 개수가 무조건 n개이듯이..

이렇게 보면 위의 표 내용을 완벽히 이해할 수 있을거야.

이렇게 보면 좀 마음이 편할까? 우리는 어떤 수(지금은 2^{12})의 실수인 제곱근, 그 중에서도 '정수'인 제곱근만 구하면 되는 상황이야. 그러니 $2^{\frac{12}{n}}$이 정수이도록 하는 상황만 보면 된다 이거지.

근데, n이 짝수이면 $-2^{\frac{12}{n}}$도 살펴봐야하지 않냐고?

단순히 부호만 달라지는 상황이니 부호가 음수든, 양수든 정수라는 사실에는 변함이 없잖아.

그러니 이 문항에서는 전혀 신경쓰지 않아도 돼.

STEP 2 제곱근이 정수이려면

양수 m이 거듭제곱수가 아니면 $m^{\frac{q}{p}}$는 죽었다 깨어나도 유리수일 수 없다. (단, $|p|$와 $|q|$는 서로소)

은근 이런 문제 풀 때 위 명제가 헷갈리는 경우가 있어(제작자 경험).

하지만 위 명제는 사실이니 결코 긴가민가할 필요가 없어.

즉, $2^{\frac{12}{n}}$이 정수이려면 n은 죽었다 깨어나도 12의 약수여야 한다는 얘기지.

근데 n은 1이면 안 됐으니까 즉, $f(m)=5(n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12)$이고, 이는 m이 $3,\ 5,\ 6,\ 7$일 때도 마찬가지야. 근데 $4,\ 8,\ 9$같이 제곱수인 아이들은 어떻게 처리하지?

더이상 제곱수가 아니게 만들어버리면 돼.

가령, $4^{\frac{12}{n}}$은 $2^{\frac{24}{n}}$로 만들면 그만. $8^{\frac{12}{n}}$은 $2^{\frac{36}{n}}$으로, $9^{\frac{12}{n}}$은 $3^{\frac{24}{n}}$로. 결국

$f(4)=f(9)=7(n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24)$, $f(8)=8(n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 24,\ 36)$이니,

구하고자 하는 값은 $\sum_{m=2}^{9} f(m)=5\times5+7\times2+8=47$.

★ STYLE01 부록 1 - 어쩌면 고1 수학의 직접적 출제는 예견된 것이다?

약수의 개수 구하기, 사실은 고등학교 1학년때 가장 많이 연습했던 내용일거야.

며칠 전에 있었던 9월 모의평가에 고등학교 1학년 수학 내용이 많이 들어간 것에 대해 너무 불평을 늘어놓거나 투덜거리지 않았으면 해. 고등학교 1학년 수학은 **'국민공통기본교육과정'**에 들어있는 내용이라, 이미 그 내용은 알고 있다는 가정 하에 모든 문항이 출제되는거야. 과도하게 지엽적인 문항은 지양되어야 하겠지만, 이정도 수준의 고1 개념은 정답자를 변별하는 수준의 활용도로 나올 수 있다는 교훈을 9월 모의고사로 삼고, 수능 고득점을 위해 철저히 대비하자.

(9모가 욕을 먹는 이유는 다른 데에 있... 크흠..;;)

자연수 $m=2^{k_1}\times 3^{k_2}\times\cdots\times m^{k_n}$의 약수의 개수는 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_n+1)$ 이다.

알고 있으리라 생각하는데, 혹시나 기억이 나지 않는 친구들을 위해 리마인드해봤어.

이런 매커니즘으로 생각하면 좀 편할지도?

예) 360의 약수의 개수를 구하여라.

step 1. 먼저, 소인수분해 : $360=2^3\times 3^2\times 5$

step 2. 360의 약수를 정하고자 한다. 2를 안 고를 수도, 하나 고를 수도, 둘 고를 수도, 셋 모두 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 3. 3을 안 고를 수도, 하나 고를 수도, 둘 모두 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 4. 5를 안 고를 수도, 하나 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 5. 약수를 고를 수 있는 모든 경우의 수는? $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$.

그래서 위에서 12나 24, 36의 약수의 개수를 구하는 과정을 생략한거야. 위 매커니즘을 따르면 너무도 쉽게 구할 수 있거든.

★ STYLE01 부록 2

- '양수 m이 제곱수가 아니면 $m^{\frac{q}{p}}$는 죽었다 깨어나도 유리수일 수 없다.' 라는 명제의 적용

(단, $|p|$와 $|q|$는 서로소)

EX

- 2013학년도 수능 나형 26번

$2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

아까 앞에서도 이야기했듯 3^5가 양수이기도 하니, $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$를 그냥 $3^{\frac{5}{6}}$으로 바꿔버리자.

즉, $3^{\frac{5}{6}}$이 어떤 자연수 k의 n제곱근이어야 하니, $k=3^{\frac{5n}{6}}$이면 되겠네? 심지어 3은 제곱수가 아니네?

그렇다면 n이 6의 배수가 아닌 이상, k는 자연수, 아니, 유리수일 수도 없겠네?

따라서 n은 6의 배수이면서 100 이하의 자연수.

이런게, 4점?

다음 내용을 머릿속에 반드시 넣어두고, 앞으로 나오면 **당황하지 말고 차근차근** 해석해보자.

'양수 m이 제곱수가 아니면 $m^{\frac{q}{p}}$는 죽었다 깨어나도 유리수일 수 없다. (단, $|p|$와 $|q|$는 서로소)'

STYLE 02

로그의 계산 방법 - 정의만 제대로 알고 있다면...

가끔씩 13번 문항으로 나와서 많은 이들의 혼을 빼놓기도 하는 유형이 있어.

바로, **'로그 계산'**이야. 진짜 이 유형은 **단순하게 계산하는 것 말고 없어.**

아주 조금의 식 변형과 케이스 구분만(이라고 이야기하지만 얘가 제일 어려운..)하면 되거든 ㅎㅎ

[2023학년도 6월 모의평가 21번]

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 로그를 다룰 때 다음과 같은 사항들을 머릿속에 꽉 잡아두고 있어야해.

1) $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

3) 진수는 무조건 양수, 밑은 1이 아닌 양수.

날 바보로 아는 것 같다고? 그럼 위에 문제 풀어봐. 21번인데 위 3개(사실, 이 문항에서는 위에 두개밖에 안 쓰임)만 알면 **'무조건'** 완벽하게 풀 수 있어.

STEP 1 **복잡한건 정리 좀 하자.**

일단 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$라는 수를 보고 제일 먼저 드는 생각은,

$$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$$

라는 생각.

진수나 밑을 항상 최대한 **단순하게** 만들어야해. "단순하게" 라는 건? 여기에선 **"제곱수가 아니도록"**과 같은말.

아직 $\dfrac{2}{3}\log_2\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$가 '정수'여야한다는 말이 감이 잘 안와.

사실, 이 문항에서 갖출 수 있는 마음가짐은 이거야.

'최대한 구하고자 하는 것에 대해 식을 나타내는 것을 목표로 해라.'

즉, 여기에서는 '$n =$~~~~'라는 식을 나타내는 것을 목표로 해야해. 그러기 위해선 어떻게 해야할까?

아무래도, n이 들어있는 진수를 바깥으로 빼내어야 하겠지?

그러기 위해 우리는 다음과 같이 정수 k를 정의할거야.

$$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = k$$

그러면 $2^{\frac{3}{2}k} = \dfrac{3}{4n+16}$이 될테고, **$n$이 자연수여야 하니 k가 음수**여야 한다는 사실까지는 알아낼 수 있어.

k가 양수라면 무조건 1보다 커야 하는데, $\dfrac{3}{4n+16}$은 무조건 1보다 작잖아.

↓

STEP 2 **다시 소환, “양수 m이 거듭제곱수가 아니면 $m^{\frac{q}{p}}$(|p|와 |q|는 서로소)는 죽었다 깨어나도 유리수일 수 없다.”**

k가 -1이라 하자. 그렇다면 $2^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{4n+16}$이어야 한다는 이야긴데.. $2^{-\frac{3}{2}}$가 유리수일 수 있나? $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$가?? 절대 안되지. 즉, k가 홀수이면 위 등식은 성립하지 않아. 따라서 k가 짝수일때, 즉

$$\frac{3}{4n+16} = 2^{-3},\ 2^{-6},\ \cdots$$

일 때 등식이 성립하겠지. 좀 더 정리하면,

$$4n+16 = 3\times 2^3,\ 3\times 2^6,\ \cdots,\ n+4 = 3\times 2^1,\ 3\times 2^4,\ 3\times 2^7,\ \cdots$$

더 이상의 식 전개는 생략한다. 따라서, 1000이하인 자연수 n의 값은 2, 44, 380이므로 모두 더하면 426.

STYLE
03

삼각함수의 그래프 – 원만 그릴 줄 안다면..

삼각함수의 그래프는 그릴 줄 알지?

하지만, 삼각함수 식 안에 복잡한 수들이 끼어있으면 또 아이들이 당황을 해요..

그냥 **겉보기에 어려워보이면 애들이 잘 안 다가가려한다**는 걸 출제자들은 너무나도 잘 알아서,

생각보다 개념에 집중하면 아주 쉽게 그래프를 그려낼 수 있도록 출제할 수 있는 경우가 허다해.

거기에 삼각함수가 **'원'에서 출발**한다는 특징으로부터 알 수 있는 **대칭성**만 잘 이해한다면..

[2022학년도 6월 모의고사 15번]

$-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \mid 0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\dfrac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\dfrac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

우리만의 실전 풀이

THINKING!

