2024학년도 대학수학능력시험 6평 대비 정상모의고사 2회 정답 및 해설지

공통문항						확률과 통계		미적분		기하	
1	④	9	③	16	2	23	④	23	⑤	23	⑤
2	②	10	②	17	27	24	①	24	③	24	③
3	④	11	④	18	3	25	③	25	①	25	①
4	⑤	12	③	19	6	26	②	26	④	26	④
5	①	13	①	20	36	27	⑤	27	①	27	②
6	③	14	①	21	28	28	③	28	②	28	④
7	②	15	⑤	22	21	29	40	29	75	29	72
8	⑤					30	720	30	175	30	32

[공통 문항]

1) 정답 ④

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\times 9^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}=3^{\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}}=3$$

2) 정답 ②

$f'(x)=6x^2-2x+3$ 에서

$f(x)=2x^3-x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(1)-f(0)=(4+C)-C=4$

3) 정답 ④

$\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 이고

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos\theta<0$ 이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서 $\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$$\cos\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

4) 정답 ⑤

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(ax+4)=-a+4,$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-4a)=1-4a,$$

$f(-1)=1-4a$ 이므로

$-a+4=1-4a$, $3a=-3$

$\therefore\ a=-1$

5) 정답 ①

$f(x)=x^3+ax+b$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=1+a+b$

$\therefore\ a+b=0$ …… ㉠

한편 $f'(x)=3x^2+a$에서 $f'(1)=3+a$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3+a}$ 이다.

그러면 $-\dfrac{1}{3+a}=-\dfrac{1}{2}$ 에서 $a=-1$을 얻는다.

㉠에 의하여 $b=1$이므로 $a^2+b^2=2$이다.

6) 정답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이므로

$|a_4|=|a_8|$ 에서

$a_4<0<a_8$, $a_4=-a_8$

이다.

그러면 $|a_8|=a_4\times a_8+2$ 에서

$a_8=-{a_8}^2+2$, ${a_8}^2+a_8-2=0$,

$(a_8-1)(a_8+2)=0$

이때 $a_8>0$ 이므로

$a_8=1$, $a_4=-1$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_8-a_4=4d=2$, $d=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a_{12}=a_8+4\times\dfrac{1}{2}=1+2=3$

7) 정답 ②

조건 (나)에 의하여 $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$ 이므로

조건 (다)에서

$$\int_{-2}^{6}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{6}f(x)dx$$

$= \int_{2}^{6} f(x)dx = 16$

이다. 그런데 조건 (가)에서

$\int_{2}^{6} f(x)\,dx = \int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{6} f(x)dx$

$= \int_{0}^{2} f(x+2)dx + \int_{0}^{2} f(x+4)dx$

$= \int_{0}^{2} \{f(x)+2\}dx + \int_{0}^{2} \{f(x)+4\}dx$

$= 2\int_{0}^{2} f(x)dx + 12$

이므로

$2\int_{0}^{2} f(x)dx + 12 = 16$

$\therefore \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2$

8) 정답 ⑤

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3+4x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{2-x} + 7$

에서 좌변과 우변의 극한값이 각각 존재하므로 $f(x)$는 x^2과 $x-2$를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x) = ax^2(x-2)\ (a \neq 0)$

으로 놓으면

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2(x-2)}{x^2(x+4)} = -\frac{a}{2}$,

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{2-x} = -\lim_{x\to 2} \frac{ax^2(x-2)}{x-2} = -4a$

이므로

$-\frac{a}{2} = -4a + 7,\ a = 2$

$\therefore f(4) = 2 \times 4^2 \times 2 = 64$

9) 정답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_m = \frac{m(a_1+a_m)}{2} = \frac{m(a_1+4)}{2} = 0$

이고 $m \neq 0$이므로 $a_1 = -4$이다.

그러면 $a_m = -4 + (m-1)d = 4$에서

$(m-1)d = 8$

이때 m은 3 이상의 자연수이므로 가능한 자연수 d의 값은 1, 2, 4이다.

따라서 가능한 모든 a_2의 값은

$-3,\ -2,\ 0$

이므로 구하는 합은

$(-3)+(-2)+0 = -5$

10) 정답 ②

두 점 A, B의 좌표는 $A(1,\ 0)$, $B(0,\ b)$이므로 점 A를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이 점 B이다.

따라서 점 A를 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 l_1, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 l_2라 하면, 직선 l_1을 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이 직선 l_2이다.

또한 곡선 $y = \log_a x$를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이 곡선 $y = \log_a(x+1)+b$이다.

이때 곡선 $y = \log_a x$와 직선 l_1의 두 교점이 A, C이고 곡선 $y = \log_a(x+1)+b$와 직선 l_2의 두 교점이 B, D이므로, 두 점 A, C를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 각각 B, D임을 알 수 있다.

따라서 사각형 ACDB는 직사각형이고

$\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

이므로

$\sqrt{1+b^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},\ b^2+1 = \frac{13}{4},\ b = \frac{3}{2}$

이다.

그러면 직선 AB의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이므로 직선 AC의 기울기는 $\frac{2}{3}$이고, 점 C의 좌표를 $(1+3k,\ 2k)\ (k>1)$로 놓을 수 있다.

따라서 $\overline{AC} = \sqrt{9k^2+4k^2} = \sqrt{13}k$인데, 사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{13}{2}$이므로 $\overline{AC} = \sqrt{13}$이다.

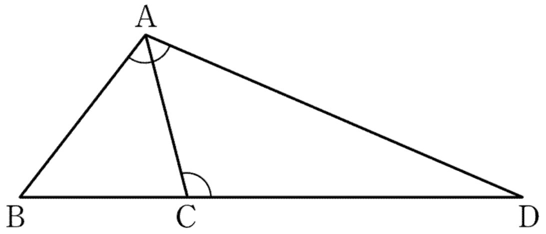
$\therefore k = 1$

그러면 점 $C(4,\ 2)$가 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 $\log_a 4=2$, $a=2$이다.

$\therefore\ ab=2\times\frac{3}{2}=3$

11) 정답 ④

조건 (가)에서 $\angle DAB=\angle ACD$ 이므로 두 삼각형 CAD와 ABD는 닮음이다.



조건 (나)에서 $\overline{AD}:\overline{BD}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 이므로 두 삼각형 CAD와 ABD의 닮음비는

$\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 이고

$\overline{CD}=a\sqrt{2}$, $\overline{AD}=a\sqrt{3}$

으로 놓을 수 있다.

