

[이주영/한성은 모의고사]

| 3월 모의고사 연습 |

| 이주영

이투스 온라인, 대치 명인학원, 목동 예성학원, 중계 명인학원, 은평 사과나무
이주영을 만나 수학이 행복했으면.
정성을 쓰는 일에 후회스런 실패는 없습니다. 화이팅!

| 한성은

5A ACADEMY
반가워요. 열심히 합시다.
4번 오타 아닙니다. 좋은 문제예요.
hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지
써밋 N제 수학1, 수학2, 미적분 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2. $f(x) = x^2 + 2x$ 일 때, $f'(4)$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

3. $\sum_{k=1}^6 (k-2)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 28 ② 31 ③ 34
④ 37 ⑤ 40

4. 두 실수 a, b 가

$$\int_{-a}^b dx = \int_a^b x dx = 6$$

을 만족시킬 때, ab 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

5. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2a & (x \geq -1) \\ bx + 4 & (x < -1) \end{cases}$ 이 $x = -1$ 에서

미분가능할 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

6. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{4} = \frac{\log_c a}{2}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
 ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

7. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^2 + x \int_0^1 t f'(t) dt$$

를 만족시킨다. $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 11 ③ 13
 ④ 15 ⑤ 17

8. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+f(x)}{x-f(x)} = 2$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4x+f(x)}{x^2+2x+f(x)}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

9. 양수 a 에 대하여 $\{x \mid 0 \leq x \leq a\pi\}$ 에서 정의된 함수

$f(x) = \tan \frac{x}{a}$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의

두 점 A, B와 점 $C(a\pi, 0)$ 에 대하여 사각형 OACB가 직사각형이고, 두 점 A, B의 y 좌표의 곱이 -3 일 때, a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ ② $\frac{3}{\pi}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{2\pi}$
 ④ $\frac{3\sqrt{6}}{2\pi}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{7}}{2\pi}$

10. 곡선 $y = 2^{-x}$ 가 직선 $y = x$ 와 만나는 점을 $A(x_1, 2^{-x_1})$,

곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 와 만나는 점을 $B(x_2, 2^{-x_2})$ 라 할 때,

다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{3}{4}$

ㄴ. $x_2 < x_1$

ㄷ. $(1-x_1)2^{x_1} < (1-x_2)2^{x_2}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ 인 두 실수 α , β 에 대하여

$$\frac{1}{2 + \sin 2\alpha} + \frac{1}{3 + \sin 3\beta} = \frac{3}{2}$$

이다. $\alpha + \beta$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3\pi}{4}$ ② π ③ $\frac{5\pi}{4}$
 ④ $\frac{3\pi}{2}$ ⑤ $\frac{7\pi}{4}$

12. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(1) = 1$ 인
 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$f(x)$ 와 x 중 작지 않은 것

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-1) + g(2) = 5$

(나) 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 과 $x = 3$ 에서만
 미분가능하지 않다.

$f(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 36 ② 39 ③ 42
 ④ 45 ⑤ 48

13. 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이

$$\sum_{k=1}^m a_{2k-1} = 140, \quad \sum_{k=1}^m a_{2k} = 160, \quad \sum_{k=1}^{m+1} a_{2k-1} = 176$$

을 만족시킨다. $a_1 + m$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 10
 ④ 12 ⑤ 14

14. 함수

$$f(x) = (x-1)(x-a) \quad (a > 1)$$

에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\int_s^x f(|t|) dt = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(s)$ 라 하자. 함수 $g(s)$ 가 $s = k$ 에서 불연속인 k 의 값이 4개이고 이 4개의 k 값의 곱을 K 라 하자. $a + K$ 의 값은? [4점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 19

15. $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2 - a_n & (a_n > 0) \\ a_n + p & (a_n \leq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 = 1$ 이 되도록 하는 모든 실수 p 의 값의 합은? [4점]

- ① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

단답형

16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+14}-4}$ 의 값을 구하여라. [3점]

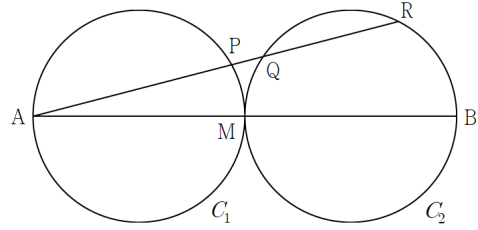
17. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2^n - 1$$

을 만족시킨다. $a_5 - a_1$ 의 값은? [3점]

18. 방정식 $\log_4 x^2 + \log_x 4 - 3 = 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값을 구하여라. [3점]

20. 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AM, BM을 지름으로 하는 원을 각각 C_1, C_2 라 하자. 원 C_1 위의 점 P가 $\overline{MP} = 2$ 를 만족시킬 때, 직선 AP가 원 C_2 와 만나는 두 점을 각각 Q, R라 하자. $\overline{AQ} \times \overline{AR} = 128$ 일 때, \overline{AB} 의 값을 구하여라. [4점]

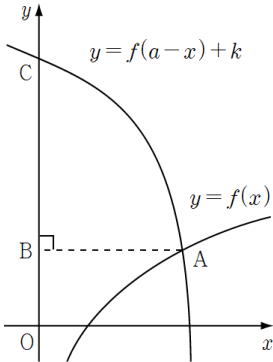


19. 최솟값을 갖는 이차함수 $f(x)$ 가

$$f(6) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)f(x-2)}{x-4} = 4$$

를 만족시킨다. $f(8)$ 의 값을 구하여라. [3점]

21. 함수 $f(x) = \log_2 x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = f(a-x) + k$ 가 만나는 점을 A, 점 A에서 y 축에 내린 수선의 발을 B, 곡선 $y = f(a-x) + k$ 와 y 축이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ 일 때, $5a + 2^k$ 의 값을 구하여라. [4점]



