01. [계산을 간단하게 하는 그 무엇]

sol)
$A+B=2E$이므로 행렬 $A(A+B)=2A$의 모든 성분의 합은 6입니다.

02. [극한 계산의 성질]

sol)
수렴하는 값일 때는 극한을 비교적 자유롭게 계산할 수 있습니다. 잠시 미래엔 수학Ⅰ 교과서 설명 부분을 가져 와 보겠습니다.

> 일반적으로 수렴하는 무한수열의 극한에 관하여 다음과 같은 성질이 성립한다.
>
> **무한수열의 극한에 관한 기본 성질**
>
> 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때
>
> ❶ $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)
>
> ❷ $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$
>
> ❸ $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$
>
> ❹ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$
>
> ❺ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

그러니 주어진 극한값은 다음과 같이 계산이 가능합니다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=1\times1=1$$

03. [우도할계(于刀割鷄)]

sol)
일반적으로 일차변환 $f:(x,y)\to(ax+by,cx+dy)$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$이므로 $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$가 되어야 합니다. 따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 3이 됩니다.

※ 선형대수학 내용이지만, 어떠한 일차변환을 나타내는 행렬을 파악하기 위해서는 기저(basis)라는 개념에 해당하는 $(1,0)$과 $(0,1)$이라는 두 점이 어디로 변화하는지를 관찰하면 됩니다. 일차변환을 나타내는 행렬의 성분을 구하기 위해서 일단 미지의 성분을 ?로 처리하여 $\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}$라 둔다면

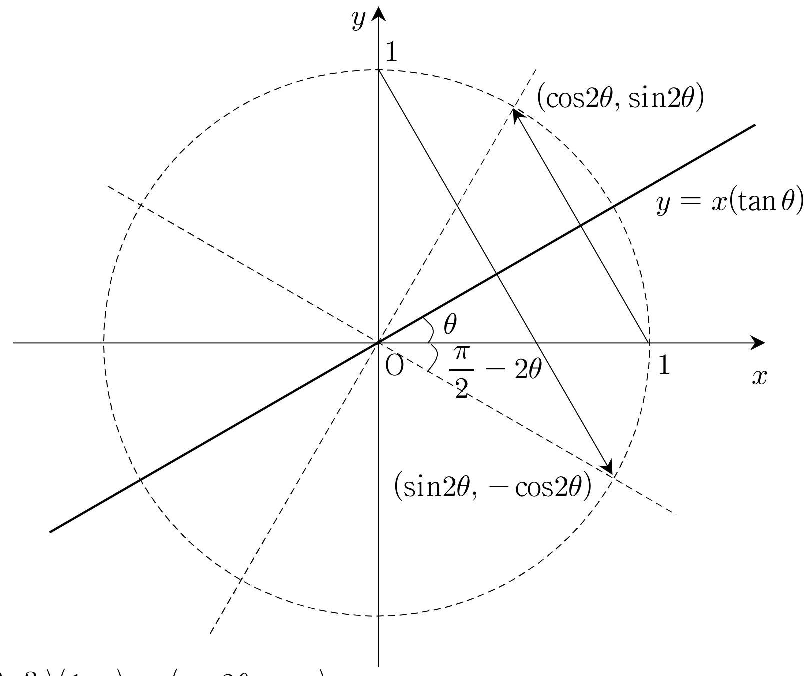
$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

이러한 행렬 꼴을 다음과 같이 서로 포개어서

$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

가 되므로 $\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 찾을 수 있다는 원리가 됩니다.

이를 이용한다면, 평가원 시험엔 잘 안 나오지만 $y=x(\tan\theta)$라는 선대칭을 의미하는 행렬을 구해보자면



$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\\sin 2\theta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta\\-\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

이를 적절하게 포개면

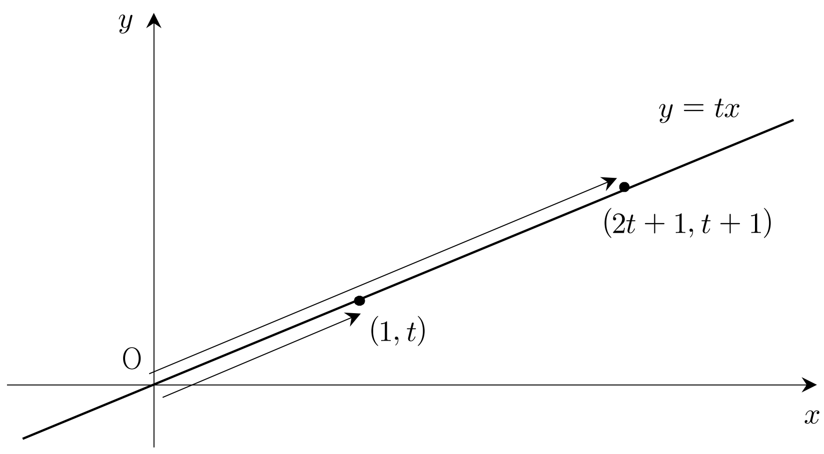
$$\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

가 되어 $\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{pmatrix}$임을 알 수 있습니다.

04. [벡터의 평행]

sol.1)
두 벡터 $\vec{a}=(1,t)$와 $\vec{a}+\vec{b}=(2t+1,t+1)$가 서로 평행하다면 상수배 관계가 되어야 합니다. 즉, $\vec{a}//(\vec{a}+\vec{b})$라면 $\vec{a}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족하는 적절한 상수 k가 존재해야 합니다. 그러면 $(1,t)=k(2t+1,t+1)$를 정리해서 $\frac{1}{2t+1}=k=\frac{t}{t+1}\to t+1=2t^2+t\to t=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 얻을 수 있습니다.

sol.2)
만약 벡터 $\vec{a}=(1,t)$와 $\vec{a}+\vec{b}=(2t+1,t+1)$를 모두 시점을 원점으로 하는 위치벡터로 본다면, 종점 $(1,t)$가 직선 $y=tx$상에 존재하기에 종점 $(2t+1,t+1)$ 또한 직선 $y=tx$상에 존재하여야 마땅합니다.



그렇기에 $t+1=t(2t+1)$을 계산해서 나오는 양수 t값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 됩니다.

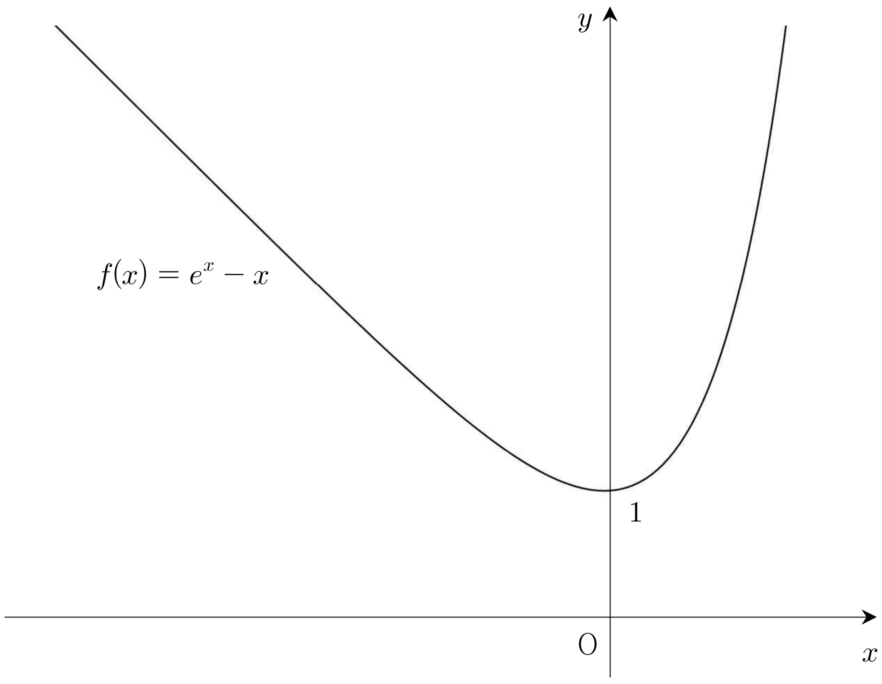
05. [미분을 하는 이유]

sol)

이런 문제를 만날 때마다 무작정 미분부터 하고 보기 전에 왜 미분을 하는지 짚어봅시다. 교과서 내용에 따르면, 어떤 함수의 최솟값을 구하기 위해서는, 극솟값들과 구간 끝 값들만을 비교해서 그 중에서 가장 작은 값을 최솟값으로 취하여 주면 됩니다. 그리고 지금 주어진 함수 $f(x)=e^x-x$는 모든 실수에서 정의된 미분가능한 함수로서 구간 끝값이 존재한다고 볼 수 없기 때문에 최솟값은 반드시 극솟값의 꼴을 띄어야 합니다. 마치 이차함수가 최댓값을 갖는다면 그것은 반드시 극댓값의 형태여야 하는 것과 같은 원리입니다. 고로, 우리는 함수 $f(x)$를 미분해야만 하는 이유를 찾았습니다. 그래서 미분해보면

$f'(x)=e^x-1$

이 되는데 $x=0$의 좌우에서 도함수인 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌기 때문에 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다는 것을 알 수 있습니다.



이때 $f(x)$의 극솟값 $f(0)=e^0-0=1$은 $f(x)$의 유일한 극솟값으로서 반드시 최솟값이 됩니다. 따라서 답은 ① 1이 됩니다.

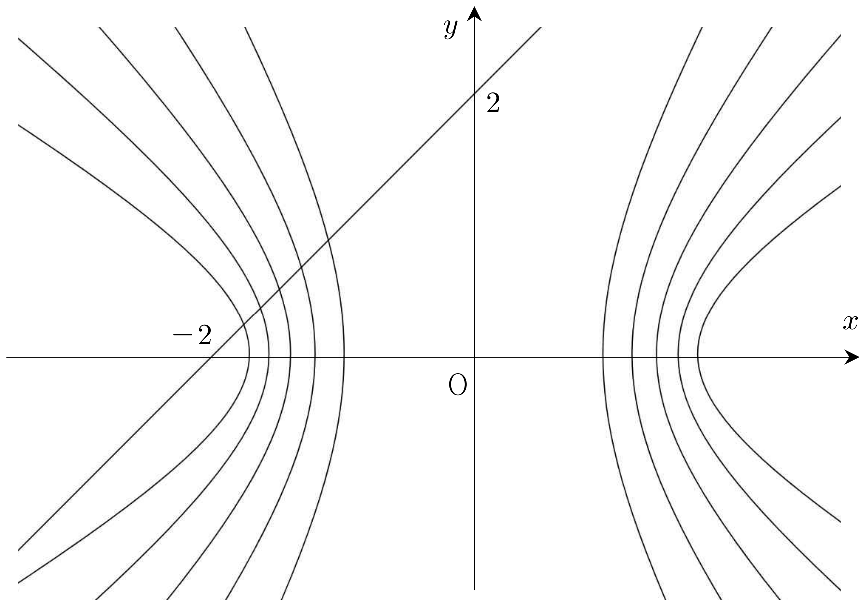
06. [이의제기 문항]

sol)

포물선 $y^2=8x$에 접하는 기울기가 1인 직선의 방정식은 이차함수 종류에 따른 기울기가 m인 접선 공식에 의하여 $y=1\cdot x+\dfrac{2}{1}=x+2$가 됩니다.

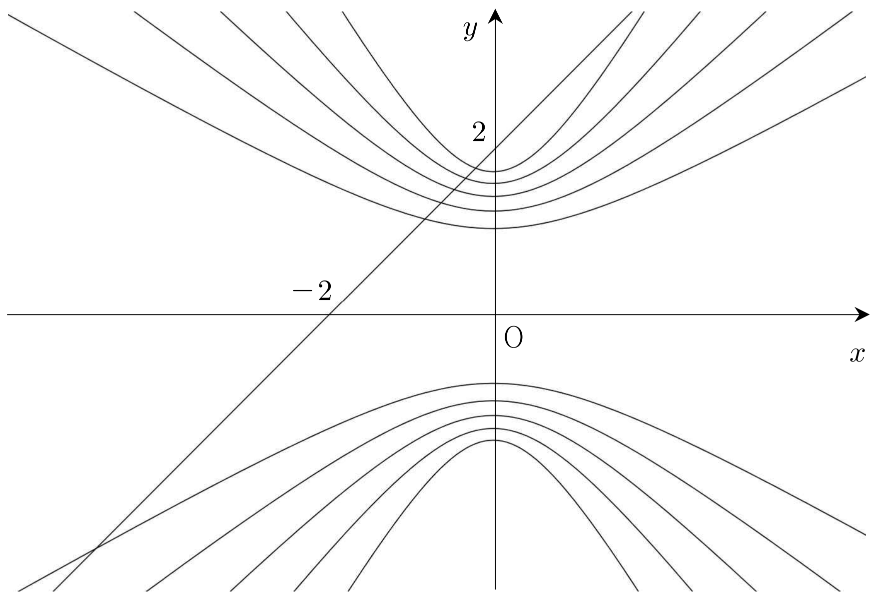
이차곡선 형태	기울기가 m인 접선
$y^2=4px$	$y=mx+\dfrac{p}{m}$
$x^2=4py$	$x=\dfrac{1}{m}y+mp \rightarrow y=m(x-mp)$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}\ \left(\lvert m\rvert>\dfrac{b}{a}\right)$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	$y=mx\pm\sqrt{b^2-m^2a^2}\ \left(\lvert m\rvert<\dfrac{b}{a}\right)$

만약 a,b가 0이 아닌 실수라면 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 타원처럼 a,b의 대소 관계에 따라 개형이 달라지는 것이 아니라, a,b의 대소 관계에 상관없이 우변이 1이기 때문에 양 옆으로 한 쌍의 곡선이 그려지는 모습이 됩니다.