또한 $\overline{CA}:\overline{AB}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 이고 $\overline{AB}=6$ 이므로

$\overline{CA}=2\sqrt{6}$

이때 $\cos(\angle BAC)=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+(2\sqrt{6})^2-2\times6\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=24$,

$\overline{BC}=2\sqrt{6}$

그러면 $\overline{AD}=a\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{6}+a\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{AD}:\overline{BD}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 에서

$3a=4\sqrt{3}+2a$, $a=4\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{CD}=a\sqrt{2}=4\sqrt{6}$

12) 정답 ③

함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}(x-2)g(x)=g(3)$

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}(2x-4)g(x)=2g(3)$

에서 $g(3)=0$을 얻는다.

이때 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)g(x)-f(3)g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(x-2)g(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3-}(x-2)\left\{\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}=g'(3)$$

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)g(x)-f(3)g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(2x-4)g(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3+}(2x-4)\left\{\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}=2g'(3)$$

에서 $g'(3)=0$을 얻는다.

따라서 실수 a에 대하여

$g(x)=(x-a)(x-3)^2$

로 놓으면

$g(1)=4(1-a)=8$, $a=-1$

이므로 $g(x)=(x+1)(x-3)^2$이다.

$\therefore\ g(4)=5\times1^2=5$

13) 정답 ①

$g(x)=a\sin\left(b\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cos b\pi x$

이므로 $f(x)=g(x)$에서

$\sin b\pi x=-\cos b\pi x$, $\tan b\pi x=-1$

따라서 $x>0$일 때 $f(x)=g(x)$에서

$b\pi x=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각

$\frac{3}{4b}$, $\frac{7}{4b}$, $\frac{11}{4b}$ 이다.

그러면 $P\left(\frac{3}{4b},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $Q\left(\frac{7}{4b},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$,

$R\left(\frac{11}{4b},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$이다.

삼각형 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$ 인 이등변삼각형이고, 조건에 의하여 $\overline{PQ}=\overline{PR}$ 이므로 삼각형 PQR는 정삼각형이다.

따라서 직선 PQ의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{-\sqrt{2}a}{\frac{4}{4b}}=-\sqrt{3}$, $ab=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ …… ㉠

또한 직선 PQ의 y절편이 $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ 이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x+\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

직선 PQ의 x절편이 $\dfrac{5}{8}$이므로, 선분 PQ의 중점의 x좌표는

$\dfrac{5}{4b}=\dfrac{5}{8}$, $b=2$

따라서 ㉠에서 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$이므로 구하는 값은

$a^2+b^2=\dfrac{3}{8}+4=\dfrac{35}{8}$

14) 정답 ①

ㄱ. $\alpha=0$이면 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-(h^2+2h)f(2+h)}{h}$

$\displaystyle=-\lim_{h\to 0-}(h+2)f(2+h)=-2f(2)$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h^2+2h)f(2+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}(h+2)f(2+h)=2f(2)$

에서 $-2f(2)=2f(2)$이므로 $f(2)=0$ (참)

ㄴ. $x<0$일 때,

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$이므로

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0-}g'(x)=-2f(0)+0=-2f(0)=-4$

$0<x<2$일 때,

$g(x)=-(x^2-2x)f(x)$이므로

$g'(x)=-(2x-2)f(x)-(x^2-2x)f'(x)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0+}g'(x)=2f(0)-0=2f(0)=4$

함수 $g(x)$는 연속함수이고, $x=0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 $(-)$에서 $(+)$로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq 2$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로, α의 값으로 가능한 것은 0 또는 2이다.

(ⅰ) $\alpha=0$인 경우

ㄱ에 의하여 $f(2)=0$이다.

함수 $|g(x)|=|(x^2-2x)f(x)|$가 $x=\alpha$, 즉 $x=0$에서만 미분가능하지 않고, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이므로

$f(x)=k(x-2)(x-a)^2$ $(k\neq 0,\ a\neq 0,\ a\neq 2)$

으로 놓을 수 있다. 그러면

$f'(x)=k(x-a)^2+2k(x-2)(x-a)$

$=k(x-a)(3x-a-4)$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=k(2-a)^2=0$이다.

그런데 $a\neq 2$이므로 모순을 얻는다.

(ⅱ) $\alpha=2$인 경우

ㄱ과 동일한 논의에 의하여 $f(0)=0$이다.

함수 $|g(x)|=|(x^2-2x)f(x)|$가 $x=\alpha$, 즉 $x=2$에서만 미분가능하지 않고, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이므로

$f(x)=kx(x-a)^2$ $(k\neq 0,\ a\neq 0,\ a\neq 2)$

로 놓을 수 있다. 그러면

$f'(x)=k(x-a)^2+2kx(x-a)=k(x-a)(3x-a)$

인데, $a\neq 2$이고 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로 $\dfrac{a}{3}=2$이다.

따라서 $a=6$이므로

$f(x)=kx(x-6)^2$

$f'(x)=k(x-6)^2+2kx(x-6)$

$\therefore\ \dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{25k-10k}{25k}=\dfrac{3}{5}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

15) 정답 ⑤

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}=\dfrac{1}{2}a_n$이므로

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1$, $a_4=\dfrac{1}{4}a_1$

이때 7 이하의 자연수 n에 대하여 a_n의 값은 모두 자연수이므로 a_1의 값은 4의 배수이다.

그런데 조건 (나)에서

$a_3=8-a_1$

의 값이 자연수이므로 $a_1=4$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	2	4	1	6	2	4	$\frac{1}{2}$	7	3

$\therefore \ \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{67}{2}$

16) 정답 2

$\log_3 4 \times (\log_2 18 - \log_2 6) = \log_3 2^2 \times \log_2 \frac{18}{6}$

$= 2\log_3 2 \times \log_2 3 = 2 \times \frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 2} = 2$

17) 정답 27

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로, 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 증가함수여야 한다.

$f(x) = x^3 + 9x^2 + kx + 7$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 18x + k$

따라서 이차방정식 $3x^2 + 18x + k = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 81 - 3k \le 0$, 즉 $k \ge 27$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 27이다.

18) 정답 3

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ne 0$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $g(x) = x^2 - ax + a = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 4a < 0$, $a(a-4) < 0$

$\therefore \ 0 < a < 4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

19) 정답 6

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x'(t) = v(t)$

그런데

$v(t) = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2)$

이므로 $x(t)$는 $0 \le t \le 2$일 때 감소하고, $t \ge 2$일 때 증가한다.

$x(0) = a > 0$이므로 점 P가 원점을 한 번만 지나려면 $x(2) = 0$이어야 한다.