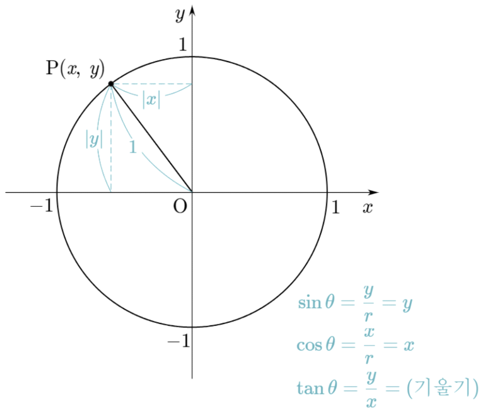
삼각함수의 대칭성은 다음을 생각하고 있으면 아주 편해.

① $y=\sin x$, $y=\cos x$ 가 x 축과 만나는 점에 대하여 대칭이다.

② $y=\sin x$, $y=\cos x$ 가 $x=k$ 에서 극값을 가질 때, $x=k$ 에 대하여 대칭이다.

③ 곡선 $y=\cos x$ 는 곡선 $y=\sin x$ 를 x 축 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (n 은 정수)만큼 평행이동한 곡선이다.

①번부터 먼저 생각해보자. 일단, $y=\sin x$ 와 $y=\cos x$ 는 다음과 같이 정의된다는 것만 이야기할게.
그 안의 근본적인 내용(곡선 $y=\cos x$ 가 y 축에 대해 대칭이다, $y=\sin x$ 는 $y=\cos x$ 를 평행이동하면 구할 수 있다 등..)조차 알지 못한다면 **당장 이 주간지를 던져버리고** 쓰레기통에 버려뒀던 [수학1] 교과서를 얼른 꺼내와 피길 바**라.**



우리는 삼각비를 '실수 전체의 범위'로 확장하기 위해 '호도법'이라는 체계를 맨 처음 학습했고, '시초선'과 '동경' 개념을 도입하여 각의 '방향'을 학습했어. 또, **단위원(반지름의 길이가 1 인 원)** 위의 한 점과 x 축에 내린 수선의 발, 그리고 원점으로 이루어진 직각삼각형을 이용해 삼각비를 정의했지. 핵심은 뭔지 알아? 우리가 삼각비를 **'원'**으로 정의했다는거야.
 알다시피, 중심을 원점으로하는 원은 x **축에 대해서도,** y **축에 대해서도, 원점에 대해서도, 대칭** 아니겠어? 그렇기 때문에 다음이 성립하는 거였잖아.

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=\cos x$$

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ 라 한다면 $f(-x)=-f(x)$, $g(x)=g(-x)$ 인 셈이니
$f(x)=\sin x$ 는 원점대칭인 함수, $g(x)=\cos x$ 는 y 축 대칭인 함수라는 것을 알 수 있었지.
또, $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=g(x)$ 라는 것도, 또 $f(x)=f(x+2n\pi)$, $g(x)=g(x+2n\pi)$ 라는 것도
위의 원 그림을 이용해 알아볼 수 있었고.

이제 1번을 다시 보자. "**$y=\sin x$, $y=\cos x$ 가 x 축과 만나는 점에 대하여 대칭이다.**" 먼저 $y=\sin x$ 를 보면, 이 함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 2π 만큼 x 축 방향으로 옮기면 완전히 똑같은 모양이 나오니, $(2n\pi,\ 0)$ 에 대해 대칭이라는건 받아들일 수 있어. 그럼 $(n\pi,\ 0)$ 이라는건 어떻게 보일 수 있지?

[점대칭과 선대칭을 알려주는 조건들] – 모든 실수 x 에 대하여

① 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2a-x)+f(x)=2b$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다.
② 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다.
③ 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a+x)=f(a-x)$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에 대하여 대칭이다.

증명

① 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$에 대하여 $x_1 = a-k$, $x_2 = a+k$라 하면 $x = x_1$, $x = x_2$일 때 모두

$$f(a+k)+f(a-k) = 2b = f(x_1)+f(x_2)$$

이므로 **$(a,\ b)$는 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$의 중점**이다. 이는 $x = a$로부터 일정한 거리만큼 떨어져있는 모든 임의의 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이라는 의미이므로 **'점들의 집합'**으로 정의하는 함수의 그래프 역시 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

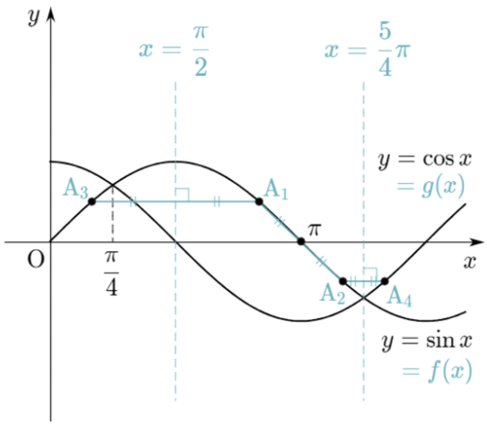
② ①번의 x에 $x+a$를 집어넣어보자. ①번은 '모든 실수 x'에 대해 성립해야 하므로 x자리에 $x+a$를 넣어도 성립해야 한다.

③ 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$에 대하여 $x_1 = a-k$, $x_2 = a+k$라 하면 $f(x_1) = f(x_2)$이므로 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$는 $x = a$에 대해 대칭이다.
즉, $x = a$로부터 일정한 거리만큼 떨어져있는 모든 임의의 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$이 직선 $x = a$에 대하여 대칭이라는 의미이므로 **'점들의 집합'**으로 정의하는 함수의 그래프 역시 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

(아래 설명이 너무 복잡하다면, 뒤페이지 그림만이라도 봐줘.)

그렇기 때문에, $f(x) = \sin x$라 하면 $f(n\pi+x)+f(n\pi-x) = 0$인지만 살펴보면,
$y = \sin x$가 $(n\pi,\ 0)$을 대칭점으로 갖고 있음을 증명할 수 있어.
$\sin(n\pi+x)+\sin(n\pi-x) = -\sin x-\sin(-x)$($n$이 홀수) 또는 $\sin x+\sin(-x)$(n이 짝수)
이니 두 경우 모두 0이네?
그렇기 때문에 $f(x)$는 $(n\pi,\ 0)$에 대해 대칭이야.
$g(x) = \cos x$라 하면 $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = g(x)$라 했으니,
$g(x)$의 대칭점은 $f(x)$의 대칭점을 x축 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 옮긴 $\left(n\pi+\frac{\pi}{2},\ 0\right)$이 되겠지?

$y = \sin x$가 $x = n\pi+\frac{\pi}{2}$를 대칭축으로 가진다는 것도 아주 쉽게 증명할 수 있어.
$f\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)$인지만 보면 되거든.
$\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(n\pi+x)$, $\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(n\pi-x)$인데, $\cos(n\pi+x) = \cos(n\pi-x)$이니
성립함을 알 수 있겠지?



$$\rightarrow\ f\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=g\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$=\sin\left(\frac{7}{4}\pi-x\right)=\cos\left(\frac{5}{4}\pi-x\right)=g\left(\frac{5}{4}\pi-x\right)$$

아차, $y=\sin x$와 $y=\cos x$가 만나는 교점의 x좌표를 k라고 할 때, 두 곡선은 $x=k$를 중심으로 대칭이야.
이는 따로 증명을 하지는 않겠지만, 이도 역시

'삼각함수가 원으로부터 정의된다'

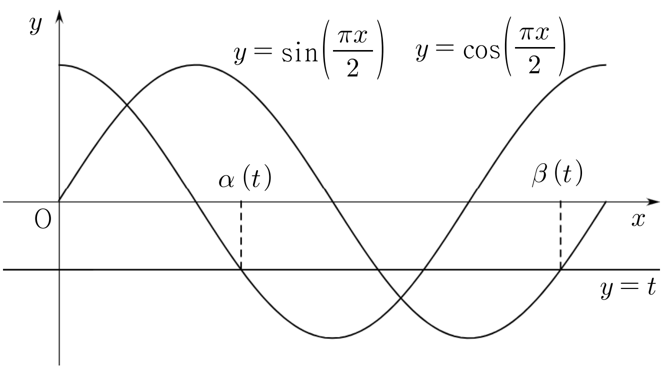
는 성질로 인해 유도된다는 것을 반드시 기억해!

STEP 1 **뭐해, 그려~**

ㄱ을 먼저 살펴보자. 일단 방정식이 주어져 있고, 가장 큰 근을 $\beta(t)$, 작은 근을 $\alpha(t)$로 주었어.
일단 이 방정식을 먼저 해석해보자.

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=t \text{ 이거나 } \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=t \text{ 이면 방정식이 성립한다.}$$

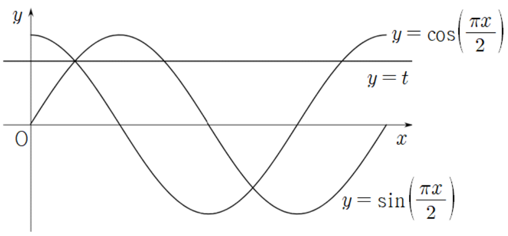
이거까지는 혼자 해석할 줄 알아야해. 이걸 모른다는건 사실상 방정식 '$(x-2)(2x-3)=0$'의 근이 $x=2$ 또는 $x=\frac{3}{2}$이라는 걸 모른다는 것과 마찬가지이니.. 그러나 우리는 삼각함수의 특수한 값 말고는 잘 모를 뿐더러, t도 정해져있지 않기 때문에 도대체 어떻게 될지 모르겠어. 항상 하는 말. 모르겠으면, 어떻게 하라고?
그래. **그리면 돼.**



어라? 그러고 나서 ㄱ을 보니 이제 좀 알겠는지 모르겠다. $y=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$와 $y=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$의 교점의 x좌표가 여기에선 $\frac{5}{2}$일테고,
그렇다면 $\alpha(t)+\beta(t)=5$일 수밖에 없겠네.
x좌표를 어찌 한번에 찾냐고?