그러면 쌍곡선의 초점은 x축 상에 존재할 수 밖에 없고, $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},0\right)$이 두 초점이 되는데, x축과 직선 $y=x+2$의 교점은 $(-2,0)$이 될 수 밖에 없습니다. 따라서 $a^2+b^2=4$가 정답!

※ 그런데 이 문제는 잘 읽어보면 논리의 빈틈이 존재합니다. 쌍곡선이 등장하는 문제에서 흔하게 보이는 $a>b>0$과 같은 조건이 안 보이기 때문에, 오직 알 수 있는 것은 $ab\neq 0$라는 것 정도 밖에 없습니다. 바로 여기서 문제가 발생합니다. 가령, 복소수까지 확장해서 $a^2=-2, b^2=-2$와 같은 상황을 고려한다면 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=-1$이 되어 한 초점 $(0,2)$가 직선 $y=x+2$ 위에 놓이게 됩니다. 즉, 다음과 같은 상황도 고려해야 한다는 것이죠.



그러면 $a^2+b^2=-4$가 되는 경우까지 고려해서 $a^2+b^2=\pm 4$가 답이 되어야 할 것입니다. 하지만 보기 중에 없으니까 시험에 임한 수험생의 바람직한 자세는, 일단 $a^2+b^2=4$를 택하고 다음 문제로 넘어가는 것이겠죠? 물론 이 글도 스윽 보고 넘어가도 상관없습니다. 쥬륵ㅠㅠ

07. [우리는 답을 찾을 것이다. 늘 그랬듯이]

sol)

이런 문제는 잘 읽고 수치만 적절히 대입하여 연립 해보면 답이 나왔습니다.

『 레이저에 4분 노출시킨 후 3일이 지난 후

수염의 개수가 초기 수염의 개수의 $\frac{3}{4}$배일 때, 』

라는 부분에서 관계식을 이끌어내면

$$\frac{M}{M_0}=\frac{\frac{3}{4}M_0}{M_0}=1-k\log_2\left(1+\frac{4}{3+1}\right)=1-k \ \rightarrow\ k=\frac{1}{4}$$

『 레이저에 14분 노출시킨 후 1일이 지난 후

수염의 개수가 초기 수염의 개수의 a배이다. 』

라는 부분에서 관계식을 이끌어내면

$$\frac{M}{M_0}=\frac{aM_0}{M_0}=1-k\log_2\left(1+\frac{14}{1+1}\right)=1-\frac{1}{4}\log_2 8 \ \rightarrow\ a=\frac{1}{4}$$

08. [시각화 여부에 따라]

sol.1)

수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$의 정의 자체가 전사건 S의 개수에 대한 해당 사건 A의 개수비인 $\frac{n(A)}{n(S)}$로서 집합의 연산과 아주 밀접한 연관이 있습니다. 따라서

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

에서 양변을 전체 집합, 즉 표본 공간에서 근원 사건의 총 개수 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\rightarrow \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

라는 관계식이 유도됩니다.

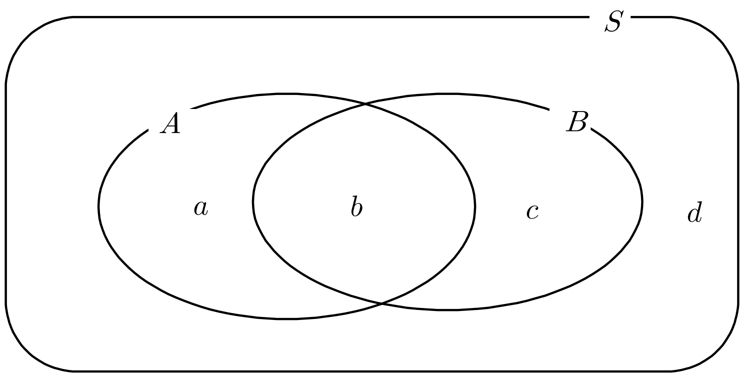
그런데 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$라 하였으므로 편의상 $\mathrm{P}(A)$에 관해 정리해보면

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\ \rightarrow\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$$

가 됩니다. 따라서, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P(B\cap A)}}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있습니다.

sol.2)

표본 공간을 벤 다이어그램으로서 관찰하되 편의상 각 영역의 원소, 즉 근원 사건의 개수를 a, b, c, d라 하겠습니다.



그러면 $a+b+c=a+b=2(b+c)\ \rightarrow c=0, a=b$가 되므로

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P(B\cap A)}}{\mathrm{P}(A)}=\frac{b}{a+b}=\frac{1}{2}$$

09. [변곡점을 갖기 위한 필요충분조건]

sol)

$f(x)$는 굳이 정확하게 계산하지 않더라도 x에 대한 삼차식임을 알 수 있습니다. 이때 변곡점은 이계도함수의 부호변화가 일어나는 지점으로서, 이계도함수에 해당하는 일차함수의 x절편이 곧 a가 되어야 합니다. 따라서 차분하게 준 식을 두 번 미분 해보면

$$\begin{cases} f'(x)=\int_0^x (t-2)dt+x(x-2) \\ f''(x)=x-2+2x-2=3x-4 \end{cases}$$

가 되어 $a=\frac{4}{3}$이 되어야 합니다.

10. [흔한 분수 방정식]

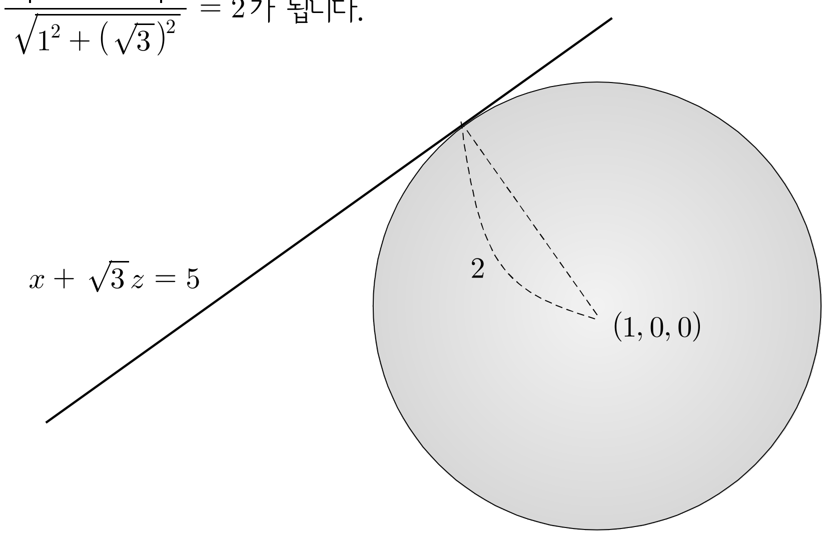
sol)

$\frac{\{f(x)\}^2-1}{f(x-1)}=0$은 결국 $f(x)=\pm 1$이면서 $f(x-1)\neq 0$임을 의미합니다. 그리고 $f(x)=\pm 1$인 x값들로는 $-3,-1,1,3,5$인데, 다시 $f(x-1)=0$인 것들을 걸러내면 $x-1=-2,0,4$ 즉 $x=-1,1,5$를 제외해야 합니다. 따라서 $x=-3,3$이 주어진 방정식을 만족하는 실근이므로 그 개수는 2가 됩니다.

11. [그림은 2차원, 생각은 3차원으로]

sol)

구 S의 중심 $(1,0,0)$에서 평면 $x+\sqrt{3}z=5$에 이르는 거리는 $\frac{|1+0-5|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=2$가 됩니다.



따라서 구 S의 방정식은 $(x-1)^2+y^2+z^2=4$가 되고, 다시 yz평면과 만나서 생기는 교원을 구하기 위해 $x=0$과 연립하여 $y^2+z^2=3$을 얻습니다. 그리고 이 원의 넓이는 3π가 됩니다. 굳이 또 교원을 안 나타내도 되겠죠?

※ 여기까지 오는 동안 기출 문제 변형이라 하기도 민망할 만큼 평이한 문제들만이 나왔습니다. 계산 실수한 것은 없는지 신경 써가면서 잘 풀고 있죠?

12. [점화식 마스터 http://cafe.naver.com/pnmath/397382]

sol)

$a_{n+1} = n(n+3) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ $(n \geq 1)$라는 식을 해결하기 위해 첨수를 하나씩 뺀 $a_n = (n-1)(n+2) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k}$ $(n \geq 2)$라는 식을 다시 빼주면

$$a_{n+1} - a_n = n(n+3) - (n-1)(n+2) + \frac{a_n}{n} \ (n \geq 2)$$

가 됩니다. 이때 n의 범위는 교집합적으로 생각해보면 $n \geq 2$가 되는 것이 마땅하겠죠? 그리고 (가)에 들어갈 식은

$$n(n+3) - (n-1)(n+2) = 2n + 2 = f(n)$$

이 됩니다. 즉, $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$가 되는데, 이를 다루기 쉽게 다음과 같이 변형해보면

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + 2(n+1) \ (n \geq 2)$$

가 됩니다. 그리고 한 번 더 치환하기 쉽게끔 양변을 $n+1$로 나누되 문제에서처럼 $b_n = \frac{a_n}{n}$으로 치환하면 $n \geq 2$ 범위는 그대로 보존되고,

$$b_2 = \frac{a_2}{2} = \frac{1 \cdot 4 + \frac{3}{1}}{2} = \frac{7}{2}$$

이면서, $b_{n+1} = b_n + 2$ $(n \geq 2)$라는 등차수열 점화식을 만족하게 됩니다.

그러면 $\left(\frac{a_n}{n} =\right) b_n = 2n - \frac{1}{2}$ $(n \geq 2)$이므로 (나)에 들어갈 식은

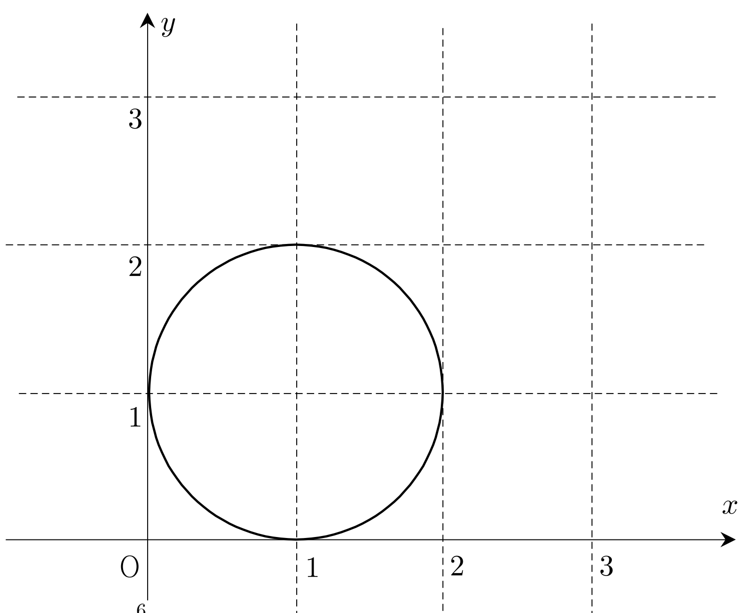
$$n\left(2n - \frac{1}{2}\right) = g(n)$$

으로 정리됩니다.

고로, $f(4) + g(5) = 10 + 5\left(10 - \frac{1}{2}\right) = 60 - \frac{5}{2} = \frac{115}{2}$가 답입니다.

13. ['그래프만 잘 그려도 자다가 떡이 생긴다'는 속담도 있듯]

sol)

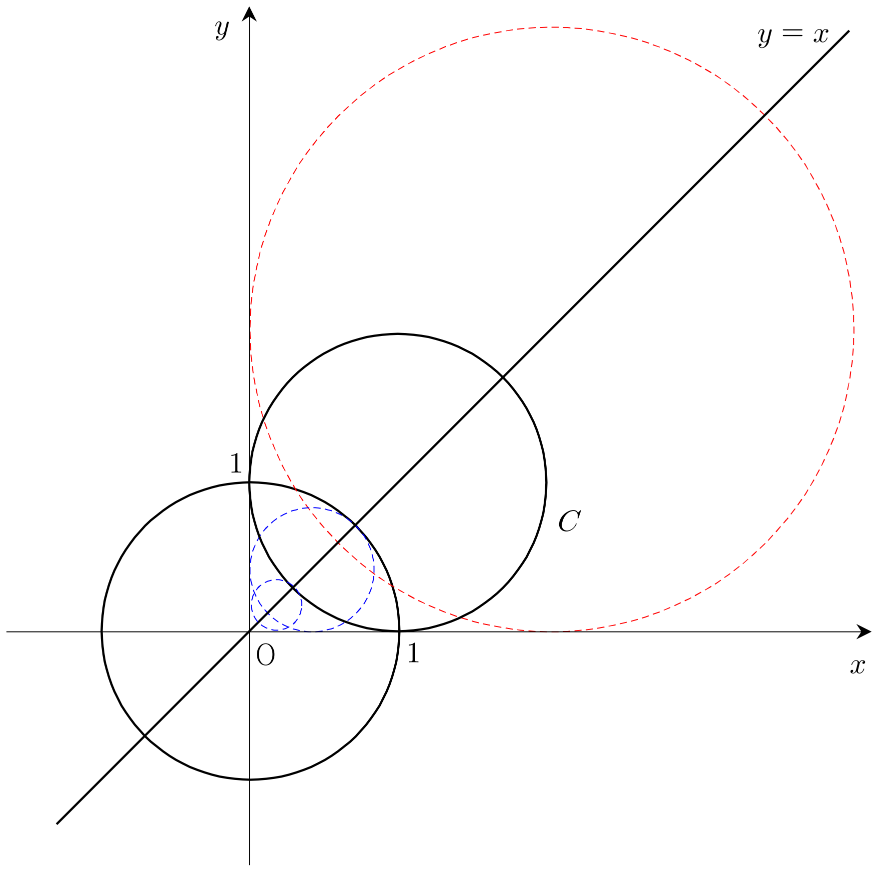


$$\therefore \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

14. [어서와, 4점은 처음이지?]

sol)

f는 $k > 1$이면 원점을 중심으로 k배 확대, $k = 1$이면 보존, $0 < k < 1$이면 원점을 중심으로 k배 축소하는 일차변환입니다.