$x(2) = a + \int_0^2 (t^3 - 3t - 2)dt$

$= a + \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - 2t\right]_0^2 = a + (4 - 6 - 4)$

$= a - 6 = 0$

$\therefore \ a = 6$

20) 정답 36

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 첫째항과 공비가 모두 자연수이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면,

조건 (가)에서

$\sqrt{a_3} + \sqrt{a_5} + \sqrt{a_7} = \sqrt{a_1 r^2} + \sqrt{a_1 r^4} + \sqrt{a_1 r^6}$

$= r\sqrt{a_1} + r^2\sqrt{a_1} + r^3\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}(r + r^2 + r^3) = 84$

$r = 1$인 경우 $\sqrt{a_1} = 28$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n} = 28$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$r = 2$인 경우 $\sqrt{a_1} = 6$이고, n이 10 이하의 홀수인 경우 $\sqrt{a_n}$이 자연수이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$r = 3$인 경우 $\sqrt{a_1} = \frac{28}{13}$에서 a_1의 값이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

$r = 4$인 경우 $\sqrt{a_1} = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n}$의 값이 자연수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$r > 4$인 경우 $\sqrt{a_1} < 1$에서 a_1의 값이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \ a_1 = 6^2 = 36$

21) 정답 28

집합 B의 원소 중 가장 작은 것이 양수이므로 $k > 0$이다.

만약 $k \geq 1$이면, 집합 B의 원소의 최솟값은 $a=5$, $b=1$일 때

$$\left(\frac{1}{9}\right)^5 \times k \geq \frac{1}{3^{10}}$$

이므로 최솟값이 $\frac{1}{3^{15}}$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ 0<k<1$

그러면 집합 B의 원소의 최솟값은

$\left(\frac{1}{9}\right)^5 \times k^5$ 이므로

$$\left(\frac{1}{9}\right)^5 \times k^5 = \frac{1}{3^{15}},\ k^5 = \frac{1}{3^5}$$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

따라서

$$B=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2a+b} \,\middle|\, a\in A,\ b\in A\right\}$$

이므로 집합 B의 원소의 최댓값은 $a=1$, $b=1$일 때

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2+1} = \frac{1}{27}$$

$\therefore\ m+n=27+1=28$

22) 정답 21

$g(x)=tx+\int_0^x \{f(s)-s\}ds$ 에서

$g'(x)=f(x)-(x-t)$

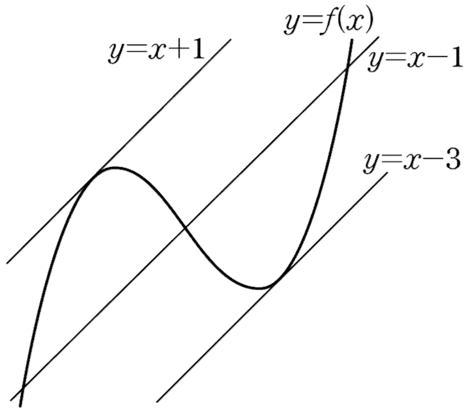
이때 $g'(x)$는 삼차함수이므로, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되는 실수 a의 개수는 t의 값에 관계없이 3 이하이다.

즉, 모든 실수 t에 대하여 $h(t) \leq 3$인데, 조건 (가)에 의하여 $h(1) \geq 3$이므로

$h(1)=3$, $f(1)=0$

이다.

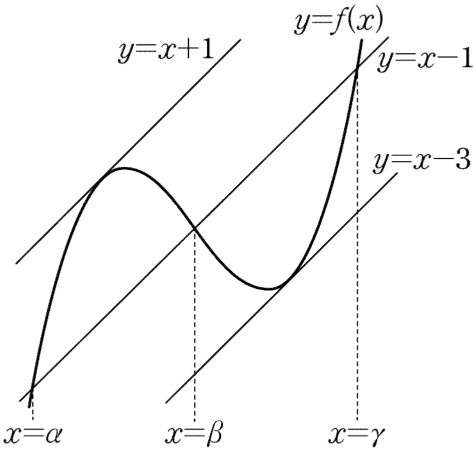
$h(1)=3$이므로 방정식 $f(x)-(x-1)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 조건 (나)에 의하여 함수 $h(t)$는 $t=-1$과 $t=3$에서만 불연속이므로 곡선 $y=f(x)$는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=x-1$의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하자.

그러면 $f(1)=0$이므로, 점 $(1,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-1$의 교점이다.

즉, α, β, γ 중에서 하나의 값이 1이다.

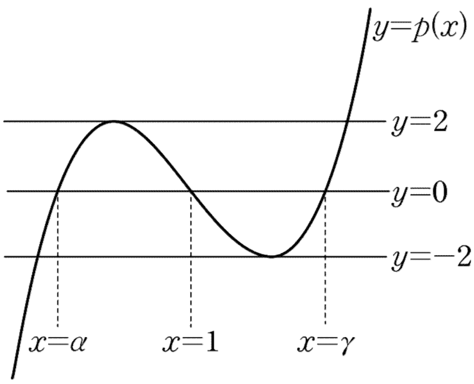


그런데 조건에 의하여 $f'(1)<1$인데

$f'(\alpha)>1$, $f'(\beta)<1$, $f'(\gamma)>1$

이므로 $\beta=1$이다.

$p(x)=f(x)-(x-1)$이라 하면 곡선 $y=p(x)$는 다음과 같다.



함수 $p(x)$가 $x=q$에서 극댓값, $x=r$에서 극솟값을 갖는다고 하면 $\frac{q+r}{2}=1$이고

$p'(x)=3(x-q)(x-r)$ $(q<r)$
이므로

$$\int_q^r p'(x)dx=\int_q^r 3(x-q)(x-r)dx$$

$$=-\frac{3(r-q)^3}{6}=p(r)-p(q)=-4,$$

$$-\frac{(r-q)^3}{2}=-4,\ r-q=2$$

$\therefore\ q=0,\ r=2$
따라서
$p'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$,
$p(x)=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)
이고 $p(1)=0$에서
$p(1)=1-3+C=0$, $C=2$이므로
$p(x)=x^3-3x^2+2$
$\therefore\ f(4)=p(4)+3=18+3=21$

[확률과 통계]

23) 정답 ④
$(x+3)^8$의 전개식에서 x^6의 계수는

$${}_8\mathrm{C}_6\times3^2=\frac{8\times7}{2\times1}\times9=252$$

24) 정답 ①

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$에서

$$\frac{1}{5}=\mathrm{P}(A)\times\left(1-\frac{7}{15}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}\times\frac{15}{8}=\frac{3}{8}$$