원래 두 곡선의 교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{4}+n\pi$인데, 지금 x 앞에 $\frac{\pi}{2}$가 곱해진 상황이니, $\frac{2}{\pi}$배 늘어났다고 생각하면 편해. 즉, $2n+\frac{1}{2}$가 된거지. 이런 사고는 나중에 삼각함수의 주기를 구할 때, 대칭성과 주기성을 활용할 때 등에도 아주 잘 활용되니 잘 생각하고 사용할 수 있도록!

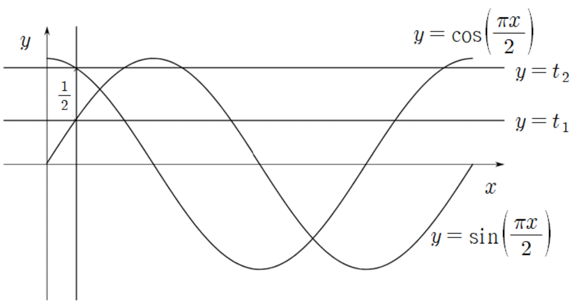
ㄴ도 똑같지 않겠수? 직접 그려서 $\beta(0)-\alpha(0)=3$인걸 찾고, 또 직접 $y=t$를 그려가면 되겠네. 대신, 삼각함수 그래프의 특징을 생각하면서!



t가 정확히 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이기 전까지는, $\beta(t)$와 $\alpha(t)$가 정확히 똑같게 증가해. 그 이유는, 두 곡선이 완전히 똑같은 모양(주기성)이기 때문이지. 근데 t가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 커지면 $\alpha(t)$는 오히려 작아지지? 그러니 ㄴ도 맞는 이야기.

STEP 2 **마무리, 단 삼각함수의 성질을 여전히 기억하면서.**

ㄷ이 의미하는 바는 다음과 같아.



즉, $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $t_1+\frac{1}{2}=t_2$라는 이야기이고,

이 방정식을 풀기 위해선 삼각함수의 기초적인 성질을 사용해야해.

아마 이걸 떠올리지 못한 친구들도 꽤 있을거야.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

너무도 허무하지만, 이걸 떠올리지 못하면 ㄷ을 영원히 풀 수 없을거야. 위 성질을 이용하기 위해 양변을 제곱해서 t_1의 값을 구하면 $t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $t_2=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$이므로 $t_1\times t_2=\frac{3}{8}$. 따라서 ㄷ은 거짓이야.

★ STYLE03 부록 - 삼각함수의 각변환

- 2024학년도 9월 모의평가 9번

$0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x 의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$ 이다. $\beta - \alpha$ 의 값은? [4점]

며칠 전, 이 문항을 풀면서 아이들이 많이 당황했겠다는 생각을 했어.
$\cos$ 을 $\sin$ 으로, $\sin$ 을 $\cos$ 으로 능수능란하게 바꾸지 못하면 적잖이 당황했을거야.
$\sin$ 과 $\cos$ 을 서로 바꾸는 방법은 딱 하나, 바로 '$\frac{(\text{홀수})}{2}$'거든.
아마 이런 이야기 많이 들어봤을거야.

$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ 는 n 이 홀수이면 $\cos$ 으로 바꾸고, $\sin$ 의 부호에 따라 (−)를 붙이거나 붙이지 않는다.

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ 는 n 이 홀수이면 $\sin$ 으로 바꾸고, $\cos$ 의 부호에 따라 (−)를 붙이거나 붙이지 않는다.

무슨 말이냐면, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 의 경우, 일단 $n=1$ 로 홀수이니 $\cos$ 으로 바뀌어야 한다고 생각하는거야.

그런 다음, x 를 아주 작은 양수라고 생각할 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 의 부호는 양수일테니 $+$ 를 붙인다고 생각하는거야.

즉, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ 인거지 (참고: 해당 주간지 제작자는 고3 6월까지 이 각변환 공식을 제대로 모르고 살아왔음. 지금 생각하면 도대체 왜 ...)

이 공식은 **반례 없이 항상 성립하니까,** 꼭 머리속에 익혀두는걸 권장해.

그래서 사실, 위 부등식 역시 $\sin\frac{\pi}{7}$ 을 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$ 로 해석할 수 있으면
아주 쉽게 풀 수 있었던 문항이야.

STYLE 04

극한식은 어떤 정보를 담고 있을까?

극한식만 보면 당황하는 친구들이 있어. 이런거에 당황하냐니, 애들을 뭘로 보는거냐고? **정답률을 보면 그렇잖아** ..ㅠㅠ
여하튼 본론만 이야기하면, 극한식에는 최소한 **2가지**의 조건을 담고 있어.
그리고 이는 **'미분'**과도 밀접한 연관이 있지!
지금부터 크게 두 가지를 볼건데, 하나는 **'극한'**의 개념에 집중해서, 하나는 **'미분'**의 개념에 집중해서 살펴볼거야.

STYLE 4-1

극한식의 정보

[2024학년도 9월 모의평가 15번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

우리만의 실전 풀이

THINKING!

무려 삼차함수인 $f(x)$로 이루어져있는 복잡한 식... 어떻게 처리해야할까?

일단 $g(x)$의 형태만 보아서는 아무것도 알 수 없으니 다른 조건을 더 보아야 할듯 하다.

그런데.. $\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) - 1$이라고? 어라 ... $g(x)$가 $x = 3$에서 불연속?

근데, $f(x)$가 연속함수(모든 다항함수는 연속함수)일테니 $\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$도 분모가 0이 아닌 이상 연속일텐데…

잠깐, **분모가 0인가?**

STEP 1 **연속인걸 의심할땐 구간의 경계를**

주간지 6주차를 보고 온 친구들은 잘 알겠지만, 흔히 구간별로 함수 $f(x)$를 주면 **'$f(x)$가 연속'** 이거나 **'$f(x)$가 미분가능'**한 경우가 상당히 많아. 그런데 이 문항에서는 변화구를 줬지.

오히려 **'$g(x)$가 불연속'**이라는 조건을 주었어. 하지만.. 구간별로 정의되어있는 함수가 **각각 연속**이기에,

또, 구간의 경계가 우연찮게도 $\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$가 불연속이 되는 지점이기에,

$f(3) = 0$이라는 것을 바로 체크하고 넘어갈 수 있어. (극한식이 주는 정보 1)

그렇다면 $f(x) = (x-3)(x-\alpha)(x-\beta)$라고 할 수 있겠네? 또한, $g(3) = 3$이며,

$\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) - 1 = 2$라는 것까지도 파악할 수 있어.

↓

STEP 2 **15번이잖아. 악으로 깡으로 버텨!**

악으로 깡으로 버텨! 뭐를? 계산량을. $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$라는 걸 알아냈으니,

이 조건을 이용해 남은 미지수들을 구할거거든.

$$\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} = \frac{x(x-\alpha+3)(x-\beta+3)\{(x-3)(x-\alpha)(x-\beta)+1\}}{(x-3)(x-\alpha)(x-\beta)}$$

의 $x = 3$에서의 극한값이 2여야 하니,

$(x-\alpha+3)$ 혹은 $(x-\beta+3)$ 중에 $(x-3)$이 반드시 '하나만' 존재해서 분모와 약분되어야해.

(극한식이 주는 정보 2)

분모가 0으로 가는데 극한값이 발산하지 않으니 분자도 무조건 0으로 가야한다는 마인드는 반드시 기억하고 있어야해. 만약 둘 다 $(x-3)$이라면 극한값이 무조건 0일 테고, $(x-3)$이 하나도 없다면 $x=3$에서 발산하겠지? 편의상 $\alpha=6$으로 잡아보자.

$$\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\frac{x(x-\beta+3)\{(x-3)(x-6)(x-\beta)+1\}}{(x-6)(x-\beta)}$$

좀 식이 간단해졌지? 이제 $x=3$에서의 극한값을 구하면 되는데, 전혀 어렵지 않아.

$x\neq 6$, $x\neq\beta$일 때 위 함수가 연속이기 때문에

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(x)}=2$ 일테니까.

즉, β가 3이 아니면, $\frac{3(6-\beta)}{3(\beta-3)}=2$이고, 따라서 $\beta=4$임을 알 수 있어.

따라서, $f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$이고, $g(5)=\frac{f(8)\times\{f(5)+1\}}{f(5)}=20$ 임을 알 수 있어.

다음과 같은 사실은 반드시 기억해두고, 실전에서 바로 사용할 수 있도록 하자.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha(\alpha\neq 0)$**이고,** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$**일 때,** $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$**이다.**

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$**이고,** $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$**일 때,** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$**이다.**

STYLE 4-2

미분의 개념

[2022학년도 9월 모의평가 22번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

뭔가 우리가 익숙하게 본것 같기도 하고, 아닌것 같기도 하고… 저 괴상망측한 절댓값은 뭐지?

우리는 종종 오개념을 갖곤 하는데, 이 개념 역시 오개념을 갖기 매우 쉬운 개념이야.

다음 명제가 참인지, 거짓인지 증명해봐. 만약 **거짓이라면 반례를 들어보고, 참이라면 증명**해봐. 답은 차차 설명해줄게.