때마침 원 C는 일차변환 f에 의해 크기가 변하면서 x, y축에 동시에 접하게 됩니다. 조금 더 엄밀하게 수식으로 나타내자면, $f : (1, 1) \rightarrow (k, k)$으로 중심은 (k, k)로 옮겨가고, 반지름은 k가 됩니다.

이때 보기에서 물어보고 있는 것들에 답하기 위해서는 미리 원 C가 단위원 $x^2 + y^2 = 1$에 접할 때, 즉 내접할 때와 외접할 때의 k값을 구해 봅시다.

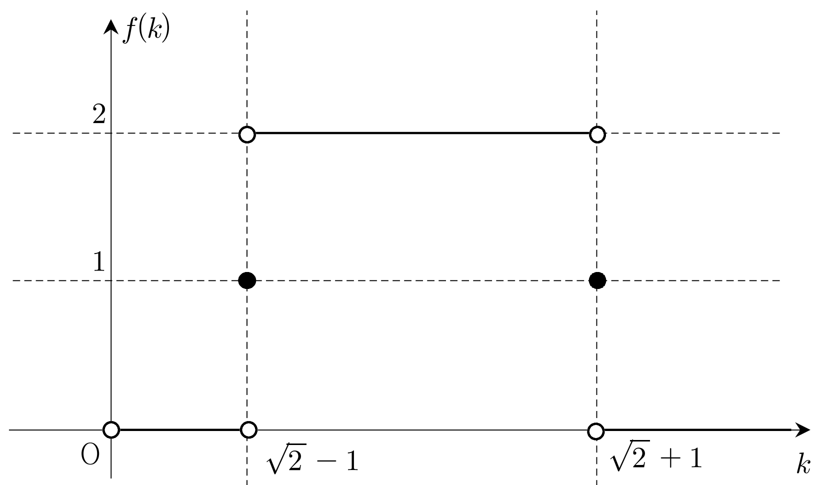
먼저 $0 < k < 1$일 때 내접하는 경우,

$$\sqrt{2}k + k = 1 \ \rightarrow \ k = \sqrt{2} - 1 = 0.4\cdots$$

그리고 $k > 1$일 때 외접하는 경우,

$$1 + k = \sqrt{2}k \ \rightarrow \ k = \sqrt{2} + 1 = 2.4\cdots$$

따라서 $f(k)$의 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.



ㄱ. $f(1) = 2$이므로 참.

ㄴ. $k = \sqrt{2} \pm 1$이므로 참.

ㄷ. $2 < \sqrt{2} + 1$이므로 거짓.

따라서 답은 ③ ㄱ, ㄴ입니다.

※ 이 문제 보니까 떠오르는 기출문제가 있죠?

[2006년 11월 대수능 수리(가형) 09번]

9. 좌표평면에서 중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

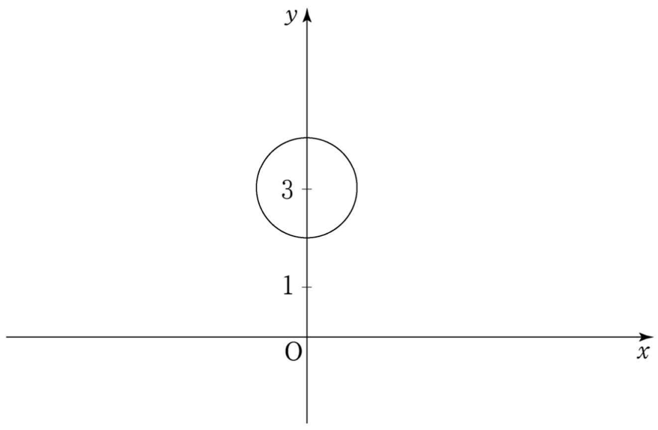
<보 기>

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim\limits_{r \to 1+0} f(r) = f(1)$

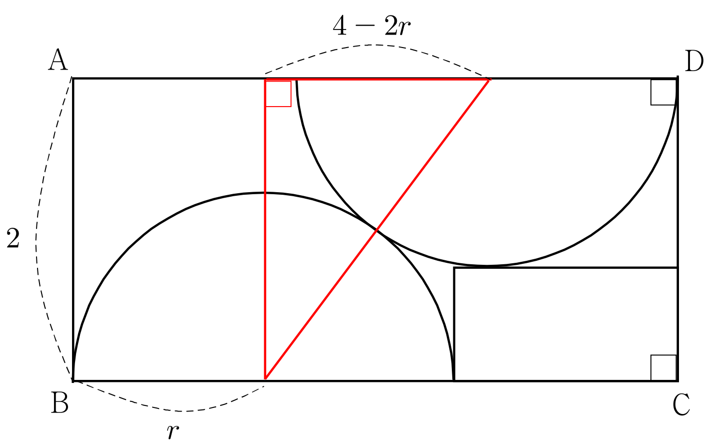
ㄷ. 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



15. [요즘 따라 보기 힘들어졌어]

sol)



위와 같이 보조선을 긋고서, 물론 여러 가지 방법이 있을 수 있고, 그 중에는 더 빠른 방법도 있을지도 모르니 꼭 이 풀이만을 고집할 이유는 없겠죠?
직각삼각형을 포착해서 피타고라스 정리를 적용해보면

$$4r^2 = (4-2r)^2 + 4 \ \rightarrow\ r = \frac{5}{4}$$

가 되어 초항 $S_1 = \pi r^2 = \frac{25}{16}\pi$가 나옵니다.
다음으로 공비를 파악해야 하는데, R_2 단계에서 처음 등장하는 두 번째 크기의 정사각형의 가로 길이는 $4-2r = \frac{3}{2}$로서 각 단계마다 추가적으로 발생하는 도형들 간에 닮음비는 $4 : \frac{3}{2} = 8 : 3$이라 할 수 있습니다. 여기서 넓이비는 닮음비의 제곱으로 생각해야 하기에 $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$가 넓이비가 되는 반면, 개수는 개수대로 두 배씩 늘어나고 있으므로 실질적인 공비는 $\frac{9}{64} \times 2 = \frac{9}{32}$가 됩니다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{16}\pi + \left(\frac{25}{16}\pi\right)\left(\frac{9}{32}\right) + \left(\frac{25}{16}\pi\right)\left(\frac{9}{32}\right)^2 + \left(\frac{25}{16}\pi\right)\left(\frac{9}{32}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{25}{16}\pi}{1-\frac{9}{32}} = \frac{50}{23}\pi$$

로 ⑤번이 답이 됩니다.
※ 이러한 유형에 약하신 분들을 위해 괜찮은 글이 있어서 소개합니다 ㅎㅎ
☞ http://cafe.naver.com/pnmath/558458

16. [행렬 퍼즐]

sol)
$A + ABA = E$를 먼저 분석해봅시다.

$$A + ABA = A(E+BA) = (E+AB)A = E$$

에서 A의 역행렬은 $E+BA$이기도 하면서 동시에 $E+AB$이기도 합니다.
그런데 역행렬은 유일하게 존재하므로 $E+BA = A^{-1} = E+AB$가 되므로 알맹이만 쏙 빼보면 $AB = BA$가 남습니다. 마침 ㄱ에서 묻고 있네요.
다음으로 $(A+B)^2 = 2AB$를 따져 봅시다. 일반적으로 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하지 않지만 $AB = BA$가 보장되므로 자유롭게 계산해보면 결국 $A^2 + B^2 = O$가 남습니다. 그러면 $B^2 = -A^2$인데, A의 역행렬이 존재하므로 A^2의 역행렬도 존재하고, $-A^2$의 역행렬도 존재하므로 B^2의 역행렬도 존재해야 합니다. 따라서 B의 역행렬도 존재해야 하므로 ㄴ은 참입니다.
이제 ㄷ이 남았습니다. 행렬 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제에서 가장 많이 등장하는 패턴입니다. ㄱ, ㄴ은 그럭저럭 쉽게 풀리는데 마지막 ㄷ을 두고 출제자와의 심리싸움을 하게 되는 상황 말이죠. 마치 퍼즐 맞추는 것처럼 주어진 정보들을 적절히 변형하여 $A^6 + (A-E)^2$의 모습을 만들어야 합니다. 그러기 위해 최대한 A 행렬에 관한 행렬다항식을 찾아야 하고, 앞서 구해둔 정보인 $A + ABA = A + A^2B = E$와 $A^2 + B^2 = O$을 이용해보면,

$$A + A^2B = E \ \rightarrow\ (A-E)^2 = \left(-A^2B\right)^2 = A^4B^2 = -A^6$$

가 되어 결국 $A^6 + (A-E)^2 = O$으로 ㄷ은 거짓입니다.
고로, 답은 ③ ㄱ, ㄴ입니다.

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 17번]

17. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$가

$$AB + A^2B = E,\quad (A-E)^2 + B^2 = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. B의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

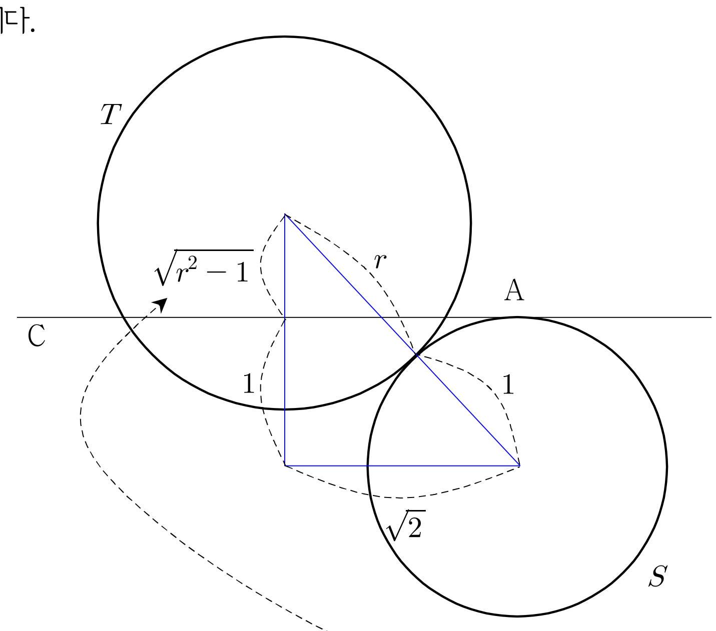
ㄷ. $(A^3 - A)^2 + E = O$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

포만한 수학 연구소

17. [믿고 쓰는 단면화]

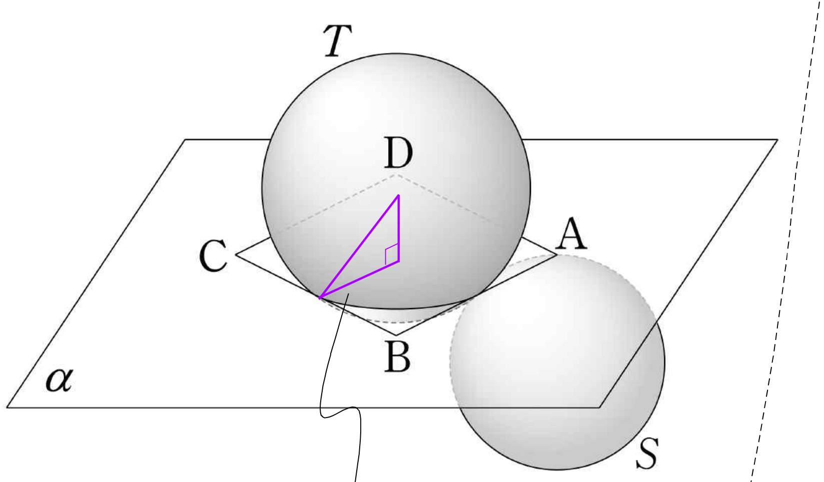
sol.1)
두 구의 중심과 두 점 A, C 를 품는 평면으로 잘라보면 다음과 같은 상황일 것입니다.