25) 정답 ③
노란색 공 3개, 빨간색 공 5개를 먼저 일렬로 늘어놓은 후, 한가운데에 흰색 공을 끼워 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3!\,5!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

26) 정답 ②
이 학교의 학생 중 임의로 선택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 논술대회에 참가하는 학생인 사건을 B라 하자. 이 학교의 남학생 수를 $3a$, 여학생 수를 $2a$라 할 때, 문제의 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	논술대회 참가 (B)	논술대회 불참 (B^C)
남학생 (A)	$\frac{1}{3}\times3a$	$\frac{2}{3}\times3a$
여학생 (A^C)	$\frac{2}{5}\times2a$	$\frac{3}{5}\times2a$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}$$

$$=\frac{\frac{6}{5}a}{2a+\frac{6}{5}a}=\frac{3}{8}$$

27) 정답 ⑤
10장의 카드 중에서 임의로 카드 4장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

꺼낸 카드에 적혀 있는 네 자연수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 차가 6이려면, 가장 작은 수와 가장 큰 수의 순서쌍은
(1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10)
중 하나여야 한다. 즉, 가장 작은 수와 큰 수를 고르는 경우의 수는 4이고, 이때 가장 작은 수와 가장 큰 수 사이에 있는 5개의 수 중 2개의 수를 뽑는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

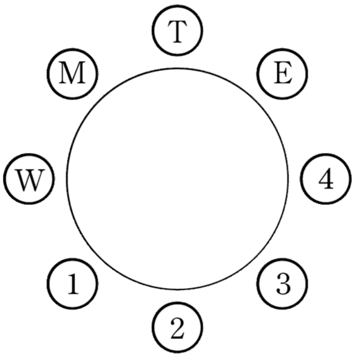
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4\times10}{210}=\dfrac{4}{21}$

28) 정답 ③
조건 (나)에서 $bc>0$이므로 $b\neq0$, $c\neq0$이고 $|b|$, $|c|$는 모두 자연수이다.
(ⅰ) $a=0$인 경우
조건 (가)에서 $|b|+|c|=7$이므로 자연수 $|b|$, $|c|$의 모든 순서쌍 $(|b|, |c|)$의 개수는
${}_2\mathrm{H}_{7-2}={}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5=6$
이때 $b>0$, $c>0$인 경우와 $b<0$, $c<0$인 경우가 있으므로 경우의 수는 $6\times2=12$이다.
(ⅱ) $a>0$인 경우
조건 (가)에서 $|a|+|b|+|c|=7$이므로
자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 모든 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{7-3}={}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$
이때 조건 (나)에서 $b<0$, $c<0$이므로 경우의 수는 15이다.
(ⅲ) $a<0$인 경우
(ⅱ)와 같은 방식으로 이 경우의 수는 15이다.
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$12+15+15=42$

29) 정답 40
두 사람이 얻은 점수의 합이 11점 이하인 사건을 A, A가 얻은 점수가 4점 이하인 사건을 B라 하자.
두 학생 A, B가 꺼낸 두 공의 색이 서로 같을 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2+{}_2\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_2}=\dfrac{2}{5}$이므로, 두 학생 A, B가 꺼낸 두 공의 색이 서로 다를 확률은 $\dfrac{3}{5}$이다.
두 공의 색이 일치하는지의 여부에 따라 경우를 나누고, 각 경우에서 사건 A와 $A\cap B$가 일어날 확률을 구해보자.
(ⅰ) 두 공의 색이 같은 경우
두 학생이 얻은 점수의 합이 11점 이하이려면 $2a+1\leq11$, 즉 $a\leq5$이어야 한다.
따라서 사건 A가 일어날 확률은
$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{3}$
이때 A가 얻은 점수가 4점 이하이려면 $a\leq2$이어야 하므로 사건 $A\cap B$가 일어날 확률은
$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{15}$
(ⅱ) 두 공의 색이 다른 경우
두 학생이 얻은 점수의 합이 11점 이하이려면 $a+b+3\leq11$, 즉 $a+b\leq8$이어야 한다.
이때 $a+b\leq8$일 확률은 $\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$이므로 사건 A가 일어날 확률은
$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{13}{18}=\dfrac{13}{30}$
이때 A가 얻은 점수는 항상 4 이하이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\dfrac{\dfrac{2}{15}+\dfrac{13}{30}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{13}{30}}=\dfrac{17}{23}$$
$\therefore\ p+q=23+17=40$

30) 정답 720
교사를 T, 남학생을 M, 여학생을 W, 빈 의자를 E라 하자.
조건 (가)에 의하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) 교사의 두 옆자리 중 하나는 비어있고 하나에는 남학생이 앉는 경우
교사와 빈 의자의 순서를 결정하는 경우의 수는 2!이다.
교사의 옆자리에 앉을 남학생을 결정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 조건 (나)에 의하여 이 남학생의 옆자리에 앉을 여학생을 결정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.



이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 그림에서 3번과 4번 자리에 모두 남학생이 앉는 경우뿐이므로, 남은 남학생 2명과 여학생 2명을 앉히는 경우의 수는

$4!-2!\times 2!=20$

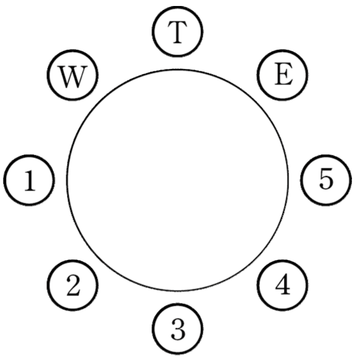
따라서 (ⅰ)의 경우의 수는

$2!\times 3\times 3\times 20=360$

(ⅱ) 교사의 두 옆자리 중 하나는 비어있고 하나에는 여학생이 앉는 경우

교사와 빈 의자의 순서를 결정하는 경우의 수는 $2!$이다.

교사의 옆자리에 앉을 여학생을 결정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이다.

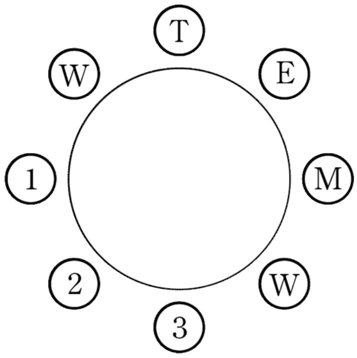


이때 4번과 5번 자리에 모두 남학생이 들어가거나, 모두 여학생이 들어가는 경우 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 4번과 5번 자리 중에서 한 자리에는 여학생이 앉고 다른 자리에는 남학생이 앉아야 한다.