Q1 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} = 8$ **이면** $f'(1) = 4$ **이다?**

Q2 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} = 9$ **이면** $f'(1) = 9$ **이다?**

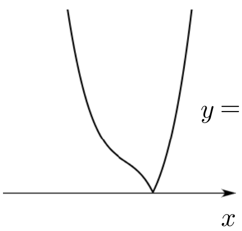
STEP 1 **절댓값을 어떻게 해야하나…**

이 문항을 보고 가장 먼저 느낄 고난은 '절댓값'일거야. 저걸 도대체 어떻게 생각해야할까?

일단, $|f(x)|$을 편의상 $l(x)$라 하면,

$\lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{l(x+h)-l(x-h)}{h}$ 임을 알 수 있어.

근데, $l(x)$가 항상 미분가능하던가? 그렇지 않아. 오히려 미분불가능한 지점이 한 개 이상 생길 가능성이 높아.



이렇게, x축과 만나지만 그때 **미분계수가 0이 아니게 되면 미분불가능**해.

함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만날 때 미분계수가 0이 아니면, 그 지점을 기준으로 $|f(x)| = -f(x)$가 되거나 $|f(x)| = f(x)$가 되잖아? 그러면 미분계수의 부호 역시 그 지점을 기준으로 완전히 바뀌기 때문에, 그 지점에서 미분계수가 0이 아니면 미분계수의 극한값이 존재하지 않겠지? 따라서 미분불가능해.

그러면, $x = a$에서 $l(x)$가 미분불가능할 때 $\lim_{h \to 0+} \frac{l(a+h)-l(a-h)}{h}$를 어떻게 해석해야 하지?

$\lim_{h \to 0+} \frac{l(a+h)-l(a-h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{l(a+h)-l(a)+l(a)-l(a-h)}{h} = \lim_{x \to a+} l'(x) + \lim_{x \to a-} l'(x)$와 같이

나누어 생각해야해. 근데, $\lim_{x \to a+} l'(x)$와 $\lim_{x \to a-} l'(x)$가 같다는 보장이 있나? 오히려 다르다고 이야기했지?

정확히는 **'절댓값' 기호로 인해 미분계수의 부호만 정반대로 바뀌기** 때문에,

$\lim_{x \to a+} l'(x) = -\lim_{x \to a-} l'(x)$임을 알 수 있어.

즉, $\lim_{h \to 0+} \frac{l(a+h)-l(a-h)}{h} = 0 \neq 2l'(a)$ **라는 것을 명심해야해! (Q1은 거짓)**

STEP 2 **삼차함수 $f(x)$가 어디서 접할까나아나까나**

이제 절반 왔어. (가)와 (나)만 해석하면 돼..^^

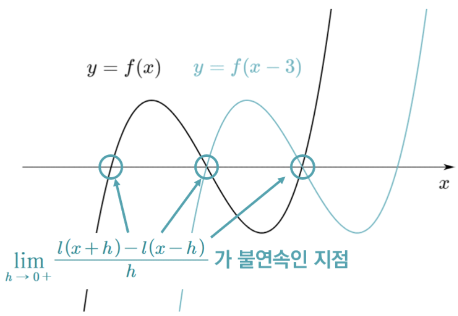
일단, 우리가 조사한 바에 따르면 $\lim_{h \to 0+} \dfrac{l(x+h)-l(x-h)}{h}$ 의 값은 다음과 같아.

- **$f(a)=0$ 이면 $\lim_{h \to 0+} \dfrac{l(a+h)-l(a-h)}{h} = 0$ 이다.**
- **$f(a) \neq 0$ 이면 $\lim_{h \to 0+} \dfrac{l(a+h)-l(a-h)}{h} = 2f'(a)$ 혹은 $-2f'(a)$ 이다.**

($2f'(a)$ 인 경우 $|f(x)| = f(x)$ 이므로 $f(a) > 0$
$-2f'(a)$ 인 경우 $|f(x)| = -f(x)$ 이므로 $f(a) < 0$)

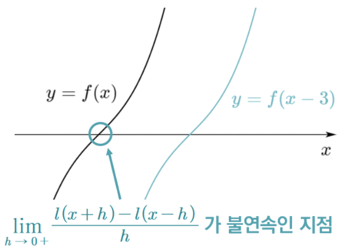
그러니, $f(x)=0$ 이도록 하는 지점을 예의주시하면 되겠다.

(i) $f(x)=0$을 만족하는 실근의 개수가 3인 경우



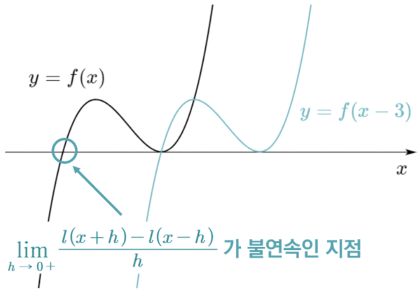
$\lim_{h \to 0+} \dfrac{l(x+h)-l(x-h)}{h}$ 가 불연속인 지점이 세 곳이기 때문에
그 지점에서 $f(x-3)$이 모두 0이라면 함수 $g(x)$가 연속일거야.
하지만 $f(x)=f(x-3)$이 아닌 이상,
$f(x-3)=0$의 실근의 개수도 많아야 3개이기 때문에
함수 $g(x)$가 연속이도록 할 수 없어.

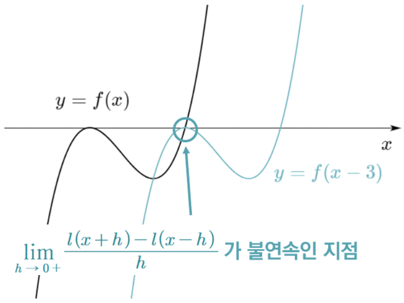
(ii) $f(x)=0$을 만족하는 실근의 개수가 1인 경우



$\lim_{h \to 0+} \dfrac{l(x+h)-l(x-h)}{h}$ 가 불연속인 지점이 한 곳이기 때문에
그 지점에서 $f(x-3)=0$ 이어야해.
하지만.. 그려보면 바로 그게 불가능하다는걸 알 수 있을거야.
따라서 함수 $g(x)$가 연속이도록 할 수 없어.

(iii) $f(x)=0$ 을 만족하는 실근의 개수가 2 인 경우

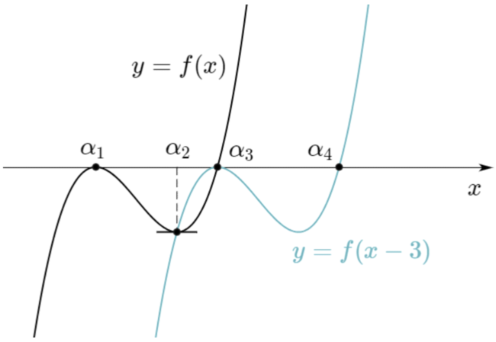




함수 $f(x)$ 의 그래프가 왼쪽 그림과 같은 경우 $g(x)$ 가 불연속인 지점이 존재하므로,

$f(x)$ 와 $f(x-3)$ 의 그래프가 오른쪽과 같이 그려져야 해.

또한, α_1, α_2, α_3, α_4 는 다음과 같이 표시되어야해.



이때, 그래프를 통해

$\alpha_1+3=\alpha_3$, $\alpha_3+3=\alpha_4$ 임을 알 수 있으며,

삼차함수의 비율관계(**잘 모르겠다면, 4주차 주간지 STYLE 01 참고!!**)에

의해 $\alpha_2=\alpha_1+2$ 임을 알 수 있어. 즉,

$\alpha_1+(\alpha_1+2)+(\alpha_1+3)+(\alpha_1+6)=4\alpha_1+11=7$ 이니.

$\alpha_1=-1$ 임을 바로 알아낼 수 있지.

$\therefore$ $f(x)=(x+1)^2(x-2)$, $f(5)=36\times 3=108$

★ 참고

Q1 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=8$ **이면** $f'(1)=4$ **이다?**

Q2 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}=9$ **이면** $f'(1)=9$ **이다?**

두 명제는 순서대로 '거짓', '참'이야. Q1은 위에서 이야기했고,

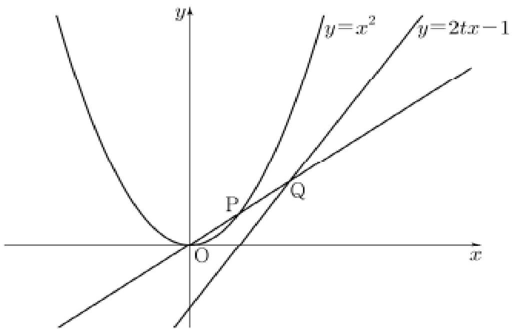
Q2는 $3h=t$ 로 치환하면 미분계수의 정의와 같다는 것을 알 수 있어.

STYLE 4-3

삼도극의 약화버전, 도극

[2024학년도 6월 모의평가 11번]

그림과 같이 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

고1 수학 개념을 모의고사에 사용한 것은 그리 드문 일이 아니야. 당장 세 달 전에 치렀던 2024학년도 6월 모의평가 문항에도 위와 같은 개념이 사용된걸?
'이차함수와 직선 사이의 최단거리'는 다음과 같이 구할 수 있었어.

1) 주어진 직선에 평행하면서 이차함수 그래프에 접하는 직선을 찾는다.
2) 이차함수와 그 직선의 접점으로부터 주어진 직선까지의 거리(=최단거리)를 구한다.