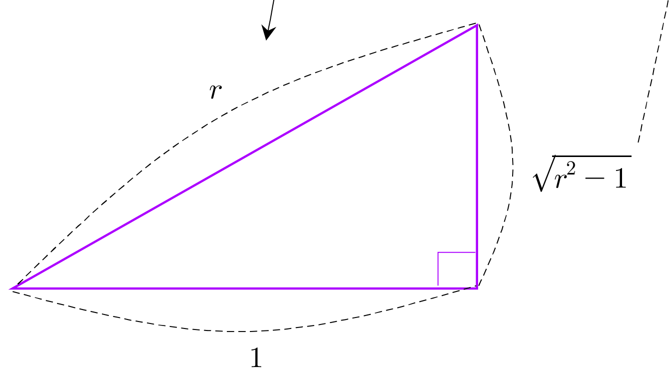


그러면 피타고라스 정리를 적용해서

$$(r+1)^2 = 2 + \left(\sqrt{r^2-1}+1\right)^2 \rightarrow r = \frac{5}{4}$$

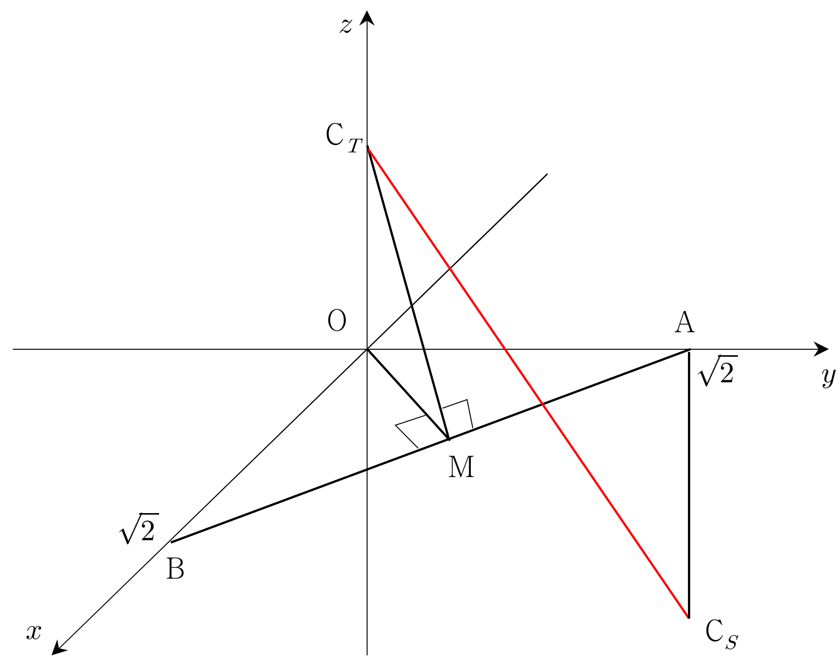
물론 여기서 r은 구 T의 반지름인데, 단면도에서 $\sqrt{r^2-1}$ 부분이 어떻게 등장했는지 의아할 수도 있습니다. 편의상 평면 α를 $z=0$ 평면으로 두면 단면화 하여 포착한 직각삼각형의 세 변의 길이를 모두 구하기 위해서는 구 T의 중심의 높이인 h가 필요합니다. 그래서 주어진 그림에 보조선을 내려 파악해보면





따라서 $\sqrt{r^2-1}$ 만큼을 구해서 피타고라스 정리를 적용할 수 있는 것이죠!

sol.2)
상황에 따라 단면화가 잘 안 보일 수도 있기에 다른 방법으로 살펴보겠습니다. 이번에는 좌표를 잡아서 풀 것입니다. 다음과 같이 문제를 해결하기 위해 가장 이상적인 위치에 좌표를 잡아봅시다.



굳이 구면은 그릴 필요가 없으니 생략하겠습니다. 그리고 구 S, T의 중점을 C_S, C_T라 하면 $C_S(0,\ \sqrt{2},\ -1)$이고, 두 점 A, B의 중점 M에 대하여 $\overline{OM}=1$이라 할 수 있습니다. 그리고 구 T의 반지름 r에 대하여 $\overline{C_TM}=r$이므로 $\overline{C_TO}=\sqrt{r^2-1}$ 이 되어 $C_T\left(0,\ 0,\ \sqrt{r^2-1}\right)$입니다.

그러면 두 구의 중심간 거리에 대해 식을 세워보면

$$\overline{C_SC_T} = 1 + r = \sqrt{2+\left(\sqrt{r^2-1}+1\right)^2}$$

가 되고, 이를 계산해보면 마찬가지로 $r=\dfrac{5}{4}$가 나오게 됩니다.

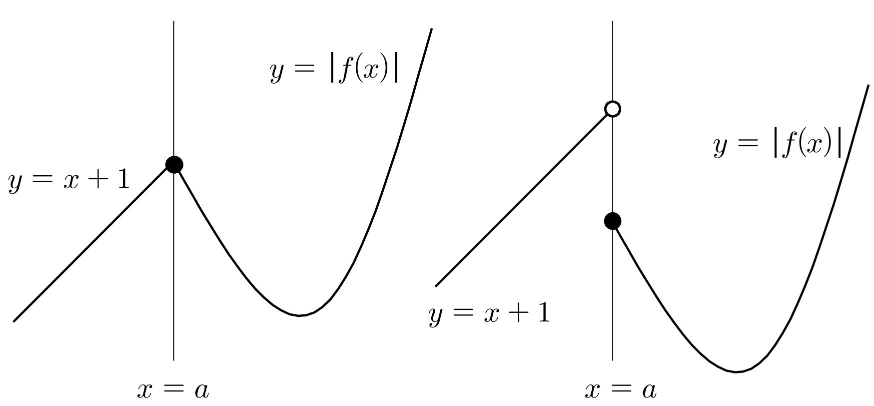
[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 19번]

19. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

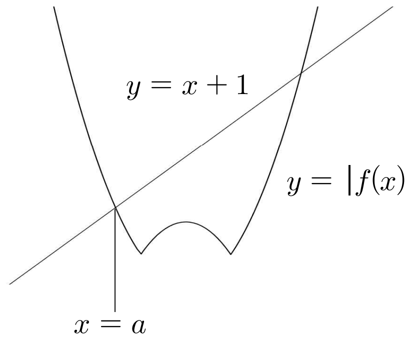
18. [대중교통 환승 해본 적 있나요]

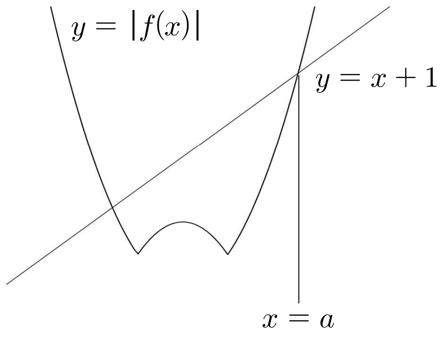
sol)
곡선 $y=g(x)$를 마치 하나의 경로로 생각하고서 x를 $-\infty$부터 ∞까지 움직여간다고 생각해봅시다. 처음엔 $x+1$이라는 경로를 따라가다가 $x=a$를 지나는 시점 경계로 $|f(x)|$라는 다른 경로로 옮겨가야 합니다.



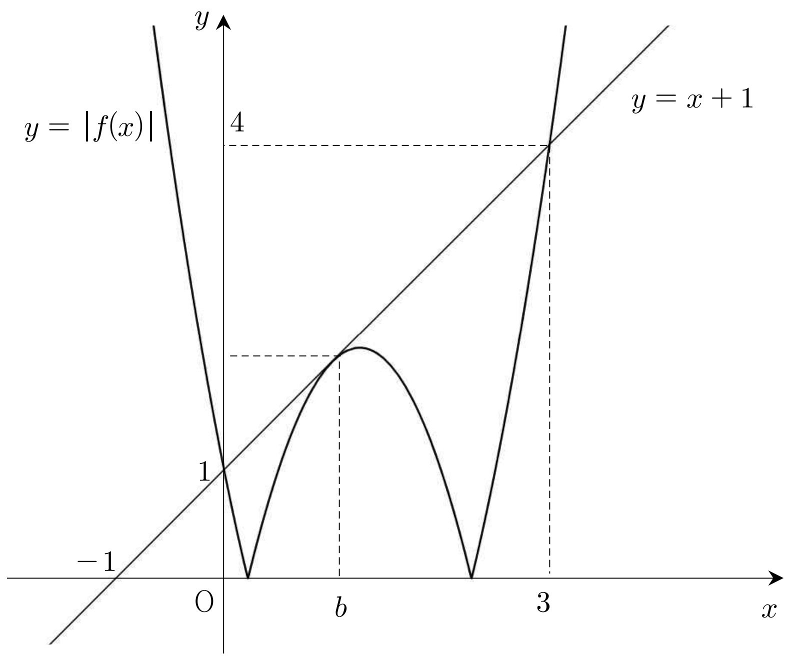
그런데 이러한 경로가 끊김없이 이어지려면 $a+1=|f(a)|$가 성립해야겠죠?

그런데 만약 두 개의 경로 $y = x+1$과 $y = |f(x)|$가 여러 개의 교점에서 만난다면 그 교점들의 x값이 모두 a가 될 수 있습니다.





$x < a$일 때는 $y = x+1$의 경로를 따라가다가 $x \geq a$부터는 $y = |f(x)|$의 경로를 따라감에 있어 다행히 연속성만 고려하면 될 뿐 미분가능성 여부는 상관없습니다.
문제에서는 그러한 a값이 $0, b, 3$으로 세 개 존재한다고 하였는데, 그러면 다음과 같은 상황이어야 할 것입니다. 다소 비약이 없다고 할 수는 없지만..



그러면 $f(x) = x+1$의 근이 $x = 0, 3$이므로

$f(x) - x - 1 = kx(x-3) \rightarrow f(x) = kx^2 - (3k-1)x + 1 \ (k > 0)$

이 되고, $y = x+1$에 $y = -f(x)$가 접하므로

$x + 1 = -f(x) \rightarrow kx^2 - (3k-2)x + 2 = 0$

$\rightarrow D = (3k-2)^2 - 8k = 9k^2 - 20k + 4 = 0$

$\rightarrow k = 2, \dfrac{2}{9}$

한편, 이차함수 $f(x) = kx^2 - (3k-1)x + 1$은 x축과 두 점에서 만나야 하므로 판별식이 다음 부등식을 만족해야 하고

$(3k-1)^2 - 4k > 0$

k 값의 후보 중에서 무연근을 걸러내기 위해 하나씩 대입해보면

$(3 \cdot 2 - 1)^2 - 4 \cdot 2 > 0$

로 $k = 2$는 성립하는 반면

$\left(3 \cdot \dfrac{2}{9} - 1\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{2}{9} < 0$

이므로 $k \neq \dfrac{2}{9}$가 됩니다. 즉, $k = 2$로 확정되므로 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$입니다. 고로, $f(6) = 72 - 30 + 1 = 43$이 나옵니다.

※ 이 문제를 보고 처음부터 이러한 아이디어를 엮어 나가기란 어려울 수 있지만 다음 기출을 머릿속에 넣어 두었다면 얘기는 달라지죠!

[2008년 06월 평가원 수리(가형) 10번]

10. 서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f, g)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$이면 $N(f, g) = 2$이다.
ㄴ. $N(f, g) = N(g, f)$
ㄷ. $h(x) = x^3$이면 $N(f, g) = N(h \circ f, h \circ g)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [대수적 관점 vs 기하학적 관점]

***sol*.1)**
수식으로만 풀어 보도록 하겠습니다.

$x - \dfrac{n}{x-3} \leq 3$

$\Rightarrow x - 3 \leq \dfrac{n}{x-3}$

$x < 3$이면 $(x-3)^2 \geq n$

$\rightarrow x - 3 \leq -\sqrt{n}$ 또는 $x - 3 \geq \sqrt{n}$

$\rightarrow x \leq 3 - \sqrt{n}$ $\quad \because x < 3$

$x > 3$이면 $(x-3)^2 \leq n$

$\rightarrow -\sqrt{n} \leq x - 3 \leq \sqrt{n}$

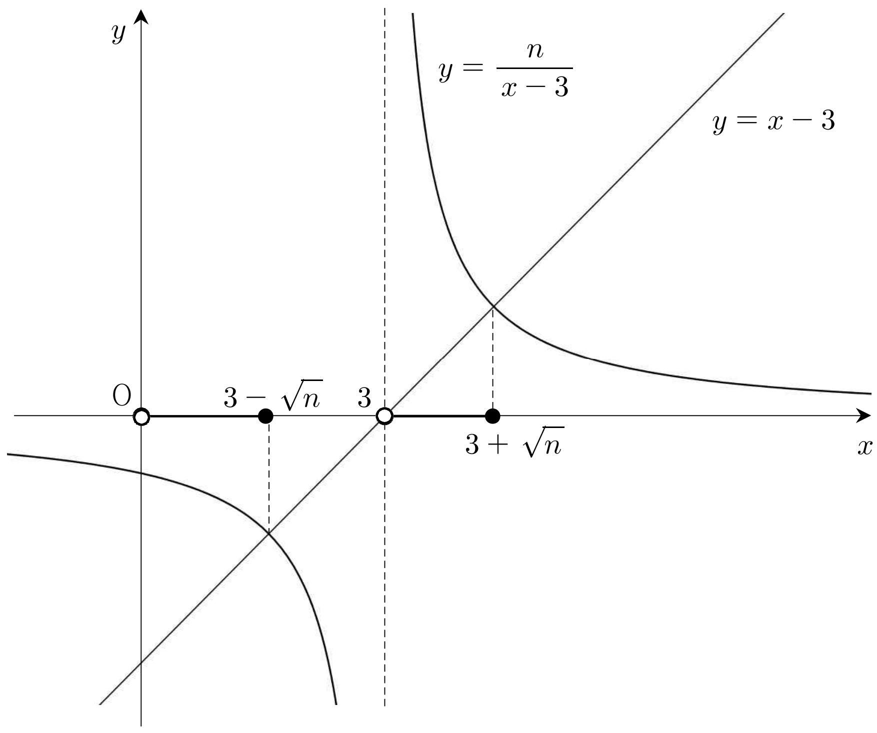
$\rightarrow 3 < x \leq 3 + \sqrt{n}$ $\quad \because x > 3$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 양의 정수 x의 개수는

$n = 1$일 때, $x = 1, 2, 4$로 3개
$1 < n < 4$일 때, $x = 1, 4$로 2개
$n = 4$일 때, $x = 1, 4, 5$로 3개
$4 < n < 9$일 때, $x = 4, 5$로 2개
$n = 9$일 때, $x = 4, 5, 6$으로 3개
$9 < n < 16$일 때, $x = 4, 5, 6$으로 3개
$n = 16$일 때, $x = 4, 5, 6, 7$로 4개

나머지 n값들에 대해서는 만족하는 양의 정수 x의 개수가 3개를 훌쩍 넘어가므로 더 이상 따지지 않아도 됩니다.
고로, $n = 1, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$의 9개가 존재합니다.

***sol*.2)**
주어진 부등식을 약간 변형한 $x - 3 \leq \dfrac{n}{x-3}$는 결국 직선 $y = x - 3$과 곡선 $y = \dfrac{n}{x-3}$의 관계로부터 해석할 수 있습니다. 그러니 이번에는 그래프를 이용하여 풀어보도록 하겠습니다.