(ⅱ)-① 4번 자리에 여학생이 앉고 5번 자리에 남학생이 앉는 경우

4번 자리에 앉을 여학생과 5번 자리에 앉을 남학생을 결정하는 경우의 수는

${}_2C_1\times {}_3C_1=6$



이 경우 항상 조건 (나)를 만족시키므로 남은 남학생 2명과 여학생 1명을 앉히는 경우의 수는 $3!=6$

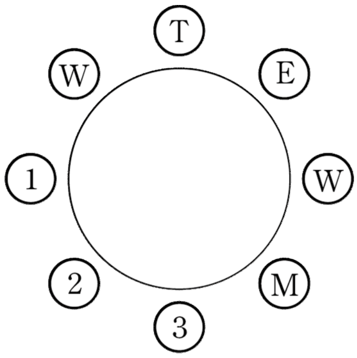
따라서 (ⅱ)-①의 경우의 수는

$2!\times 3\times 6\times 6=216$

(ⅱ)-② 4번 자리에 남학생이 앉고 5번 자리에 여학생이 앉는 경우

4번 자리에 앉을 남학생과 5번 자리에 앉을 여학생을 결정하는 경우의 수는

${}_3C_1\times {}_2C_1=6$



이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 그림에서 2번과 3번 자리에 모두 남학생이 앉는 경우뿐이므로, 남은 남학생 2명과 여학생 1명을 앉히는 경우의 수는

$3!-2!=4$

따라서 (ⅱ)-②의 경우의 수는

$2!\times 3\times 6\times 4=144$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$360+216+144=720$

[미적분]

23) 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n^2}-\frac{4}{n^4}}{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{4}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{5}{3}$$

24) 정답 ③

$3x^2-y^2=-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x-2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x}{y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 점 $(4,\ 7)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{12}{7}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-7=\frac{12}{7}(x-4)$, 즉 $12x-7y+1=0$이다.

따라서 $a=12$, $b=-7$이므로

$a+b=12+(-7)=5$

25) 정답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n-\frac{n^3}{3n-1}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(n^2a_n-\frac{n^3}{3n-1}\right)=0$

이때 $b_n=n^2a_n-\frac{n^3}{3n-1}$으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=\frac{b_n}{n^2}+\frac{n}{3n-1}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(3n-1)(3a_n-1)$

$=\lim_{n\to\infty}(3n-1)\left(\frac{3b_n}{n^2}+\frac{3n}{3n-1}-1\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n-3}{n^2}b_n+1\right)=1$

26) 정답 ④

$f(x)=(x^2+nx-n+1)e^{x+1}+4x$에서

$f'(x)=\{x^2+(n+2)x+1\}e^{x+1}+4$

이때 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

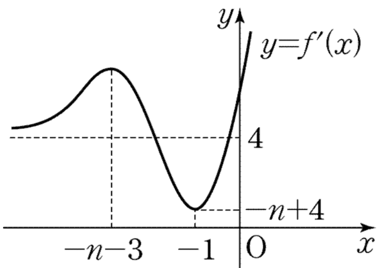
$f''(x)=\{x^2+(n+4)x+n+3\}e^{x+1}$

$=(x+1)(x+n+3)e^{x+1}$

이고

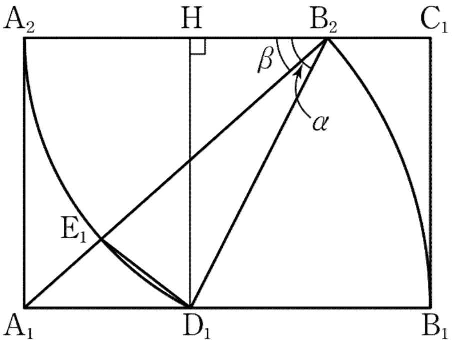
$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=4$, $f'(-1)=-n+4$

이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $-n+4\geq 0$, 즉 $n\leq 4$이어야 하므로 구하는 자연수 n의 최댓값은 4이다.

27) 정답 ①



직각삼각형 $A_1B_2A_2$에서

$\overline{A_1A_2}=2$, $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1B_1}=3$이므로

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

점 D_1에서 선분 A_2C_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 D_1B_2H에서

$\overline{D_1H}=2$, $\overline{B_2D_1}=\overline{A_2B_2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{B_2H}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$

따라서 $\angle D_1B_2H=\alpha$라 하면

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

이고 $\angle A_1B_2A_2=\beta$라 하면

$\sin\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로

$\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{10-2\sqrt{5}}{15}$

그러면 삼각형 $B_2E_1D_1$의 넓이는

$S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{10-2\sqrt{5}}{15}=\frac{5-\sqrt{5}}{3}$

직사각형 $A_2B_2C_2A_3$에서 $\overline{A_2B_2}=\sqrt{5}$ 이므로

두 직사각형 $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$의

닮음비는 $3:\sqrt{5}$ 이고 넓이비는 $9:5$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{5-\sqrt{5}}{3}$ 이고

공비가 $\frac{5}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제

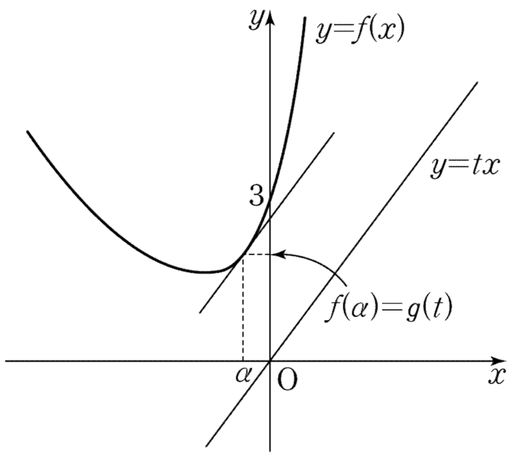
n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{5-\sqrt{5}}{3}}{1-\frac{5}{9}}=\frac{15-3\sqrt{5}}{4}$$

28) 정답 ②

점 P와 직선 $y=tx$ 사이의 거리가 최소일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 t이다.

즉, 점 P의 x좌표를 α라 하면 $f'(\alpha)=t$이고 $g(t)=f(\alpha)$이다.