STEP 1 접점을 먼저 찾자

그러면 접점을 먼저 찾아봐야겠지? 접선의 기울기가 $2t$ 여야 하니, $y' = 2x$ 라는 것에서 접점의 x 좌표가 t 라는 것을 확인할 수 있어. 즉, 접점은 $(t,\ t^2)$ 이겠네. 이 점이 바로 점 P가 되는거야.

이때, 직선 OP 의 방정식은 $y = tx$ 일테니, 점 Q 의 좌표는 $\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$ 이 된다는 것까지 알아냈어.

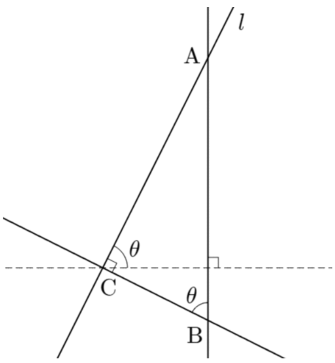
뭐야, PQ 의 길이도 안거나 마찬가지잖아? $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + (t^2 - 1)^2}$ 라는 것을 알 수 있어.

근데… 이거 언제 다 풀어헤쳐서 계산하지..?

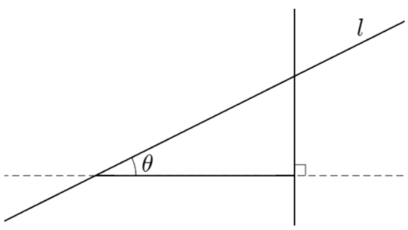
STEP 2 선분 PQ의 길이를 구하고 싶어 – 직각삼각형 만들기

기울기를 알고 있는 직각삼각형의 빗변은 피타고라스를 쓰는 것보다 훨씬 간편하게 구할 수 있어.

① x 축의 양의 방향과 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 그 직선의 기울기는 $\tan\theta$

② 

➔ 직선 l의 기울기는 $\tan\theta$



➔ 직선 l의 기울기는 $\tan\theta$

➔ 삼각형의 빗변을 제외한 두 변의 길이를 알면 직선의 기울기를 알 수 있다!

③ 기울기가 m 인 직선상의 직각삼각형의 변의 길이비는 $1 : m : \sqrt{m^2+1}$ 이다.

우리가 처해있는 상황은 위 세 그림 중 가장 쉬운 경우인 (왼쪽에서) 세번째 그림이야.

x 값의 변화량이 $\frac{1}{t}-t$, y 값의 변화량이 $1-t^2$ 인데, 기울기가 t 이니

직각삼각형의 길이비는 $1:t:\sqrt{1+t^2}$ 이겠지.
피타고라스 정리를 사용하면 당연한 결과야.

그러니 이 상황에서 '1'에 해당하는 $\frac{1}{t}-t$에 $\sqrt{1+t^2}$ 을 곱해주면 빗변의 길이인 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 를 구할 수 있어.

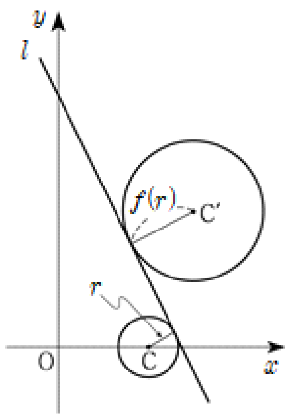
이때, $\frac{1}{t}-t=\frac{1}{t}(1-t^2)$이니 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{1+t^2}\times(1-t^2)}{t}$ 임을 알 수 있어.

$\therefore \lim_{t\to 1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{1+t^2}\times(1+t)}{t}=2\sqrt{2}$

★ STYLE04 부록 - 고1 수학과 도극

- 1. 2012학년도 10월 학력평가 나형 20번 : 점과 직선 사이의 거리

그림과 같이 중심이 $\mathrm{C}(2,\ 0)$ 이고 반지름의 길이가 $r\,(r<\sqrt{5})$ 인 원 C 가 있다. 기울기가 -2 이고 원 C 에 접하는 직선을 l 이라 하자. 직선 l 에 접하고 중심이 $\mathrm{C}'(3,\ 3)$ 인 원 C'의 반지름을 $f(r)$ 라 할 때, $\lim_{r\to 0+} f(r)$ 의 값은? [4점]



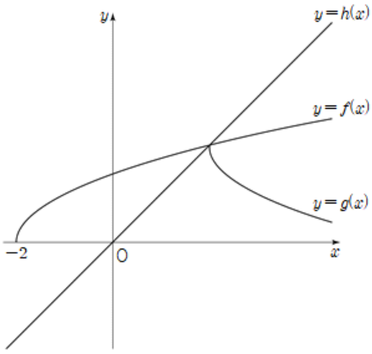
다른거 다 필요 없이, 이 사실만 알고 있다면 엄청나게 쉽게 풀리는 문항이야.

점 $(x_1,\ y_1)$ **과 직선** $ax+by+c=0$ **사이의 거리** $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

기울기가 -2 라고 줬으니 $l: y=-2x+k$ 정도로 잡을 수 있겠고…
원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이 거리가 r 과 같다는 점을 이용해 $f(r)$ 까지도 유도할 수 있겠다.
그 다음은 꺾이지 않는 계산뿐! 답은 $\sqrt{5}$

- 2. 2016학년도 4월 학력평가 나형 14번 : 무리함수와 도극

세 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=-\sqrt{x-2}+2$, $h(x)=x$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\lim_{x\to 2-}\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은? (단, $0<a<2$) [4점]



역시, 점 P의 좌표를 활용하여 다른 점들의 좌표만 잘 설정해주면 바로바로 풀리는 문항.

단, 한가지 유의할 것은 $f(a^2-2)=a$라는 것을 확신할 수 있는 이유는 $a>0$이기 때문이라는 것.

항상 조심하자. 답은 $\dfrac{1}{4}$.

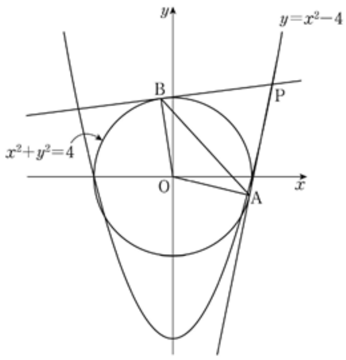
“$\sqrt{a^2}$은 그냥 a가 아니라 $|a|$이다.”

- 3. 2021학년도 10월 학력평가 12번 : 원의 접선과 도극

곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]

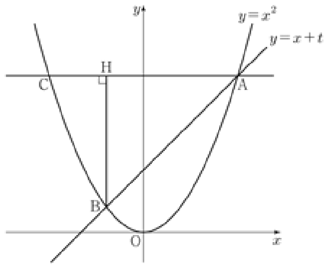


$S(t)$랑 $T(t)$를 다 구하려고 했다면, 다시 생각해보는걸 추천드림. 원의 성질을 활용하면 $T(t)$와 $S(t)$의 비율을 바로 알아낼 수 있어. OP의 길이를 점과 점사이 거리 공식으로 야무지게 구한 다음, 선분 OP를 그림으로 그려보자. 보통 웬만하면, **원의 중심과 원 위, 혹은 외부의 한 점을 이었을 때 문제가 해결되는 경우가 상당히 많아.** 그렇게 $T(t)$와 $S(t)$의 비율을 구하면 극한의 개념은 거둘 뿐, 사실상 고1 수학 문제나 다름이 없는... 답은 $\frac{5}{4}$.

- 4. 2023학년도 9월 모의평가 12번 : 이차함수와 도극

실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]



점 A, C, H를 일일이 각각 구하기보다는, $\overline{\mathrm{AH}}$와 $\overline{\mathrm{CH}}$의 의미를 잘 생각해보는 것이 좋아. $\overline{\mathrm{AH}}$는 점 B와 점 A의 x좌표 차를, $\overline{\mathrm{CH}}$는 $\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}$를 뺀 것을 의미하니 근과 계수의 관계를 이용해 쉽게 구할 수 있을 것 같아.

$\overline{\mathrm{AH}}$는 방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근의 차인 $\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|=\sqrt{1+4t}$, $\overline{\mathrm{CH}}$는 $\overline{\mathrm{AC}}=1+\sqrt{1+4t}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}$를 뺀 1.

따라서 $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}=2$

STYLE 05

속도와 거리, 사실 그냥 그래프 가지고 노는거 ...

속도와 거리 문항은 어느정도 연습한 친구들이면 아주 익숙한 주제라서, 거의 '가지고 놀 수준'인 친구들이 많을 거야.
그런 친구들에게 뒤통수를 친 문제가 바로 아래에 있는 22학년도 수능 14번.
속도와 거리 문항은 단순히 계산해서 답 내는 건 줄 알았지?(작수 20번은 실제로 그러긴 했지만 크흠..^^;;)
속도와 거리 문항을 풀이하는 실력은 사실 **'함수의 그래프 그리는 실력'**과 비례해.
왜? 그래프를 못그리면 점의 위치를 절대 알아보기 힘들거든. 우리가 **영재**가 아닌 이상 ...

[2022학년도 대학수학능력시험 14번]

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 $x(t)$ 가 두 상수 a, b 에 대하여

$$x(t) = t(t-1)(at+b)\ (a \neq 0)$$

이다. 점 P 의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$ 를 만족시킬 때, **〈보기〉**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt = 0$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$ 인 t_1 이 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 존재한다.

ㄷ. $0 \le t \le 1$ 인 모든 t 에 대하여 $|x(t)| < 1$ 이면 $x(t_2) = 0$ 인 t_2 가 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

우리만의 실전 풀이

THINKING!