만약 양의 정수 x에 대하여 $A_n=\{x|0<x\le 3-\sqrt{n}\}$과
$B_n=\{x|3<x\le 3+\sqrt{n}\}$이라 한다면

　i) $A_n=\{1,2\}$이고, $B_n=\{4\}$

　ii) $A_n=\{1\}$이고, $B_n=\{4,5\}$

　iii) $A_n=\phi$이고, $B_n=\{4,5,6\}$

으로 경우를 나눌 수 있습니다. 각각에 해당하는 n의 범위는

　i) $n=1$

　ii) $n=4$

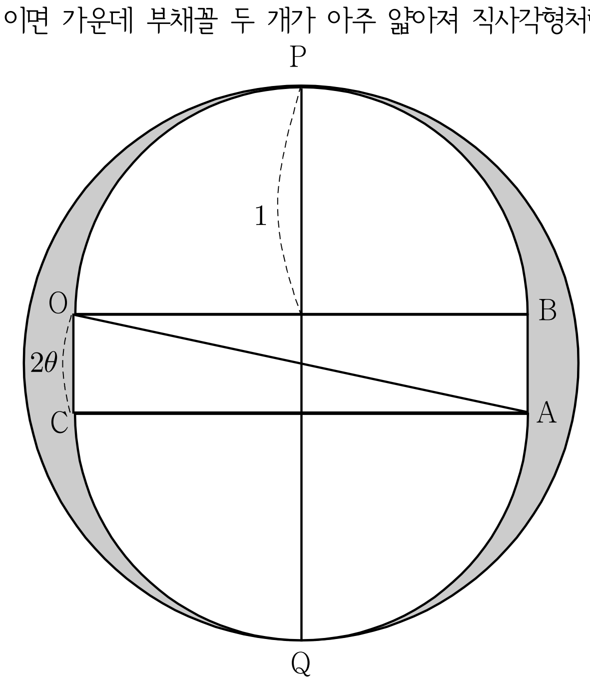
　iii) $9\le n<16 \rightarrow n=9,10,11,12,13,14,15$

가 되어 만족하는 n의 개수는 $1+1+7=9$가 됩니다.

20. [나꿍꼬또 난짱극 꿍꼬또]

***sol*.1)**

$\theta\to+0$이면 가운데 부채꼴 두 개가 아주 얇아져 직사각형처럼 볼 수 있기에

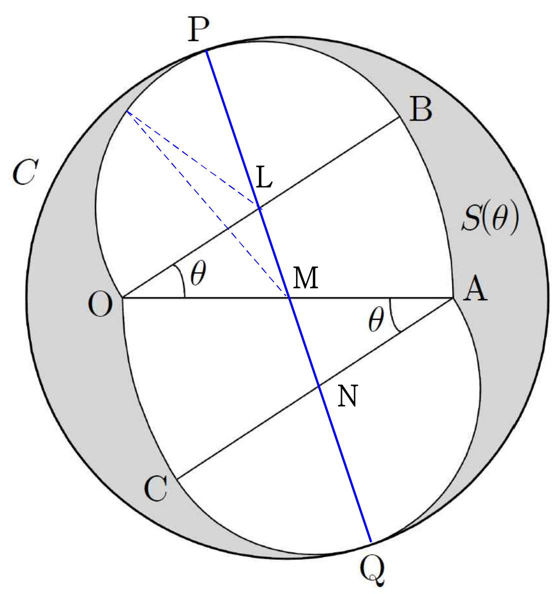


해당 넓이는 커다란 원에서 작은 반원 두 개와 직사각형 넓이를 뺀 형태로

$$S(\theta)\approx\pi(1+\theta)^2-(\pi+4\theta)=(2\pi+\pi\theta-4)\theta$$

고로, 답은 $2\pi-4=2(\pi-2)$인 ②번이 됩니다.

***sol*.2)**



먼저 언제 선분 PQ의 길이가 최대가 되는지를 파악하기 위해서 세 변 OB, OA, AC의 중점을 순서대로 L, M, N이라 하겠습니다. 그러면 세 점 L, M, N에 의해서 길이 2인 선분들의 길이가 절반으로 줄어들고, 삼각형 OML과 OAB는 길이가 1 : 2 닮음의 이등변삼각형들이고, 마찬가지로 삼각형 AMN과 AOC도 길이가 1 : 2 닮음의 이등변삼각형들입니다.
이때 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이가 최대가 되기 위해선, 반지름에 해당하는 선분 MP의 길이가 최대가 되어야 합니다. 점 M을 고정하면, 반원의 호 위를 움직이는 점 P에 대하여 뜬금없겠지만

$$\overline{\mathrm{MP}}\le\overline{\mathrm{ML}}+\overline{\mathrm{LP}}$$

이라는 삼각 부등식이 성립합니다. 따라서 반지름 MP의 최댓값은 위 그림과 같이 지름으로 선분 PQ를 잡을 때이며 계산해보면 $2\sin\dfrac{\theta}{2}+1$가 됩니다.
따라서,

$$S(\theta)=\pi\left(2\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2-\pi-4\theta$$
$$=\pi\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}+4\sin\frac{\theta}{2}\right)-4\theta=4\pi\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)-4\theta$$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot(0+1)-4=2(\pi-2)$가 나옵니다.

21. [Dynamic Mathematics]

***sol*)**

문자들이 복잡하게 얽히고 섥혀 있지만 차분하게 하나씩 보도록 하겠습니다.
출제자가 못 풀 문제를 냈을 리는 없으니 반드시 해법도 있겠죠?
우선 양수 t에 대하여 상용로그를 $\log t$라 하였을 때 그 지표를 $f(t)=[\log t]$라 하고, 가수를 $g(t)=\log t-[\log t]$라 할 수 있습니다.
그런데 (가) 조건에 의하여 $f(t)=[\log t]\ge 2^{n-1}$로 $\log t$의 지표가 2^{n-1} 이상이므로 $t\ge 10^{2^{n-1}}$이 됩니다. 여기다 n에 $1,2,3,\cdots$를 대입하였을 때 주어진 나머지 조건들까지 만족하는 t 값 중에서 가장 작은 자연수를 차례로 $a_1,a_2,a_3,\cdots$라 하여 수열 $\{a_n\}$을 정의한 것이네요!
잠깐 수험생의 관점에서 생각해보자면, (나) 조건에서 물어보고 있는 형식이 작년 9월 평가원 30번 문항과 아주 유사합니다. 그래서 얼른 삼각형의 세 꼭짓점 잡고 사선식을 통해 넓이를 구해서 부등식을 세우고 싶은 마음이 강렬하게 들만도 합니다.는 사실 제 얘기 ^^; 나쁘지 않아요, 그런 생각ㅎㅎ 말 나온 김에 해당 기출문제를 보면서 생각을 환기 해봅시다.

[2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
> $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$
> 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

하지만 넓이가 $\frac{1}{2}$보다 크다는 조건은 또 다른 평가원 기출문제와 유사합니다.

[2012년 06월 평가원 수리(가형) 30번]

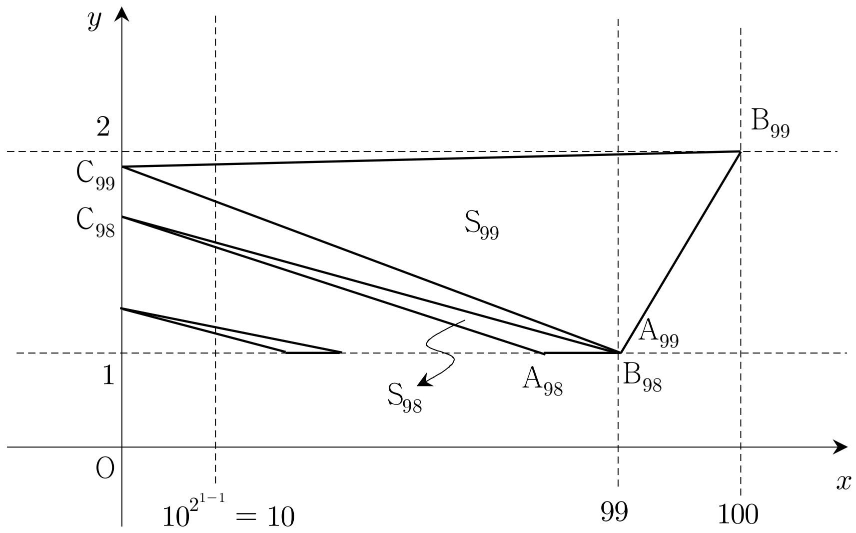
30. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

> (가) $a\geq 3$
> (나) 두 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같다.

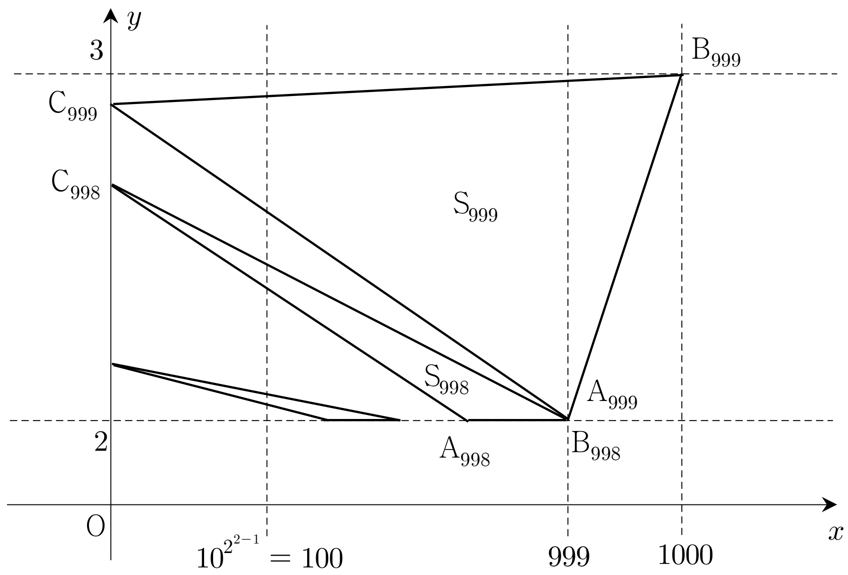
예를 들어 $f(5)=4$이다. $\sum_{n=4}^{30}f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

그리고 우리 문제는 두 번째로 제시한 문제와 아이디어가 더 가깝다고 봅니다. 등호 성립하는 순간은 발생하지 않고 확 넘어가는 상황을 다루는 면이 말이죠.
본격적으로 삼각형 ABC의 넓이를 구하기 전에 하나만 더 짚고 가겠습니다. 바로 $f(t)$와 $f(t+1)$입니다. 이는 각각 t와 $t+1$의 정수 부분 자리수와도 연관되어 있는데, 예를 들어 $10, 11, 12, 13, 14, 15, \cdots, 98, 99, 100$이란 수들을 보면 1씩 차이나는 수들 간에 정수 부분 자리수가 다른 경우는 오직 $99, 100$뿐이고 나머지는 모두 같습니다. 그러니 상용로그 취했을 때 지표도 같게 됩니다. 즉, $f(t)\leq f(t+1)$이긴 한데 $f(t)=f(t+1)$인 경우가 $f(t)<f(t+1)$인 경우보다 월등히 많다는 것입니다.
필요한 기본 개념 설명과 "60초 후에"는 생략하고 이제는 레시피를 공개하겠습니다. 어떻게 이런 생각을 하냐고 좌절하기 보다는, 이렇게도 풀 수 있다는 것 정도만 보고 넘어가는 것도 현명할 수 있습니다. 저도 제법 많은 시행착오 끝에 '정말로 이렇게까지 풀어야 하나?' 싶을 정도로 해서 풀었네요. 혹시나 여러분의 더 좋은 풀이 있으면 알려주세요 ^^;

먼저 (가) 조건으로부터 이끌어낸 $t\geq 10^{2^{n-1}}$를 봅시다. 사실 이 조건이 아주아주 중요한 단서가 됩니다. 그리고 삼각형 ABC를 좌표평면상에 나타내기 위해 $f(t)=[\log t]$ 정도만 이용하고, $g(t)=\log t-[\log t]$는 아주 조금 이용할 것입니다. 두 그래프의 개형을 그리는 법은 다 아시죠? 그리고 기존 기출문제들과 달리 다루는 수들의 스케일이 훨씬 크기 때문에 그래프를 그릴 때 적절한 왜곡도 불가피합니다.



a_1을 먼저 구하기 위해서 $n=1$을 대입해봅시다. 그리고 $t=m$일 때 $\mathrm{A, B, C}$를 편의상 $\mathrm{A}_m, \mathrm{B}_m, \mathrm{C}_m$이라 하고, 이 삼각형의 넓이를 S_m이라 하겠습니다. 보통은 $f(t)=f(t+1)$이기에 $\overline{\mathrm{AB}}$는 x축에 평행하며 길이가 1인 삼각형의 밑변이 됩니다. 여기서 t가 차곡차곡 증가한다면 $\overline{\mathrm{AB}}$는 어떻게 움직이는지를 포착해야합니다! $n=1$이니 $t=10^{2^{1-1}}=10$ 근처부터 출발을 해야 하겠죠? 또, $y=[\log t]=1$ 상에서 오른쪽으로 한 칸씩 이동합니다. 한편, C_t은 점 $(0,1)$에서 출발하여 $(0,2)$까지 조금씩 증가하게 됩니다. 정확하게는 $t=11, 12, 13, \cdots, 98$일 때 좌표가 $\mathrm{C}_t(0, 1+\log t-[\log t])$입니다. 그렇다고 이걸 열심히 계산할 일은 결코 없을테니 진정하세요!
하지만 삼각형의 밑변의 길이가 1이니 높이가 아무리 커져봤자 S_t는 $\frac{1}{2}$을 넘지 못합니다. 역동적으로 삼각형 $\mathrm{S}_{11}, \mathrm{S}_{12}, \mathrm{S}_{13}, \cdots, \mathrm{S}_{98}, \mathrm{S}_{99}$를 움직여가며 상상해보세요! 이 부분이 이 문제의 하이라이트입니다.
그러다가 $t=99$가 되는 순간 $f(t)=1, f(t+1)=2$가 되어 S_{99}가 $\frac{1}{2}$보다 훨씬 커지게 됩니다. 아주 비약적으로 말이죠. 여기서 행여나 S_{99}를 사선식 등을 이용하여 구해도 나쁘지는 않지만 시간을 너무 많이 쓰게 됩니다. 대신 점 $\mathrm{A}_{99}(99, 1)$의 위치를 점 $(100, 1)$로 옮겨서 S_{99}의 넓이를 대략적으로 어림잡아봐도 50 남짓한 수가 됩니다. 따라서, $a_1=99$가 됩니다.