$f'(x)=3e^x+x$이므로 $f'(\alpha)=t$에서

$3e^{\alpha}+\alpha=t$

이 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$(3e^{\alpha}+1)\times\frac{d\alpha}{dt}=1$ …… ㉠

또한 $g(t)=f(\alpha)$에서

$g'(t)=f'(\alpha)\times\frac{d\alpha}{dt}$ 이므로 ㉠에 의하여

$g'(t)=f'(\alpha)\times\frac{1}{3e^{\alpha}+1}$ …… ㉡

한편 $h(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=kx$ 사이의 거리가 최소일 때 점 P의 y좌표가 3이다. 즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=kx$ 사이의 거리가 최소일 때 $P(0, 3)$이므로

$k=f'(0)=3$

따라서 $h(3)=3$, $g(3)=3$이고, $t=3$일 때 $\alpha=0$이므로 ㉡의 식에 $t=3$을 대입하면

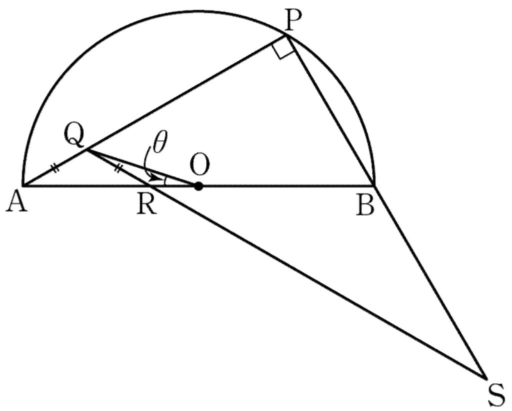
$g'(3)=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{3}{4}$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$h'(3)=\frac{1}{g'(h(3))}=\frac{1}{g'(3)}=\frac{4}{3}$

29) 정답 75

문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



두 직선 BP, RQ가 만나는 점을 S라 하면

조건에 의하여 $\angle PSQ=\frac{\pi}{6}$ 이고,

원주각의 성질에 의하여 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 이므로

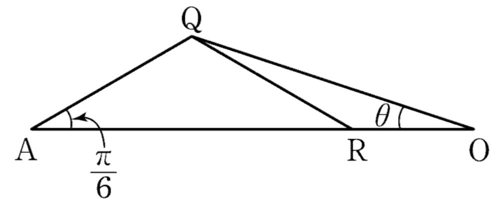
$\angle PQS=\frac{\pi}{3}$ 이다.

그러면 $\angle AQR=\frac{2\pi}{3}$ 이고 삼각형 AQR는

$\overline{AQ}=\overline{QR}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{QAR}=\angle\mathrm{QRA}=\frac{\pi}{6}$

따라서 삼각형 AOQ는 다음과 같다.



이때 $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\angle\mathrm{AQO}=\frac{5}{6}\pi-\theta$이므로

삼각형 AOQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\theta},\ \text{즉}\ \overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

그러면

$$\overline{\mathrm{AR}}=2\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{AR}}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\sin^2\theta}{4\sin^2\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

이다. 한편

$$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

이고 직각삼각형 ABP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=2\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{3}-\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)-\sin\theta}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

따라서

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{3\sin\theta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)-\sqrt{3}\sin^2\theta}{4\sin^2\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times g(\theta)}{f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta\times\left\{3\sin\theta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)-\sqrt{3}\sin^2\theta\right\}}{\sqrt{3}\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}\times\left\{\sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)-\sin\theta\right\}$$

$$=\sqrt{3}\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ 100k^2=100\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=75$$

30) 정답 175

$$f(x)=\begin{cases}e^x+a & (x<0)\\ \frac{4}{x+2}+b & (x\ge0)\end{cases}\ \text{에서}$$

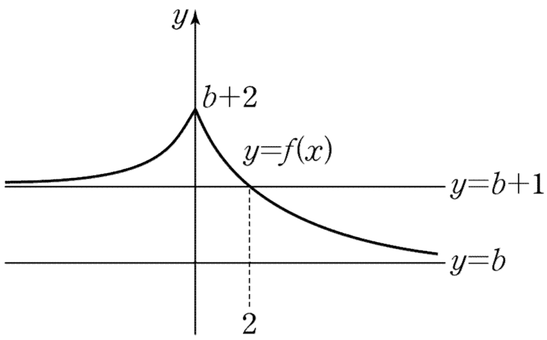
$$f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ -\frac{4}{(x+2)^2} & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=a+1$, $\lim_{x\to0+}f(x)=b+2$에서

$a=b+1$ …… ㉠

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편 $x\neq0$일 때

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이고 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}g'(f(x))f'(x)=g'(a+1)$,

$\lim_{x\to0+}g'(f(x))f'(x)=-g'(b+2)$에서

$g'(a+1)=-g'(b+2)$

그러면 ㉠에서 $a+1=b+2$이므로

$g'(a+1)=g'(b+2)=0$

조건 (가)에서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=-\frac{1}{4}g'(b+1)=0$,

$g'(b+1)=0$

이고 $x=2$의 좌우에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$의 부호는

$(-)$에서 $(+)$로 바뀌어야 한다.

이때 $f'(2)<0$이므로

$x=2$의 좌우에서 $g'(f(x))$의 부호가

$(+)$에서 $(-)$로 바뀌어야 한다.

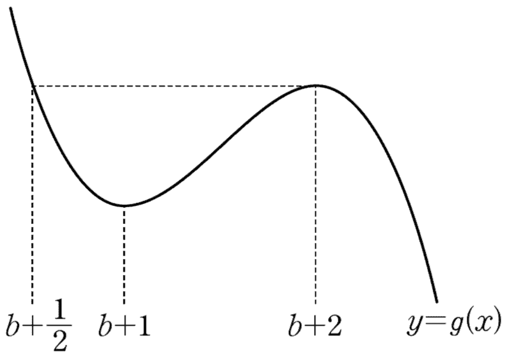
$x\to 2-$ 일 때 $f(x)\to(b+1)+$ 이고,

$x\to 2+$ 일 때 $f(x)\to(b+1)-$ 이므로

$x=b+1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호는

$(-)$에서 $(+)$로 바뀌어야 한다.

한편 $g'(b+1)=g'(b+2)=0$에서 삼차함수 $g(x)$는 $x=b+1$과 $b+2$에서 극값을 가지므로, 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



이때 삼차함수의 비율성에 의하여

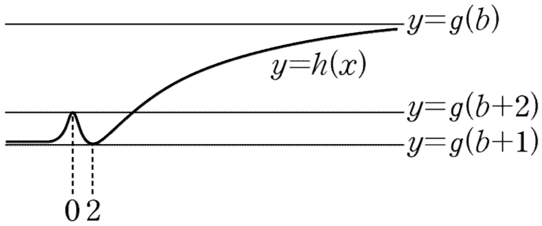
$g(b)>g(b+2)$

이고

$g(x)=m(x-b-2)^2\left(x-b-\frac{1}{2}\right)+k$

로 놓을 수 있다.