'속도의 절댓값'을 적분한 값이 나와있어. 이 경우는 어떻게 처리해야 할까?
물리학을 좀 아는 친구들이라면 알겠지만, 속도의 크기, 즉 **'속도의 절댓값은 속력'**과 같아.
따라서 속도의 절댓값을 적분한 값은 전체 **'이동한 거리'**와 같고, 그냥 속도를 적분한 값은 **'위치 변화량(=변위)'**와 같다고 생각할 수 있어.
또, 위치의 변화는 **'속도'의 그래프**로도 확인할 수 있고, 위치와 속도의 관계가 **'미분'**에 있음을 알고 있다면 속도와 거리를 묻는 문항은 "너 4점 가져가세요"라고 이야기하고 있는 것이 보일거야.
이는 부록에서 좀 더 자세히 다루도록 할게.

STEP 1 위치변화량과 이동거리는 엄연히 다른 것

위치 $x(t)=t(t-1)(at+b)\ (a \neq 0)$를 보면, $t=0$ 일 때 위치가 0, $t=1$일 때도 위치가 0임을 알 수 있어.

그런데 왜 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$이냐? 이동거리와 위치변화량은 엄연히 다르기 때문이지.

우리가 운동장을 10바퀴를 돌아도, 다시 시작점으로 돌아오면 처음과 위치의 차이가 나지 않듯이.
그래서 운동장을 아무리 돌아도 살이 안빠진다고 합리화할 수 있어.
아무리 돌아도 **위치 변화량은 0일 뿐**이거든…
하지만 수학을 잘 하는 학생은 **'그래도 이동거리는 0이 아니잖아요!'**라고 반박할 수 있겠지?

그 반박하는 과정이 바로 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$이지만 $\int_0^1 v(t)\,dt = 0$인 이유를 찾는 과정 아닐까?

여하튼, $\int_0^1 v(t)\,dt = f(1)-f(0)=0$이니 ㄱ은 참이겠네.

↓

STEP 2 봐, 속도와 거리 문제는 그래프 그리기 놀이라니까?

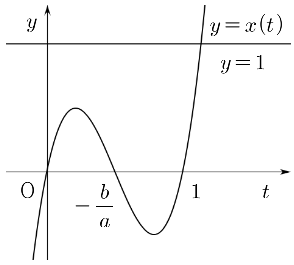
이제 ㄴ을 살펴보자. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다는 건,

$|x(t_1)|$의 최댓값을 $\alpha\,(\alpha>1)$라 할 때, 아무리 짧아도 $t=0$에서 $t=1$이 될 때까지 2α만큼의 거리를 움직였다는 것과 같아. 왜? 어쨌든 다시 $t=1$일 때 0으로 돌아와야 하니까.

그러니 다른말로 하면 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2\alpha$가 되고, 이는 2보다 무조건 커야겠지?

또, ㄷ을 봐도 마찬가지. $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$라면 $0<-\dfrac{b}{a}<1$일 수밖에 없어.

만약 그렇지 않다면 $t=k\,(0<k<1)$에서 $|x(t)|$가 극댓값 α를 가질 때 $2\alpha<2$이므로



$\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2\alpha < 2$ 가 되어서 전제에 모순이거든.

따라서 $t_2 = -\frac{b}{a}$ 가 반드시 열린구간 $(0,\ 1)$ 에서 존재해야해.

이렇게 말로 하면 어렵지만, 그림으로 보여주면 왼쪽과 같이
아주 편하게 볼 수 있어.

★ STYLE05 부록 - 속도의 그래프와 운동방향의 변화
- 2024학년도 6월 모의평가 14번

실수 $a(a \geq 0)$ 에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P 가 시각 $t=0$ 일 때 출발한 후 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a 에 대하여, 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

속도는 위치를 미분한 값이야. 그렇기 때문에 우리가 흔히 보는 '원래 함수와 도함수의 관계'가
아주 멋지게 적용돼. 즉, 속도가 0 보다 작으면 위치가 감소하고, 속도가 0 보다 크면 위치가 증가해.
'위치함수가 극값을 가진다' 혹은 '속도의 부호가 바뀐다'는 여기에서 **'운동방향이 바뀐다'**로 해석될 수 있는데, 이는 극값을 가지는 것이 곧 '위치가 감소하다가 증가하는', 즉 '왼쪽으로 가다가 오른쪽으로 가는' 상황이기 때문이야.
즉, 위 문항은 지금 $t > 0$ 에서 운동방향을 한 번만 바꾸는, 즉 속도의 부호가 한번만 바뀌는 상황을 물어보고 있으며, 그런 경우는 $a = \frac{1}{2}$ 인 경우밖에 존재하지 않아.

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 n제곱근 중 실수의 개수

어떤 수 m의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다. (단, n은 2이상의 자연수)

	$m>0$	$m<0$	$m=0$
n이 짝수	$\pm m^{\frac{1}{n}}$	없음	0
n이 홀수	$m^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{m}$	0

CHECK 02 제곱근 수가 정수 혹은 유리수이기 위한 조건

양수 m이 제곱수가 아니면 $m^{\frac{q}{p}}$ (단, $|p|$와 $|q|$는 서로소)는 죽었다 깨어나도 유리수일 수 없다.

예) $24^{\frac{3}{5}}$가 유리수가 아니듯이 ...

CHECK 03 약수의 개수

자연수 $m=2^{k_1}\times3^{k_2}\times\cdots\times m^{k_n}$의 약수의 개수는 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_n+1)$이다.

예) 360의 약수의 개수를 구하여라.

step 1. 먼저, 소인수분해 : $360=2^3\times3^2\times5$

step 2. 360의 약수를 정하고자 한다. 2를 안 고를 수도, 하나 고를 수도, 둘 고를 수도, 셋 모두 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 3. 3을 안 고를 수도, 하나 고를 수도, 둘 모두 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 4. 5를 안 고를 수도, 하나 고를 수도 있는데 어떻게 할래?

step 5. 약수를 고를 수 있는 모든 경우의 수는? $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$.

CHECK 04　로그 문항 접근법

1) $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

3) 진수는 무조건 양수, 밑은 1이 아닌 양수.

4) 복잡하게 제시된 로그는 정리를 먼저 하자

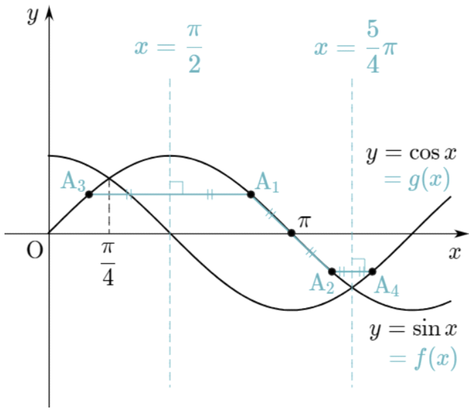
예) $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right) = \dfrac{2}{3}\log_2\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$

CHECK 05　삼각함수의 대칭성

1) $y = \sin x$, $y = \cos x$가 x축과 만나는 점에 대하여 대칭이다.

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$가 $x = k$에서 극값을 가질 때, $x = k$에 대하여 대칭이다.

3) 곡선 $y = \cos x$는 곡선 $y = \sin x$를 x축 방향으로 $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n은 정수)만큼 평행이동한 곡선이다.



$\rightarrow f\left(\dfrac{5\pi}{4} + x\right) = g\left(\dfrac{5\pi}{4} - x\right)$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}+x\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}+x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)$$
$$= \sin\left(\frac{7}{4}\pi - x\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi - x\right) = g\left(\frac{5}{4}\pi - x\right)$$

CHECK 06　함수의 대칭성

모든 실수 x에 대하여

1. **함수 $f(x)$가 $f(2a-x) + f(x) = 2b$이면 곡선 $y = f(x)$는 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.**
2. **함수 $f(x)$가 $f(a+x) + f(a-x) = 2b$이면 곡선 $y = f(x)$는 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.**
3. **함수 $f(x)$가 $f(a+x) = f(a-x)$이면 곡선 $y = f(x)$는 $x = a$에 대하여 대칭이다.**

CHECK 07 삼각함수의 각변환

$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$는 n이 홀수이면 $\cos$으로 바꾸고, $\sin$의 부호에 따라 $-$를 붙이거나 붙이지 않는다.

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$는 n이 홀수이면 $\sin$으로 바꾸고, $\cos$의 부호에 따라 $-$를 붙이거나 붙이지 않는다.

$\tan\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$는 n이 홀수이면 $\frac{1}{\tan}$으로 바꾸고, $\tan$의 부호에 따라 $-$를 붙이거나 붙이지 않는다.

예) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$의 경우, 일단 $n=1$로 홀수이니 $\cos$으로 바꾸고, x를 아주 작은 양수라고 생각할 때,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$의 부호는 양수일테니 $+$를 붙인다. 즉, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$의 경우, $n=1$로 홀수이니 $\frac{1}{\tan}$으로 바꾸고, x를 아주 작은 양수라고 생각할 때

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$의 부호는 음수일테니 $-$를 붙인다. 즉, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$

CHECK 08 극한식의 정보

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 실수)이고, $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

③ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c \Leftrightarrow f(a)=b,\ f'(a)=c$

CHECK 09 미분계수의 정확한 정의

"$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=8$이면 $f'(1)=4$이다" 라는 명제는 거짓이며, 따라서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 라는 극한값이 존재해도 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않을 수 있다.

※ **참고:** 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(a)=0\text{이면 } \lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a-h)|}{h}=0$$

CHECK 10　고1 수학 총집합!