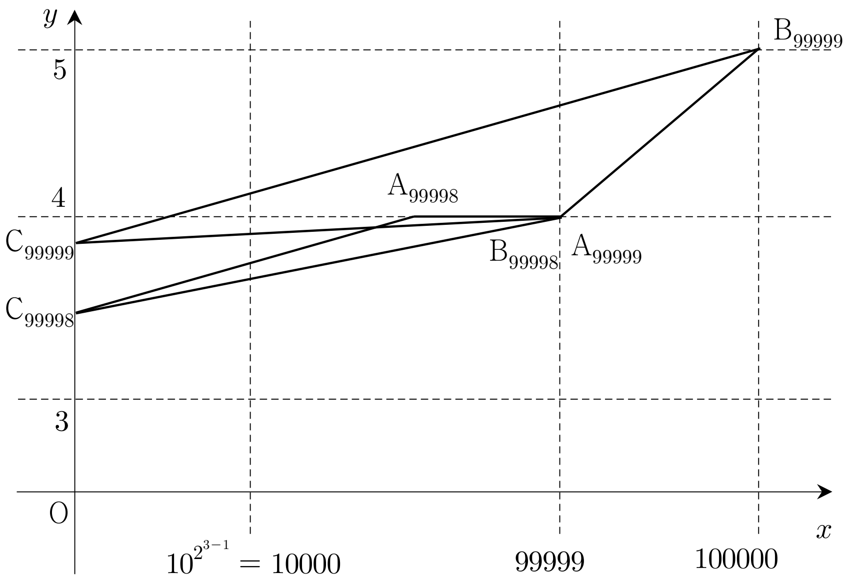


다음으로 a_2를 구하기 위해 $n=2$를 대입한 상황을 생각해보면 위와 같을 것입니다. 그러면 출발점의 x값이 $10^{2^{n-1}}=100$이 되고, 삼각형의 밑변에 해당하는 $\overline{\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t}$는 길이 1을 유지하면서 $y=2$ 상에서 오른쪽으로 한 칸씩 움직입니다. 한편, y축 상에 위치한 점 C_t은 점 $(0,2)$ 쪽에서 $(0,3)$까지 로그적으로, 정확하게는 y좌표가
$2+\log t-[\log t]$ $(t=101, 102, \cdots, 998)$

를 만족하면서 움직입니다. 이미 눈치 채신 분들도 있겠지만 이렇게 t값의 범위를 잡아 주는 것도, 문제에 주어진 $f(t) \neq n + g(t)$라는 조건을 염두에 둔 것입니다! 어쨌든, $n=1$일 때와 유사한 패턴으로 지금도

$$0 < S_{101} < S_{102} < \cdots < S_{998} < \frac{1}{2}$$

이다가 $\frac{1}{2} < S_{998} \fallingdotseq 500$이 되므로 $a_2 = 999$임을 알 수 있습니다.



$n=3$을 대입해보니 뭔가 변화가 보이기 시작하네요. 점 C_t가 $\overline{A_tB_t}$보다 낮게 존재하게 되네요! 그리고 $t = 10000, \cdots, 99998$까지 삼각형을 움직여가는 동안

$$\frac{1}{2} > S_{10000} > S_{10001} > S_{10002} > \cdots > S_{99998} > 0$$

으로 점점 감소는 하지만 $\frac{1}{2} < S_{99999} \fallingdotseq 50000$로, 두 점 A_t, B_t의 높이가 달라지는 순간에 주어진 조건을 만족하는 것은 여전히 만족하게 됩니다.
따라서, $a_3 = 99999$이고 미리 계산해두자면

$$\frac{a_1}{a_3 - a_2} = \frac{99}{99999 - 999} = \frac{1}{1000}$$

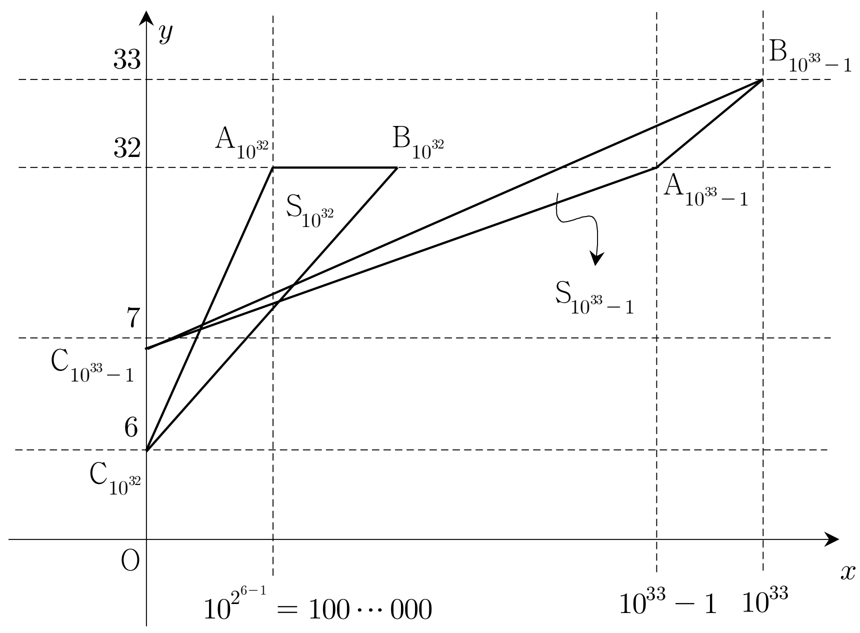
이 됩니다. 이제 뒤에 남은 시그마 값만 구하면 되겠네요!
그런데 이런 일이 일어나는 까닭에는 여러 요인이 있겠지만, $f(t), f(t+1)$과 $n + g(t)$의 대소관계에서 기인한 것이 가장 크다고 봅니다. 왜냐하면 나머지 경우들인 $n = 4, 5, 6, 7$에서는

n	$n+g(t)$의 범위	$f(t)$의 최솟값
4	4 이상 5 미만	$2^{4-1} = 8$
5	5 이상 6 미만	$2^{5-1} = 16$
6	6 이상 7 미만	$2^{6-1} = 32$
7	7 이상 8 미만	$2^{7-1} = 64$

위 표에서 볼 수 있듯, 만약 앞서 그랬던 것처럼 좌표평면상에 찍어보면 $\overline{AB}$ 값은 두 점의 y값이 같을 때 1, 달라도 $\sqrt{2}$가 되겠지만, 삼각형 ABC의 높이에 해당하는 부분은 1을 훌쩍 넘어버리기 때문에 각 n마다 시작점이 되는 t값이 바로 a_n이 됩니다. 따라서

$$a_4 = 10^{2^{4-1}}, a_5 = 10^{2^{5-1}}, a_6 = 10^{2^{6-1}}, a_7 = 10^{2^{7-1}}$$

이 되어 $\sum_{n=4}^{4} \log a_n = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 120$이 됩니다.
그래도 말만 하고 넘어가면 아쉬우니까 $n=6$인 경우만 관찰해봅시다.
그림도 많이 그려야 하고 수식도 끈질기게 붙잡고 있어야 하는지라 여기까지 보고 계시는 분들이 얼마나 될지.. ㅠㅠ 손 한 번 흔들어 주세요!



보다시피 $t = 10^{2^{6-1}} = 100000000000000000000000000000000$만 하더라도 그때의 삼각형 밑변의 길이는 1이더라도 높이가 $32 - 6 = 26$이기 때문에 조건을 만족하게 됩니다.
이러한 연유로, $n = 4, 5, 6, 7$일 때 $a_n = 10^{2^{n-1}}$이므로 $\log a_n = 2^{n-1}$이니

$$\left(\frac{a_1}{a_3 - a_2}\right)\sum_{n=4}^{7} \log a_n = \frac{1}{1000} \times 120 = \frac{3}{25}$$가 답이 됩니다.

※ 개수 세기 문제가 13 수능 이후로 잠잠한가 싶더니 올해 6월 평가원 문제에 보기 좋게 등장하였습니다. 평가원이 판도라의 상자를 연 셈입니다.
사실 문과 시험에만 등장한 킬러 문제들 중에는 제법 골치 아픈 지수로그 개수 세기들이 있습니다. 직접 하나씩 찾아서 풀어보신 분들도 계시겠지만 때마침(??) 누군가가 이런 기출 문제들만 모아서 만든 자료가 있으니 필요하신 분은 참고 하세요 ㅎㅎ
☞ http://cafe.naver.com/pnmath/611695

22. [중복조합]

sol)
∴ $_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$
※ 한 번씩 $_3H_4$인지 $_4H_3$인지 헷갈릴 때가 있는데, 문제에서 빠짐없이 등장하는 멘트인 "중복을 허용하여"를 지우고 식을 세워보세요. 그러면 조합(Combination)적으로 생각해야 하니 $_3C_4$가 되어야 할테고, 사실은 중복조합이니 $C \rightarrow H$로 바꿔주면 됩니다.

23. [독립시행의 확률]

sol)
주사위를 3번 던져서 홀수의 눈이 홀수 번 나올 수 있는 횟수는 $1, 3$입니다.

홀수의 눈이 1번 나올 확률은 $_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$이고,

홀수의 눈이 3번 나올 확률은 $_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$이므로,

이를 모두 취합하면 $p = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$이므로 $80p = 40$이 됩니다.

24. [조건의 재구성]

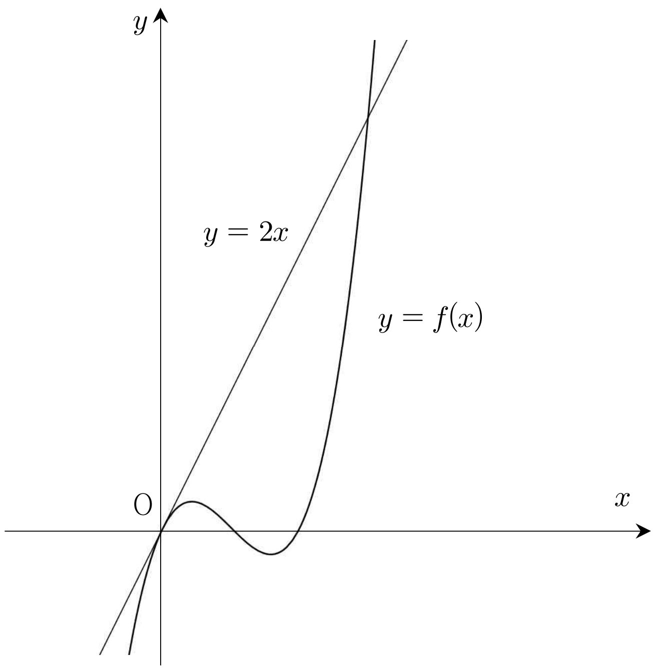
$sol)$

직선이 두 점 $(-1,\ -2)$과 $(0, 0)$을 지나므로 식을 세우면 $y=2x$가 됩니다. 이때 이 직선이 삼차함수 $f(x)$와 $x=0$에서 접하면서 만나고, $x=3$에서 접하지 않으면서 만나기 때문에

$f(x)-2x=1\cdot x^2(x-3)$

이라 세울 수 있습니다. 따라서 $f(4)=8+16=24$가 답이 됩니다.

그래프로 그리자면 다음과 같습니다.



[2004년 06월 평가원 수리(가형) 10번]

10. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(x_1)=h(x_2)$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$가 존재한다.

ㄴ. $h(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

ㄷ. 부등식 $|h(x)|<\dfrac{1}{100}$의 해는 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

25. [가장 좋은 풀이란]

$sol.1)$

$\theta+\dfrac{\pi}{6}$을 한 덩어리로 보고 정리해보면

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

가 되어 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ 또는 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$이 됩니다. 삼각방정식의 일반해를 이용하면 $\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\cdots$ 또는 $\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\cdots$가 되는데, $0\le\theta<2\pi$의 범위에 속하는 것들만 취합하자면

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{3}\pi$$

가 되어 $p+q=10$이 답이 됩니다.

$sol.2)$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{\pi}{3}-\theta=n\pi+(-1)^n\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \cdots$$

$sol.3)$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=0$$

$$\rightarrow\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{3\theta}{2}=0$$

$$\rightarrow\ \cdots$$

※ 뜬금없지만 지금까지 다룬 문제들만 봤을 때 예상 1등급컷은 21번으로 인해 96점이라 예상 됩니다. 뒤에 얼마나 더 어려운 문제들이 나오느냐에 따라 더 내려가겠죠!

26. [모비율에 관해 얕게 묻는 문제인지 깊게 묻는 문제인지]

$sol)$

$\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.475$를 만족하는 k에 대하여

문제에는 비록 안 나와 있지만 대략 $k=1.96$인거 알죠?

$$[a-c,a+c]=\left[\frac{1}{10}-k\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{n}},\ \frac{1}{10}+k\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{n}}\right]$$

$$[b-c,b+c]=\left[\frac{1}{5}-k\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{n+70}},\ \frac{1}{5}+k\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{n+70}}\right]$$

라고 일단 신뢰구간을 잡아줄 수 있고,

$$k\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{n}}=k\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{n+70}}\ \rightarrow\ \frac{3}{2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+70}}$$

$$\rightarrow\ \cdots\ \rightarrow\ n=90$$

그리고 $a=\dfrac{1}{10},b=\dfrac{1}{5}$이므로 $n(a+b)=90\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}\right)=27$이 답입니다.