또한 함수 $h(x)=g(f(x))$의 그래프는 다음과 같다.



그러면 조건 (나)에 의하여

$g(b+1)=-1$, $g(b+2)=0$, $g(b)=b+2$

이다.

그러면 $g(b+2)=k=0$이므로

$g(b+1)=\frac{1}{2}m=-1$에서

$m=-2$

또한 $g(b)=-2m=b+2$에서

$b=2$

따라서 $g(x)=-2(x-4)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$이다.

또한 ㉠에서 $a=3$이므로 구하는 값은

$g(a-2b)=g(-1)=-2\times(-5)^2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=175$

[기하]

23) 정답 ⑤

$2\vec{a}=(8,\ -4)$, $\vec{b}=(5,\ 1)$에서

$2\vec{a}+\vec{b}=(13,\ -3)$이므로 모든 성분의 합은

$13+(-3)=10$

24) 정답 ③

타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{a}{4}+9}$

이 중에서 한 직선의 x절편이 8이므로

$0=4\pm\sqrt{\frac{a}{4}+9}$, $\frac{a}{4}+9=16$

$\therefore\ a=28$

25) 정답 ①

$|3\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{21}$에서

$(3\vec{b}-2\vec{a})\cdot(3\vec{b}-2\vec{a})=|3\vec{b}-2\vec{a}|^2=21$,

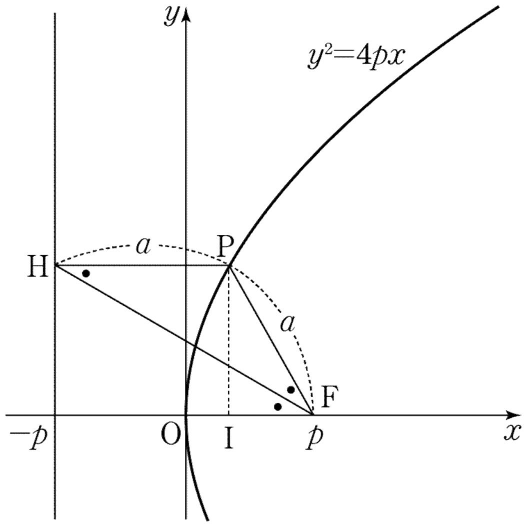
$9|\vec{b}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{a}|^2=21$

조건에 의하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$이므로

$9-12\vec{a}\cdot\vec{b}+16=21$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\frac{1}{3}}{2\times1} = \dfrac{1}{6}$

26) 정답 ④



$\overline{\mathrm{PF}} = a$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}} = a$이다.

삼각형 PHF는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{PFH} = \angle\mathrm{PHF} = \angle\mathrm{IFH} = \dfrac{\pi}{6}$

이때 $\angle\mathrm{IFP} = \dfrac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 PIF에서

$\overline{\mathrm{IF}} = \overline{\mathrm{PF}}\times\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{a}{2}$

이고

$2p = a + \dfrac{a}{2}$, $p = \dfrac{3}{4}a$

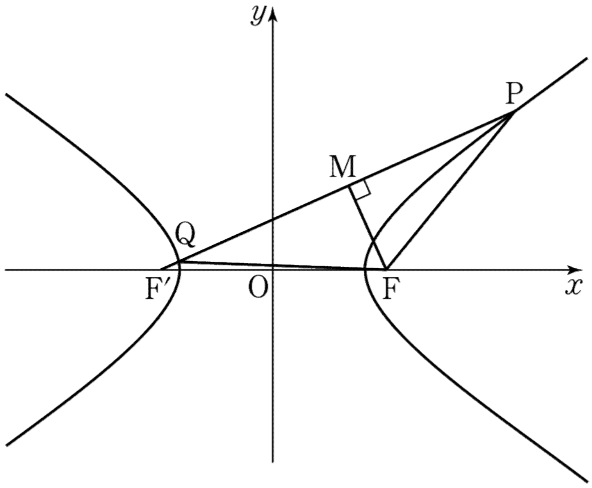
그러면 삼각형 PHF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = 4\sqrt{3}$

이므로 $a^2 = 16$, $a = 4$이다.

$\therefore p = \dfrac{3}{4}a = 3$

27) 정답 ②



$\overline{\mathrm{FP}} = k\ (k>0)$이라 할 때, 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}} - \overline{\mathrm{FP}} = 4$, 즉 $\overline{\mathrm{F'P}} = k+4$ …… ㉠

조건 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{FQ}}$에 의하여 $\overline{\mathrm{FQ}} = k$이고 점 Q는 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}} - \overline{\mathrm{F'Q}} = 4$, 즉 $\overline{\mathrm{F'Q}} = k-4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = 8$이다.

이등변삼각형 FPQ에서 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{QM}} = 4$이고 직선 PQ와 직선 FM은 서로 수직이다.

직각삼각형 PMF에서 $\overline{\mathrm{FM}}^2 = k^2 - 16$이고

직각삼각형 F′MF에서 $\overline{\mathrm{FM}}^2 = 24 - k^2$이므로

$k^2 - 16 = 24 - k^2$, $k = 2\sqrt{5}$

따라서 선분 FP의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

28) 정답 ④

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}) = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3} = 0$

따라서 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$이므로, 두 직선 AP, BD는 서로 수직이다.

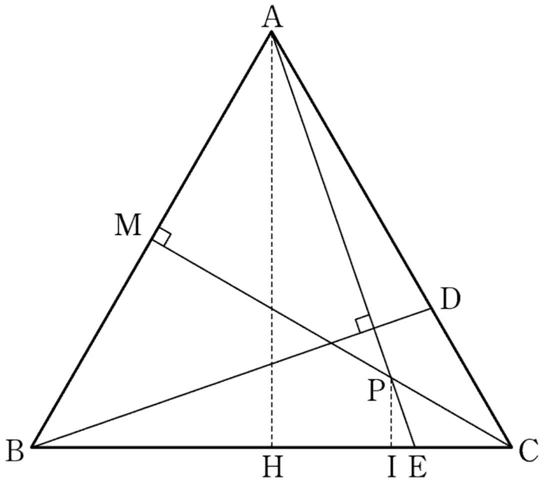
점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 18$

이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$은 방향이 같고,

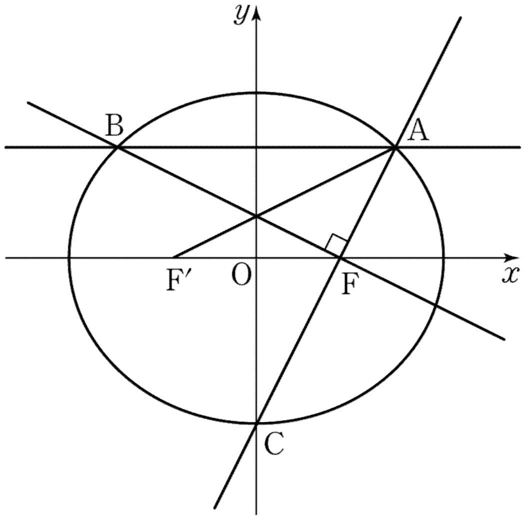
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 6$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| = 3$이다.