1. 이차함수와 직선 사이의 최단거리 구하기

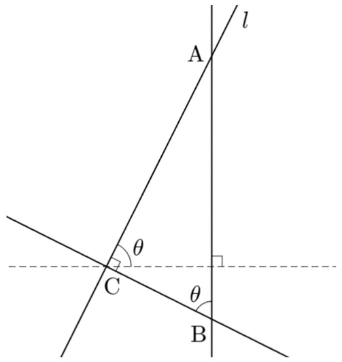
1) 주어진 직선에 평행하면서 이차함수 그래프에 접하는 직선을 찾는다.

2) 이차함수와 그 직선의 접점으로부터 주어진 직선까지의 거리(=최단거리)를 구한다.

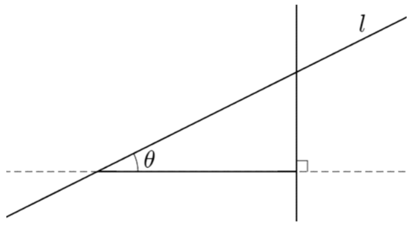
2. 한 변이 직선 위에 있는 직각삼각형과 길이비

① x축의 양의 방향과 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 그 직선의 기울기는 $\tan\theta$

②



➔ 직선 l의 기울기는 $\tan\theta$



➔ 직선 l의 기울기는 $\tan\theta$

➔ 삼각형의 빗변을 제외한 두 변의 길이를 알면 직선의 기울기를 알 수 있다!

③ 기울기가 m인 직선상의 직각삼각형의 변의 길이비는 $1 : m : \sqrt{m^2+1}$ 이다.

3. 점과 직선 사이의 거리

$$\text{점 } (x_1,\ y_1)\text{과 직선 } ax+by+c=0 \text{ 사이의 거리 } d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. 근과 계수와의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a},\quad |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

CHECK 11　속도와 거리

★ **위치변화량:** $\int_a^b v(t)\,dt$ **/ 이동거리:** $\int_a^b |v(t)|\,dt$

★ ‘위치함수가 극값을 가진다’ 혹은 ‘속도의 부호가 바뀐다’ = ‘운동방향이 바뀐다’

★ 속도가 0보다 작으면 위치가 감소하고, 속도가 0보다 크면 위치가 증가한다.

➔ **미분가능한 함수의 증가/감소**

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2008학년도 6월 모의평가 나형 10번] - STYLE 01

2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $R(a,\ b)$를 $R(a,\ b) = \sqrt[a]{b}$로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $R(16,\ 4) = R(8,\ 2)$
ㄴ. $R(a,\ 5) \cdot R(b,\ 5) = R(a+b,\ 5)$
ㄷ. $R(a,\ b) = k$이면 $a = \log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002 [2020학년도 4월 학력평가 나형 18번] - STYLE 01

1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [4점]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

003 [2021학년도 7월 학력평가 9번] - STYLE 01

2 이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자.
$f(4)+f(27)$의 값은? [4점]

① 13　　② 14　　③ 15　　④ 16　　⑤ 17

004 [2023학년도 9월 모의평가 11번] - STYLE 01

함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3^{f(n)}}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

005 [2021학년도 6월 모의평가 가형 21번] - STYLE 02

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150　② 154　③ 158　④ 162　⑤ 166

006 [2021학년도 수능 가형 27번] - STYLE 02

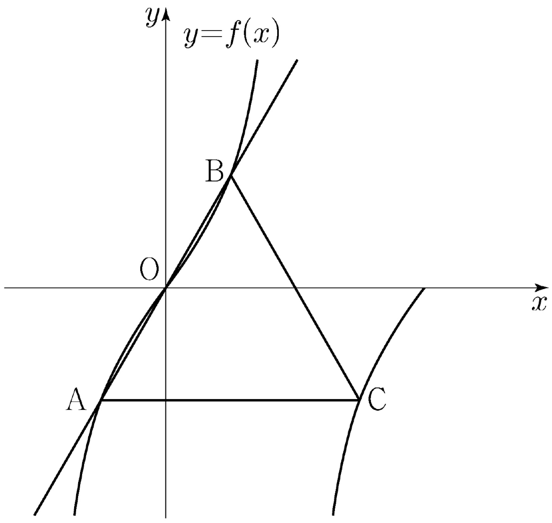
$\log_4 2n^2 - \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

007 [2022학년도 수능 11번] - STYLE 03

양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2} < x \leq a,\ x \neq \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

008 [2023학년도 9월 모의평가 9번] - STYLE 03

닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

009 [2022학년도 10월 학력평가 12번] - STYLE 03

양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right| \quad \left(0\leq x<\frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

010 [2015학년도 6월 A형 21번] - STYLE 04

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

011 [2017학년도 수능 나형 18번] - STYLE 04

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

012 [2022학년도 3월 학력평가 12번] - STYLE 04

$a>2$ 인 상수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $x \ne 1$, $x \ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.

(나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

013 [2022학년도 10월 학력평가 20번] - STYLE 04

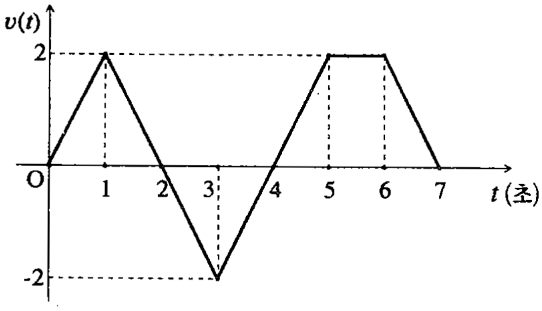
최고차항의 계수가 1 이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(5)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$ 의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2 + x$ 이다.

014 [1995학년도 수능 11번] - STYLE 05

원점을 출발하여 수직선 위를 7초 동안 움직이는 점 P 의 t초 후의 속도 $v(t)$가 다음 그림과 같을 때, 〈보기〉의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?



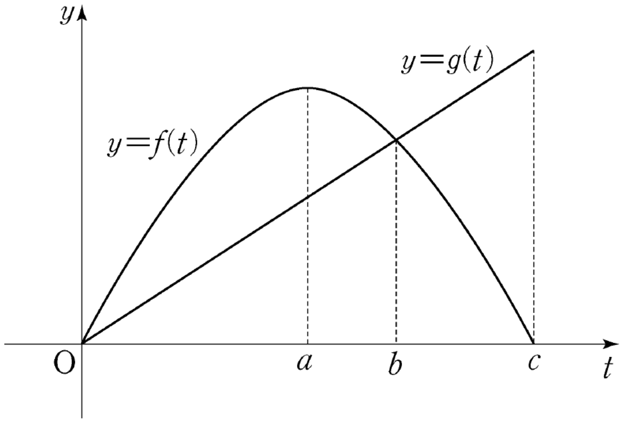
〈 보기 〉

ㄱ. 점 P 는 출발하고 나서 1초 동안 멈춘 적이 있었다.
ㄴ. 점 P는 움직이는 동안 방향을 4번 바꿨다.
ㄷ. 점 P는 출발하고 나서 4초 후 출발점에 있었다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

015 [2012학년도 9월 모의고사 나형 21번] - STYLE 05

같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0 \leq t \leq c)$ 에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)\,dt = \int_0^c g(t)\,dt$ 이고 $0 \leq t \leq c$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

016 [2023학년도 수능 20번] - STYLE 05

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t) = 2t^3 - 8t$이다.
> (나) $t \geq 2$일 때, $a(t) = 6t + 4$이다.

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P 가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

017 [2024학년도 9월 모의평가 11번] - STYLE 05

두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 7, \ v_2 = 2t + 4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	③	2	①	3	③	4	②	5	④
6	13	7	③	8	③	9	④	10	⑤
11	④	12	③	13	226	14	②	15	⑤
16	17	17	⑤						

해 설

001

[정답] ③

$R(a,\ b) = \sqrt[a]{b}$

ㄱ. $R(16,\ 4) = \sqrt[16]{4} = \sqrt[8]{2} = R(8,\ 2)$ (참)

ㄴ. $R(a,\ 5)\cdot R(b,\ 5) = \sqrt[a]{5}\sqrt[b]{5}$

$= \sqrt[\frac{ab}{a+b}]{5} = R\left(\frac{ab}{a+b},\ 5\right) \neq R(a+b,\ 5)$ $\left(\because\ (5^{\frac{1}{a}})(5^{\frac{1}{b}}) = 5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 5^{\frac{a+b}{ab}}\right)$ (거짓)

ㄷ. $R(a,\ b) = \sqrt[a]{b} = k$ 에서 $b = k^a$, $a = \log_k b$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

002

[정답] ①

조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m = a^{\frac{m}{3}} = b$

조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n = b^{\frac{n}{2}} = c$

조건 (다)에서 $c^4 = a^{12}$, $c^4 = \left(b^{\frac{n}{2}}\right)^4 = \left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{2n} = a^{\frac{2mn}{3}} = a^{12}$

$\frac{2mn}{3} = 12$, $mn = 18$

조건을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(2,\ 9)$, $(3,\ 6)$, $(6,\ 3)$, $(9,\ 2)$이므로 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4이다.