27. [계차가 $a,b,a,b,\cdots$ 꼴인 수열의 비밀]

$sol)$

함수를 분석하기 위해 미분을 하였듯이, 수열을 분석하기 위해서도 미분을.. 하면 안 되죠. 수열을 분석하기 위해서는 나열 하면서 그 계차를 파악해보면 됩니다. 그래도 안 보이면 계차의 계차를 분석 해보면 되구요. 차분하게

하나씩 나열하되 계차를 관찰해봅시다. 가령 $b_1 = b$라 하면

$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $\cdots$

$\{b_n\}$: b, $1-b$, b, $1-b$, b, $\cdots$

계차 단계에서 두 종류의 수 $b, 1-b$가 교대로 나오는 꼴이 됩니다. 이러한 수열 $\{a_n\}$은 홀수 번 째 항들과 짝수 번 째 항들 간에 각각이 공차가 같은 등차수열을 이루면서 마치 지퍼처럼 포개어져 있는 형태입니다. 왜냐하면 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 공차는 $b+(1-b)=1$이고, 수열 $\{a_{2n}\}$의 공차도 $(1-b)+b=1$이기 때문이죠.

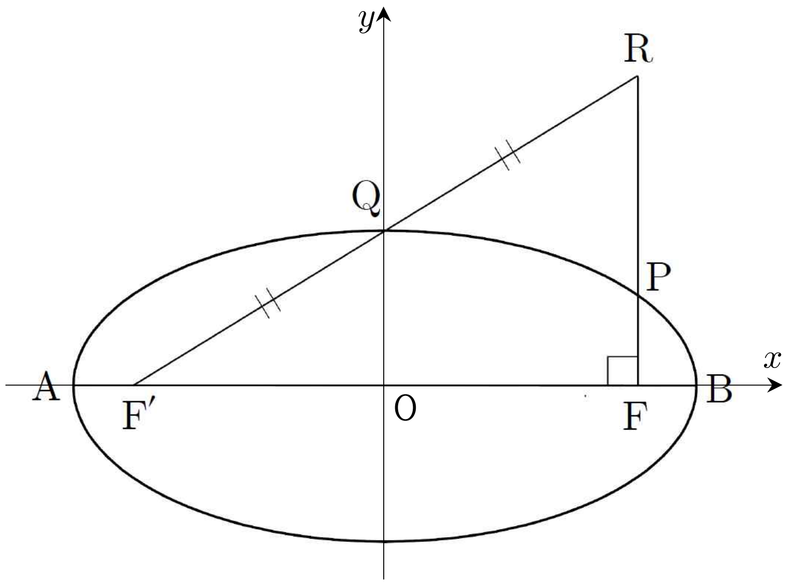
"이보시오, 출제자 양반 이런건 교과서에 안 나오지 않소?"
하고 생각하시는 분들은 아마 없겠지만 이미 기출에, 특히 교육청에 걸핏하면 나왔었습니다. 어쨌든 $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$은 등차수열을 이루고 등차중항 개념을 거듭 적용해보면 $a_6 = \dfrac{100}{5} = 20$이 됩니다. 그런데

$$a_6 = a_2 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = a_2 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5)$$

이므로 $a_2 = 20 - 2 = 18$이 답이 됩니다.

28. [여기까진 매너로 해드릴게]

sol)
점 Q에서 타원의 장축 AB에 수선을 내려보면 변 F′Q와 변 F′R을 빗변으로 하는 길이비가 1 : 2인 닮음 삼각형이 보입니다. 따라서 점 Q는 AB의 중점이 원점이 되도록 좌표를 잡았을 때 y축 상에 존재해야 합니다.



그러므로 닮음을 고려하면 $Q(0,2)$가 되고, 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 \ \ (a > 2)$$

라 두었을 때, $c^2 = a^2 - 4 (c > 0)$에 대하여 점 $P(c, 1)$가 타원 위에 있으므로

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$$

을 얻고, 식들을 연립해보면 $a^2 = 16, c^2 = 12$가 되어 장축의 길이는 $2a = 8$임을 알 수 있습니다.

29. [공도벡 킬러, 풀어야 한다!]

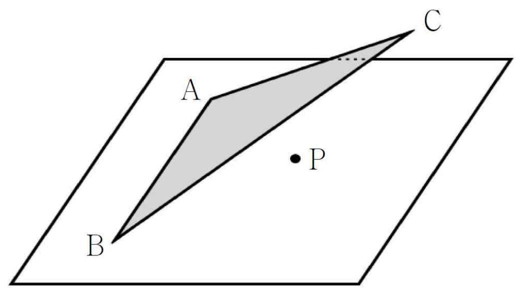
sol)
먼저 난만한님의 과거 출제 성향을 봅시다. 벌써 2년 다 된 문제네요.

[2014학년도 이해원 직전 모의고사 B형 21번]

21. 공간상에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 한 모서리 AB가 평면 α에 포함되어 있을 때, 평면 α 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P에서 선분 AC까지의 거리와 선분 BC까지의 거리가 모두 2이다.
(나) 직선 AC와 직선 BP는 수직이다.

선분 BP와 평면 ABC가 이루는 각을 θ라 할 때, $\operatorname{cosec}^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

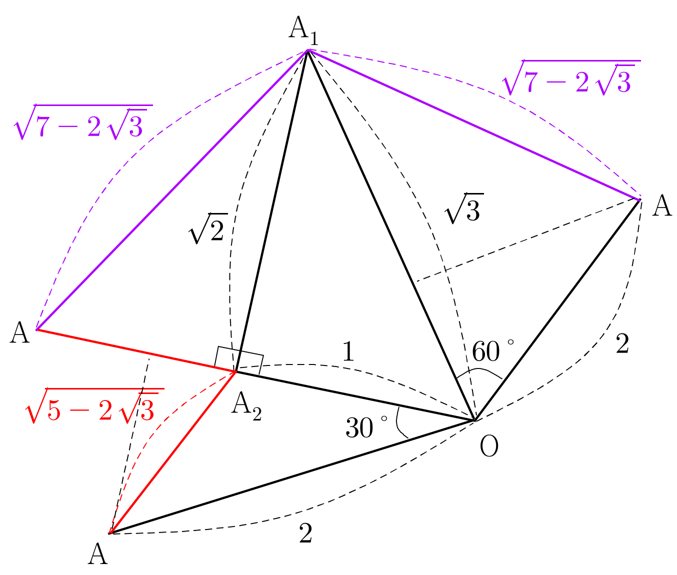
삼각형 ABC를 밑변으로 보면 정삼각뿔임은 섣불리 보장할 수 없어도 (가) 조건에 의해 어느 정도 대칭성이 존재하는 삼각뿔임은 알 수 있습니다.
그런데 지금 저렇게 뒤집어진 그림 상태에서는 보조선을 긋기도 힘들고 입체의 파악도 잘 안 되지만, 삼각형 ABC가 완전하게 밑면에 오도록 입체를 다시 놓으면 쉽게 풀리는 문제였죠!
이번 문제도 마찬가지입니다. 그림 상 A는 보이지 않지만 좌표는 가르쳐 주었습니다. 이때 네 점 O, A, A_1, A_2는 하나의 사면체를 이루고, 때마침 $\overrightarrow{OA}$가 평면 $y + \sqrt{3}z = 0$에 수직하기 때문에 모서리 OA를 회전 축삼아 사면체 OAA_1A_2가 뱅글뱅글 돌아가고 있는 상황입니다. 그리고 이때 삼각형 OAA_1의 평면 $z=1$ 위로의 정사영 넓이의 최댓값을 물어보고 있네요.
따라서, 사면체 OAA_1A_2를 조금 더 자세하게 파악하는 것이 우선입니다.
주어진 조건들을 보면 삼각형 OA_1A_2가 어떻게 생겼는지 알 수 있습니다.
(나) 조건은 약간 낚시가 섞여있는데

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA_k} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta_k = 2|\overrightarrow{OA_k}|\sin\frac{k}{6}\pi \ \ (k=1,2)$$

이므로 $|\overrightarrow{OA}| = 2$이고, $\cos\theta_k = \sin\dfrac{k}{6}\pi \ \ (k=1,2)$가 됩니다. 즉,

$$\cos(\angle AOA_k) = \sin\frac{k}{6}\pi \ \ (k=1,2)$$

로부터 $\angle AOA_1 = \dfrac{\pi}{3}$과 $\angle AOA_2 = \dfrac{\pi}{6}$임을 알 수 있습니다. 이로서 삼각형 OA_1A_2와 OAA_1, OAA_2가 각각 어떻게 생겼는지 알 수 있게 되었는데, 한 번에 사면체 OAA_1A_2를 그리는 대신에 다음과 같이 전개도로 펼쳐서 살펴보겠습니다!

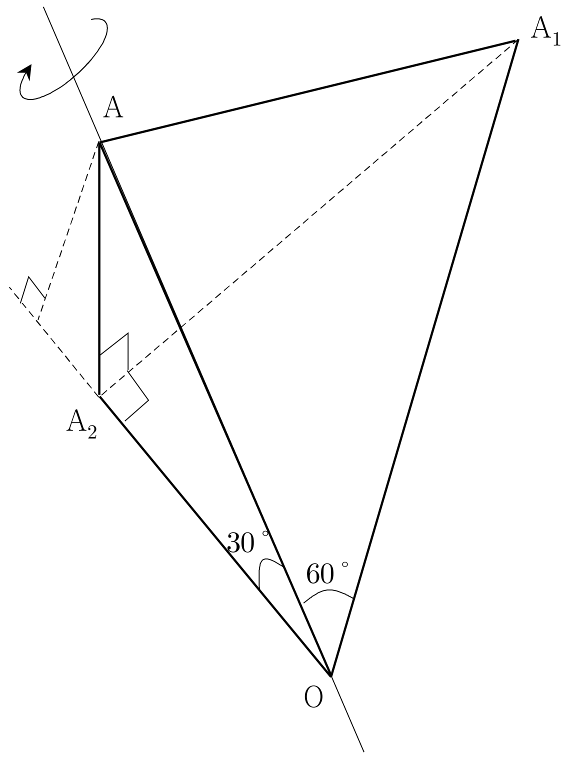


이러한 전개도를 그리는 순서는 다음과 같습니다.

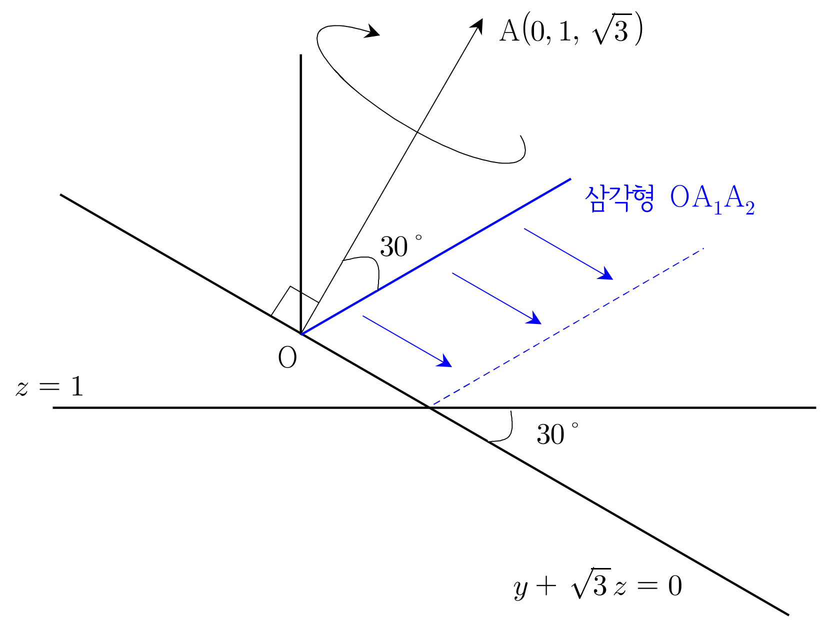
먼저 세 변 길이를 모두 알고 있는 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$를 사면체의 밑면으로 삼아 그리고서, 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기를 모두 알고 있는 삼각형 $\mathrm{OAA_1}, \mathrm{OAA_2}$를 그리되, 제이코사인정리와 수선 등의 길이를 이용하여 그것이 예각 삼각형인지 둔각 삼각형인지 판단합니다.

그래서 삼각형 $\mathrm{AA_1A_2}$도 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$의 변 $\mathrm{A_1A_2}$ 위에 붙여주는데, 여기서 까다로운 것이, 삼각형 $\mathrm{AA_1A_2}$의 세 변의 길이를 보고서 피타고라스 정리가 성립하는지 캐치하는 것입니다. 그러면 $\angle \mathrm{AA_2A_1} = 90^\circ$가 되어 펼쳐진 전개도에서 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$를 삼각뿔의 밑변 삼아 접어서 사면체를 만들어주면 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발은 반직선 $\mathrm{OA_2}$ 위에 놓이게 됩니다. 이로서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$가 이루는 예각이 $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$임을 알 수 있습니다.

그런데 아까도 언급했던 것처럼 사면체 $\mathrm{OAA_1A_2}$는 두 꼭짓점 O, A만 좌표공간에 고정된 채 나머지 두 점 $\mathrm{A_1, A_2}$는 사면체의 길이를 유지하며 회전하고 있는 모습입니다. 그러면서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$가 이루는 각도 유지하면서 말이죠.



그런데 하필이면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 평면 $y+\sqrt{3}z=0$의 법선벡터와 평행합니다!
따라서 이를 단면화하면 다음과 같을 것입니다.



이때 정사영하기 전의 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$는 옆에서 바라보면 선분으로 보이는 모습 두 경우만 나타냈습니다. 그러면 정사영 내리는 평면이 $z=1$이므로 정사영의 넓이의 최댓값이 발생하기 위해선 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$와 평면 $z=1$이 이루는 예각의 크기가 최소가 되어야 합니다.