즉, 점 M은 선분 AB의 중점이다.
따라서 점 A를 지나고 직선 BD에 수직인 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하면,
점 P는 두 직선 AE, MC의 교점이다.



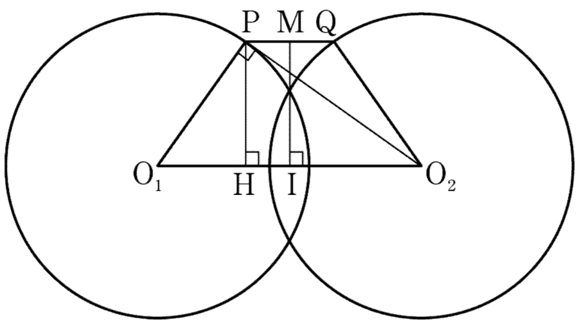
두 점 A, P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.
조건 (가)에서
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{HI}\times\overline{BC}=9$이므로
$\overline{HI}=\frac{3}{2}$, $\overline{CI}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$
두 삼각형 CPI, CBM은 서로 닮음이므로
$\overline{CP}:\overline{CI}=\overline{CB}:\overline{CM}$, $\overline{CP}:\frac{3}{2}=6:3\sqrt{3}$에서
$\overline{CP}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$
한편 조건 (나)에서
$|\overrightarrow{AQ}|=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 6=2\sqrt{3}$
이므로 점 Q는 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원 위에 있다.
$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}\right)$
$=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}$
$=\sqrt{3}\times 6\times\cos\frac{\pi}{6}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}$
$=9+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}$
이때 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AQ}$의 방향이 같을 때 최댓값 $\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6$을 가지므로,
구하는 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$의 최댓값은
$9+6=15$

29) 정답 72



직선 AF와 y축이 만나는 점을 C라 하자.
타원의 대칭성에 의하여 직선 BF′은 점 C를 지나고 $\overline{CA}=\overline{CB}$, $\overline{AF'}=\overline{BF}$, $\overline{F'C}=\overline{FC}$이므로
삼각형 CAF′과 삼각형 CBF는 합동이다.
따라서 $\angle CAF'=\angle CBF$이므로
$\tan(\angle CBF)=\frac{3}{4}$이고, $\overline{BF}=4k$, $\overline{CF}=3k$라
하면 직각삼각형 BFC에서 $\overline{BC}=5k$이다.
그러면 $\overline{AC}=5k$이고
$\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{CF}=5k-3k=2k$
이므로 직각삼각형 ABF에서
$\left(2\sqrt{10}\right)^2=(4k)^2+(2k)^2$, $40=20k^2$
$\therefore\ k^2=2$, $k=\sqrt{2}$
타원의 정의에 의하여 장축의 길이는
$\overline{AF}+\overline{BF}=2k+4k=6k=6\sqrt{2}$
$\therefore\ l^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$

30) 정답 32



점 P와 선분 PQ의 중점 M에서 선분 O_1O_2에

내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.

조건 (가)에 의하여 $\angle O_1PO_2 = \frac{\pi}{2}$ 이고,

조건 (나)에 의하여 $3\times\overline{PQ}=\overline{O_1O_2}$ 이므로

$\overline{PM}=k$라 하면

$\overline{PQ}=2k$, $\overline{O_1O_2}=6k$, $\overline{O_1H}=2k$

삼각형 PO_1H와 삼각형 O_2O_1P는 닮음이므로

$\overline{O_1O_2}:\overline{O_1P}=\overline{O_1P}:\overline{O_1H}$

이고 $\overline{O_1P}=2\sqrt{2}$ 이므로

$6k:2\sqrt{2}=2\sqrt{2}:2k$, $12k^2=8$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{6}}{3}$

그러면 직각삼각형 O_1PH에서

$\overline{PH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

점 R는 점 M을 중심으로 하고 반지름의

길이가 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 원 위의 점이므로

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO_2}=\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MO_2}\right)$

$=\left|\overrightarrow{RM}\right|^2+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MO_2}+\overrightarrow{RM}\cdot\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MO_2}\right)$

이때, $\left|\overrightarrow{RM}\right|^2=k^2=\frac{2}{3}$ 이고

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MO_2}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\ 0\right)\cdot\left(\sqrt{6},\ -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-2$

이므로 선분 O_2P의 중점을 N이라 하면

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO_2}=-\frac{4}{3}+2\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MN}$

즉, $2\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MN}$이 최대일 때 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO_2}$는

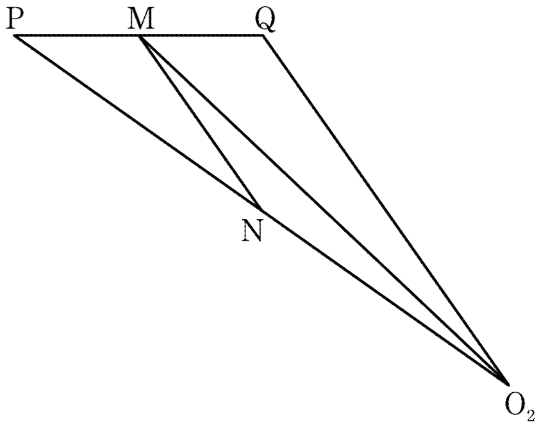
최댓값을 갖는다.

그런데 $\left|\overrightarrow{RM}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로

$2\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MN}$은 두 벡터 $\overrightarrow{RM}$와 $\overrightarrow{MN}$의 방향이

같을 때 최댓값 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 을 갖는다.

삼각형 O_2PQ는 다음과 같다.



삼각형 PMN과 삼각형 PQO_2는 닮음이고,

닮음비는 $1:2$이므로

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\times\overline{O_2Q}=\sqrt{2}$

따라서 $2\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MN}$의 최댓값은 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RO_2}$의 최댓값은 $\frac{4}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{3}$ 이다.

$\therefore\ 9(a^2+b^2)=9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\right\}=32$