003

[정답] ③

$(\sqrt[n]{a})^3 = a^{\frac{3}{n}}$

(ⅰ) $a = 4$일 때 $4^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$

$n(n \geq 2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로

$n = 2,\ 3,\ 6$

그러므로 $f(4) = 6$

(ⅱ) $a = 27$일 때 $27^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}}$

$n(n \geq 2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로

$n = 3,\ 9$

그러므로 $f(27) = 9$

따라서 $f(4) + f(27) = 6 + 9 = 15$

004

[정답] ②

$\sqrt{3}^{\,f(n)}$의 네 제곱근은 $\pm\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}$

$-\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}} \times \sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}} = -3^{\frac{f(n)}{4}} = -3^2$에서 $f(n) = 8$

$-(n-2)^2 + k = 8,\ (n-2)^2 = k - 8$

$k = 8$일 때, $n = 2$

$k = 9$일 때, $n = 1$ 또는 3

이므로 $k > 9$일 때 자연수 n의 값은 더 이상 2개가 될 수 없음을 알 수 있다.

$\therefore\ k = 9$

005

[정답] ④

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \log_2 \sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \log_2 \frac{2(k+1)}{k+2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log_2 \frac{2\times 2}{3} + \log_2 \frac{2\times 3}{4} + \log_2 \frac{2\times 4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times 2}{3} \times \frac{2\times 3}{4} \times \frac{2\times 4}{5} \times \cdots \times \frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\} = \frac{1}{2}\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \mathrm{N}$ (N은 100 이하의 자연수) 라 하면

$\frac{1}{2}\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = \mathrm{N}$, $\frac{2^{m+1}}{m+2} = 2^{2\mathrm{N}}$, $\therefore\ 2^{m+1-2\mathrm{N}} = m+2$

따라서 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2 = 2^2$, 즉 $m=2$일 때 $2^{3-2\mathrm{N}} = 2^2$, $3-2\mathrm{N}=2$, $\mathrm{N} = \frac{1}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 2$

(ⅱ) $m+2 = 2^3$, 즉 $m=6$일 때 $2^{7-2\mathrm{N}} = 2^3$, $7-2\mathrm{N}=3$, $\mathrm{N}=2$

(ⅲ) $m+2 = 2^4$, 즉 $m=14$일 때 $2^{15-2\mathrm{N}} = 2^4$, $15-2\mathrm{N}=4$, $\mathrm{N} = \frac{11}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 14$

(ⅳ) $m+2 = 2^5$, 즉 $m=30$일 때 $2^{31-2\mathrm{N}} = 2^5$, $31-2\mathrm{N}=5$, $\mathrm{N}=13$

(ⅴ) $m+2 = 2^6$, 즉 $m=62$일 때 $2^{63-2\mathrm{N}} = 2^6$, $63-2\mathrm{N}=6$, $\mathrm{N} = \frac{57}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 62$

(ⅵ) $m+2 = 2^7$, 즉 $m=126$일 때 $2^{127-2\mathrm{N}} = 2^7$, $127-2\mathrm{N}=7$, $\mathrm{N}=60$

(ⅶ) $m+2 \geq 2^8$일 때 $\mathrm{N} > 100$

(ⅰ) ~ (ⅶ)에서 $m=6$, 30, 126 이므로 모든 m의 값의 합은 $6+30+126=162$

006

[정답] 13

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n \leq 40$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n = \log_2 \sqrt{2}\, n^{\frac{3}{4}} = m$ (m은 40 이하의 자연수)

$\sqrt{2}\, n^{\frac{3}{4}} = 2^m$

$n^{\frac{3}{4}} = 2^{m-\frac{1}{2}}$

$n = 2^{\frac{4}{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{4m}{3}-\frac{2}{3}}$

에서 m이 3으로 나누어 2가 남는 자연수이면 n도 자연수가 된다.

40이하의 자연수 중 조건을 만족하는 m은 2, 5, 8,$\cdots$,38이므로 총 13개이다.

007

[정답] ③

$\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로 양수 t에 대하여

$\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면 $\mathrm{A}(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고, $\overline{\mathrm{AB}} = 4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 4t = a$이고, $\mathrm{C}(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y = \tan\dfrac{\pi x}{a} = \tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t = \tan\dfrac{\pi \times 3t}{4t} = \tan\dfrac{3\pi}{4}$에서 $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (4t)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

008

[정답] ③

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 각각 $x = 6$에 대해 대칭이므로

$12 - \alpha_1 = \alpha_2$이다. 즉, $\alpha_2 - \alpha_1 = 12 - 2\alpha_1 = 8$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$

$f(2) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} = k$이므로

$-3\cos\dfrac{\pi x}{6} - 1 = \dfrac{1}{2}$, 즉 $\cos\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{2}$를 만족하는 x의 값이 각각 $\beta_1(0 < x < 6)$, $\beta_2(6 < x < 12)$이다.

$0 < x < 6$에서 $\dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi$이므로 $n = 0$일 때 $x = 4$이다.

따라서 $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 12 - 4 = 8$이므로 $|\beta_1 - \beta_2| = 4$

009

[정답] ④

함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = 2$와 만나는 점의 x좌표는

$0 \le x < \dfrac{4\pi}{a}$일 때 방정식

$\left|4\sin\left(ax - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\right| = 2$ …… ㉠ 의 실근과 같다.

$ax - \dfrac{\pi}{3} = t$라 하면 $-\dfrac{\pi}{3} \le t < \dfrac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t + 2| = 2$ …… ㉡ 에서 $\sin t = 0$ 또는 $\sin t = -1$

$-\dfrac{\pi}{3} \le t < \dfrac{11\pi}{3}$일 때 방정식 ㉡의 실근은 0, π, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, $\dfrac{7\pi}{2}$의 6개이고 6개의 실근의 합은 11π이다.

따라서 $n = 6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로 $39a - \dfrac{\pi}{3} \times 6 = 11\pi$, $a = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ n \times a = 6 \times \dfrac{\pi}{3} = 2\pi$

010

[정답] ⑤

$n=1$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$일 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 (가)에서 $g(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{2}{9+3a+b}=2$이므로 $3a+b+8=0$ ……㉤

㉣에서 $\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{16+4a+b}=6$이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

구하는 $g(5)$의 값은 $4\times3=12$

011

[정답] ④

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\frac{3}{5}$이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

따라서, $a=\alpha$라 하면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x-\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$, $2(\alpha-\beta)=8$이므로

$|\alpha-\beta|=4$

012

[정답] ③

함수 $f(x)$는 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고,

$\lim_{x\to2-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서 $\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1)$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$ 에서

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$ 이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0$, $g(a)=0$

또, $\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}$, $\frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$ 이므로

$g(2)=0$ 이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 이다.

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}=\frac{1-a}{2}$$

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$h(1)=h(a)$ 이므로

$\frac{1-a}{2}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$, $a^2-a=2a^2-6a+4$, $a^2-5a+4=0$

이때 $a>2$ 이므로 $a=4$

따라서 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\frac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$ 이므로

$$h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$$

013

[정답] 226

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$이므로 삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=x\,g(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x\,g(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x\,g(x)|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로 $f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$x\,f(x)\ge-4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge-4x^2+x$, $x^4+ax^3+4x^2\ge0$, $x^2(x^2+ax+4)\ge0$

$x^2\ge0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+4\ge0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le0$, $-4\le a\le4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은 $a=4$일 때, 226이다.

014

[정답] ②

$v(t)=0$인 t 의 값은 $t=2,\ 4$이고 이 시각에 $v(t)$의 부호가 바뀌었으므로 운동방향이 바뀐 것이다.

또, $\int_0^t v(t)\,dt=0$이므로 $t=4$인 순간의 동점 P 의 위치는 원점이다.

015

[정답] ⑤

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)dt$이고, 물체 B의 높이는 $\int_0^a g(t)dt$이다.

이때, $\int_0^a f(t)dt > \int_0^a g(t)dt$이므로 A가 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ, ㄷ. $0 \le t \le b$일 때 $f(t)-g(t) \ge 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차 0에서 시작하여 점점 커진다. 또, $b < t \le c$일 때 $f(t)-g(t) < 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어들다가 $t=c$일 때 두 물체 A, B의 높이가 같아진다.

따라서 $t=b$일 때 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이며, $t=c$일 때 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

016

[정답] 17

$t \ge 2$일 때 $v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로 $12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0 \le t \le 3$에서

$$v(t)=\begin{cases} 2t^3-8t & (0 \le t \le 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2 \le t \le 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)|\,dt &= \int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^3 |v(t)|\,dt = -\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt \\ &= -\int_0^2 (2t^3-8t)\,dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)\,dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3 \\ &= -(-8)+9=17 \end{aligned}$$

017

[정답] ⑤

두 점이 시작하는 지점이 다르다는 것을 반드시 염두에 두고 시작해야 한다.

두 점 P, Q 사이의 거리를 $x(t)$, 두 점 P, Q 의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면, $x(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ 이므로 $x(t) = |t^3 + 2t^2 - 7t - (t^2 + 4t) - 7| = |t^3 + t^2 - 11t - 7|$ ($\because x(0) = -7$)

따라서 $|t^3 + t^2 - 11t - 7| = 4$, 즉 $t^3 + t^2 - 11t - 11 = 0$ 또는 $t^3 + t^2 - 11t - 3 = 0$

이도록 하는 t 의 최솟값은 $t^3 + t^2 - 11t - 11 = (t^2 - 11)(t+1) = 0$, $t^3 + t^2 - 11t - 3 = (t-3)(t^2 + 4t + 1) = 0$ 이므로 3 이 t 의 최솟값이다.

이때 $v_1(t) = (3t+7)(t-1)$이므로 $x_1(t) = t^3 + 2t^2 - 7t + 1$, $x_1(0) = 1$, $x_1(1) = -3$, $x_1(3) = 25$ 이다.

$\therefore \int_0^3 |v_1(t)|\,dt = 1 - (-3) + 25 - (-3) = 32$