그런데 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$와 평면 $y+\sqrt{3}z=0$이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$이고, 두 평면이 이루는 예각의 크기는 법선벡터의 내적으로 유도한 코사인값이 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이기에 30°이므로 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$와 평면 $z=1$이 이루는 예각의 크기의 최솟값은 $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$가 됩니다. 고로, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$이므로 $80a^2=30$이 됩니다.

※ 최근 정사영 문제들이 많이 진화하였는데, 최신 문제는 한 평면과 이루는 일정한 도형이 또 다른 고정된 벡터와 이루는 각의 크기를 묻는 문제로 다음과 같은 대표 기출문제가 있습니다. 이것 말고도 수많은 기출이 녹아있었지만

[2011년 11월 대수능 수리(가형) 21번]

21. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
> (나) 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

※ 수식에 의존한 다른 풀이들도 있을 텐데 여기서는 생략합니다.

30. [아직 풀지도 않았지만 더욱 더 격렬하게 안 풀고 싶다]

sol)

포만한 수학 연구소

요즘 이런 형식의 문제들이 자주 보이는데 그 뿌리를 찾아봅시다.

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 29번]

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은? [4점]

> (가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$
> (나) $0<a<b<2$이면 $f'(a) \le f'(b)$이다.
> (다) 구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$
④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

[2014년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

[2016학년도 06월 리듬농구 모의평가 수학 영역(B형) 30번]

30. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재한다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 $f(n)=2n$이다.
> (다) 모든 정수 n에 대하여 구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수 그래프의 일부이다.

$3\int_0^{11} f(x)dx$의 최댓값을 구하시오. [4점]

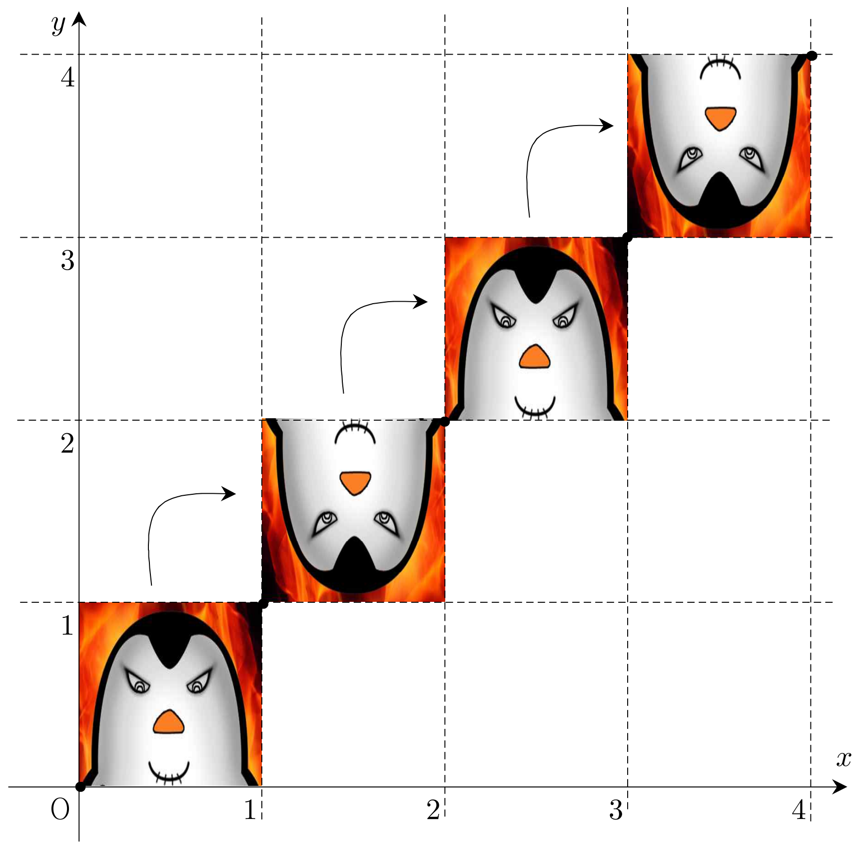
하나같이 특정 조건들을 만족하는 함수의 개형들 중 정적분 값의 최댓값이나 최솟값을 물어보는 문제들입니다. 2009년 무렵엔 삼차함수나 사차함수의 개형을 추론하여 유일한 함수를 찾는 문제들이 어김없이 미분 킬러문제로 나왔었고, 조금 지나서는 초월함수의 개형을 추론 하는 문제들이 2012년 무렵에 나왔었습니다. 그리고 이번에는 평가원에서 미적분 킬러 문제로서 이번 6월 평가원에는 이런 문제를 제시하였습니다. 여담이지만 6월 대비 리듬농구 모의고사는 이번 6월 평가원 킬러 문항을 적중했다 해도 과언이 아닙니다.

[2015년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

> (가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
> (나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
> $f(k+t)=f(k)\ \ (0<t \le 1)$
> 또는
> $f(k+t)=2^t \times f(k)\ \ (0<t \le 1)$
> 이다.
> (다) 열린 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

아마도 이런 경향을 반영하여 등장한 것이 이번 30번 문제가 아닐까 합니다. 저마다의 접근법을 준비해둔 것이 있겠지만 제 경험상 주어진 조건들을 만족하는 예시가 되는 상황을 일단 하나 먼저 찾는 것이 상당히 도움이 되었습니다. 그런 다음 연속성이나 미분가능성등과 같은 조건들을 고려하여 정적분 값이 최대 혹은 최소가 되는 상황으로 보정하자는 문제해결 전략이죠. 그러니 직관에 기대어 먼저 (가), (나) 조건을 만족하는 예를 찾아 내고 싶지만 지금은 최대한 엄밀하게 직관을 경계하고서 풀어보겠습니다.



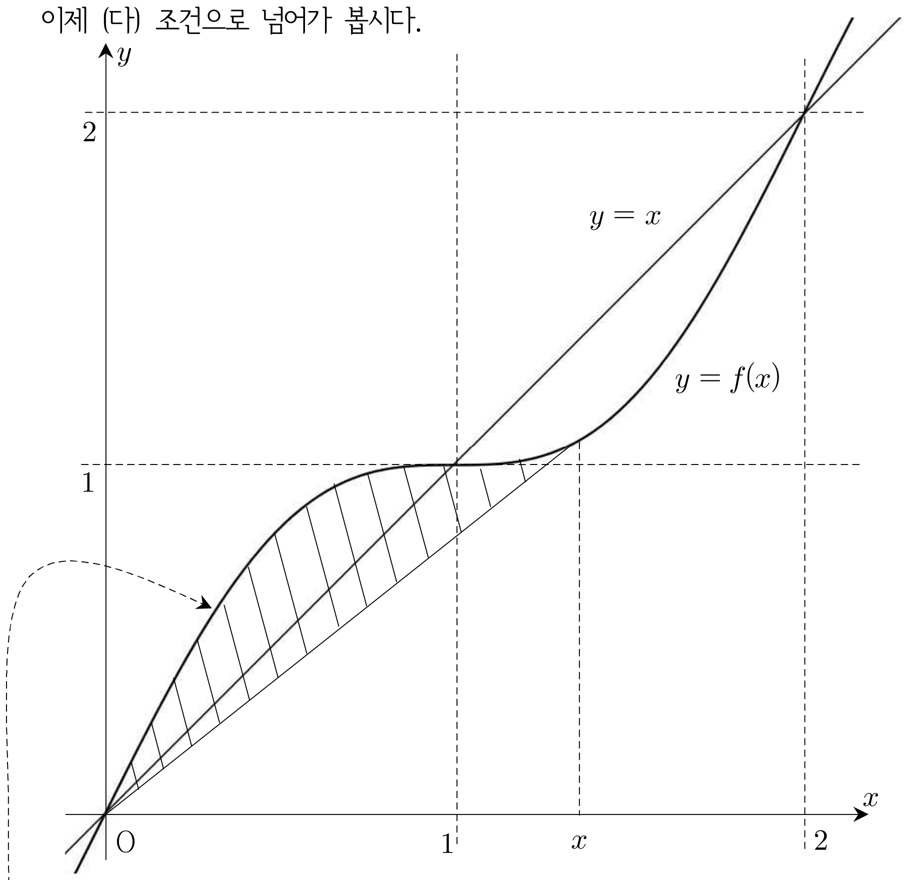
우선 $f(x)$는 모든 정수 n에 대하여 점 (n, n)을 항상 지나야 합니다.
닫힌 구간 $[0, 1]$에서 삼차함수 부분의 개형을 S라 하면, $f(x)$는 점 $(1, 1)$ 대칭이므로 닫힌 구간 $[1, 2]$에서는 S를 뒤집은 개형으로 나타날 것입니다.
다시, $f(x)$는 점 $(2, 2)$ 대칭이므로 닫힌 구간 $[2, 3]$에서는 S를 뒤집은 개형을 다시 뒤집은 개형으로 S로 그려져야 할 것입니다. 이런 식으로 전 좌표영역을 S 혹은 S를 뒤집은 개형으로 채워 나가다보면 닫힌 구간 $[2n, 2n+1]$에서는 S의 개형이, 닫힌 구간 $[2n+1, 2n+2]$에서는 S를 뒤집은 개형이 반복될 것입니다.
따라서, 이러한 대칭성에 근거하면 구해야 하는 정적분 값 중에서도

$\int_1^3 f(x)dx = 2 \times 2 = 4$를 만족하기에 $\int_0^1 f(x)dx$의 최솟값 상황을 구하라는 문제로 귀결됩니다. 그래프로 보아도 자명하지만 수식으로 보이자면,

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 \{4 - f(4-x)\}dx \quad \because f(x)+f(4-x)=4 \\ &= \int_1^2 f(x)dx + 4 - \int_2^3 f(4-x)dx \quad 4-x=t \\ &= 4 + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^1 f(t)dt = 4\end{aligned}$$

가 됩니다.

이제 (다) 조건으로 넘어가 봅시다.



예를 들어 위와 같이 $f(x)$를 잡았을 때

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$$

가 성립합니다. 굳이 그림으로 안 나타내도 되겠죠?

따라서 이를 이용하여 수식을 보기 좋게 바꾸면

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^{f(x)} g(t)dt\right| &= \left|2\int_0^x f(t)dt - xf(x)\right| \\ &= 2\left|\int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}xf(x)\right|\end{aligned}$$

가 됩니다. 그런데 이 함수 식은 모든 정수 k에 대하여 $x=k$에서 미분가능하다고 하였는데, $f(x)$의 대칭성으로 인하여 개형의 한 마디 끝에 해당하는 $x=0$과 $x=1$에서의 미분가능성만 보장되어도 충분합니다.

편의상 $y = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}xf(x)$라 하였을 때 $x=k$에서 함숫값이 항상 0이 되는지 확인해봅시다.

$k=1$이면 $y = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}f(1)$이 되는데, 삼차함수 부분이 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 대칭이 아닌 이상 0이 되지 않습니다. 만약 삼차함수 부분이 변곡점으로 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$를 가진다면 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$이 될 것입니다. 여기서 최솟값이 발생한다면 $8a = 8\left(\frac{1}{2}+4\right) = 36$이 답이 되겠지요. 하지만 이는 잠시 보류해두고 $\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}f(1) \neq 0$인 경우도 따져보겠습니다.

만약 $\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}f(1) \neq 0$이면 $x=1$ 좌우에서 그래프 개형이 접히는 상황이 일어나지 않으므로 $x=1$에서는 미분가능성을 따지지 않아도 됩니다. 마치 항상 양수값만 취하는 미분가능한 함수에 절댓값을 취해도 그래프 개형이 변화가 없는 것처럼요!

다음으로 $k=2$인 경우를 보면 $f(x)$의 점 대칭성으로 인해

$$\int_0^2 f(t)dt - \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot f(2) = 0$$

임은 자명합니다. 그렇다면 $x=2$에서 함수 $y = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}xf(x)$의 미분계수가 0이 되어야 합니다! 왜냐하면 $x=2$에서 미분계수를 $\pm m$이라 하면 $y = \left|\int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}xf(x)\right|$는 $x=2$에서 좌미분계수가 $\mp m$이고 우미분계수가 $\pm m$이 되기에, 여전히 $x=2$에서 미분가능하기 위해선 $\mp m = \pm m$, 즉 $m=0$이 되어야 하기 때문입니다.

그러니 이젠 계산을 통해 직접 구해봅시다.

$$y' = f(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}xf'(x) \ \rightarrow \ \frac{1}{2}f(2) - f'(2) = 1 - f'(2) = 0$$

그런데 $f'(2) = f'(0)$이므로 $f'(0) = 1$이 되어야 합니다. 그러면 $f(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 1]$에서의 삼차함수 부분을

$$\begin{aligned}f(x) - x &= x(x-1)(px+q) \\ &= p(x^3 - x^2) + q(x^2 - x) \ \ (0 \le x \le 1)\end{aligned}$$

이라 하였을 때, $f'(0) = 1$로부터 파생되는 p, q의 관계와, $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해 증가함수 조건으로 인한 $f'(x) \ge 0$을 연립하면 어느 정도 윤곽이 확실해 질 듯 합니다.

$$f'(x) = 1 + p(3x^2 - 2x) + q(2x - 1)$$
$$f'(0) = 1 - q = 1 \ \rightarrow \ q = 0$$

또, $f'(x) = 3px^2 - 2px + 1$이므로 $p > 0$이고,

$$D/4 = p^2 - 3p \le 0 \ \rightarrow 0 < p \le 3$$

임을 이끌어 낼 수 있습니다. 그러면 $f(x) = p(x^3 - x^2) + x$로부터

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{p}{12} + \frac{1}{2} \ \ge \ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서, 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$를 변곡점으로 갖는 경우 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$이었던 것보다 작은 값이 나왔습니다! 고로, $8a = 8\left(\frac{1}{4}+4\right) = 2 + 32 = 34$입니다.