22. 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$x \times \{f(x) - f(a)\} \geq 0 \quad (a \text{는 양의 상수})$$

를 만족시킨다. 집합

$$\{u \mid |f(x) - f(f(t))| \text{가 } x = u \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

의 원소의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = k$ 에서 불연속인 k 는 모두 m 개이고 이를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것이 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 이다.

$$f'(\alpha_3) = f'(\alpha_5) = 0$$

일 때, $m \times f'(0)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

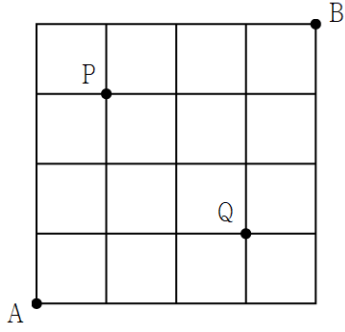
23. 여섯 개의 문자 A, A, A, A, B, B를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

24. 다항식 $\left(\frac{x^2}{2}+2\right)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [3점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

25. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지
않고, Q지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로
가는 경우의 수는? [3점]



- ① 34 ② 36 ③ 38
- ④ 40 ⑤ 42

26. $\sum_{k=0}^6 ({}^6C_k + {}_{k+2}C_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 136 ② 140 ③ 144
- ④ 148 ⑤ 152

27. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때 문자 a 끼리는 이웃하지 않는 경우의 수는? [3점]

- ① 48 ② 51 ③ 54
 ④ 57 ⑤ 60

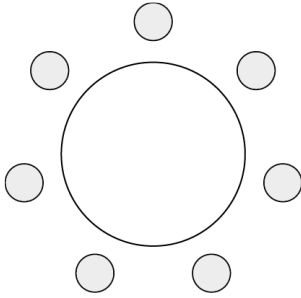
28. 다음 조건을 만족시키는 0 이상 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$
 (나) $a+b+c \geq d+e+4$

- ① 425 ② 435 ③ 445
 ④ 455 ⑤ 465

단답형

29. 그림과 같이 일정한 간격으로 7개의 의자가 놓인 원탁에 남학생 4명과 여학생 3명이 둘러앉으려고 한다. 어느 두 여학생도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



30. 서로 같은 종류의 사탕 7개와 서로 같은 종류의 초콜릿 5개를 A, B, C 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 하는 경우의 수를 구하여라. [4점]

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n^4 + 4n^3 + 4} - n}{n} \right\}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

24. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 4, \quad \sum_{n=3}^{\infty} a_n = 4$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n+2} - n \right\} = 2$ 를 만족시킨다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n+1}{n} - n \right\}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

26. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + a}{x^{2n} + 1}$ 가 $x = -1$ 에서 연속일 때,

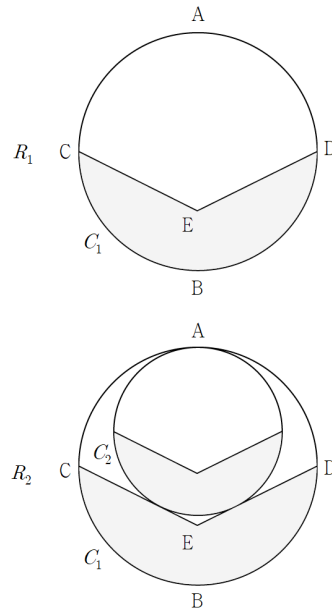
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

27. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 에 접하는 직선 $x + ny = a_n$ 의 y 절편이 b_n 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^3}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
- ④ 4 ⑤ 8

28. $\overline{AB} = 4$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1 과 선분 AB의 수직이등분선의 두 교점을 각각 C, D라 하자. 선분 AB를 3:1로 내분하는 점을 E라 할 때, 점 A를 포함하지 않는 호 CD와 두 선분 CE, DE로 둘러싸인 \smile 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 원 C_1 에 내접하고 두 선분 CE, DE에 모두 접하는 원을 C_2 , 원 C_2 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 \smile 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{(\pi-1)(20+9\sqrt{5})}{10}$ ② $\frac{(\pi-1)(20+11\sqrt{5})}{10}$
- ③ $\frac{(\pi-1)(20+13\sqrt{5})}{10}$ ④ $\frac{(\pi-1)(4+3\sqrt{5})}{2}$
- ⑤ $\frac{(\pi-1)(20+17\sqrt{5})}{10}$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 k 에 대하여

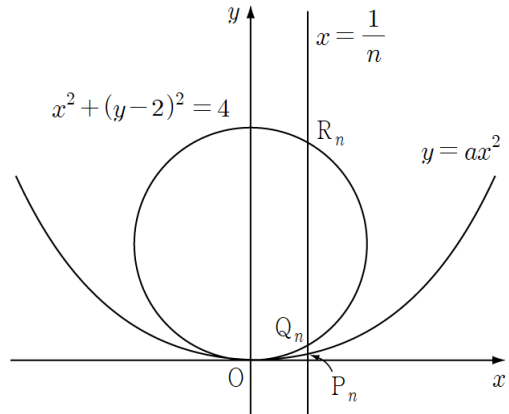
$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1} + 4^{n+1}}{k^n + 4^n}$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 자연수 n 에 대하여 직선 $x = \frac{1}{n}$ 이 곡선 $y = ax^2$ 과 만나는 점을 P_n , 원 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 와 만나는 점을 각각 Q_n, R_n 이라 하자. 3 이상의 자연수 k 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^k \times \overline{P_n Q_n} \times \overline{P_n R_n}\} = b \quad (\text{단, } b \neq 0)$$

일 때, $\frac{k}{ab}$ 의 값을 구하여라. [4점]



수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

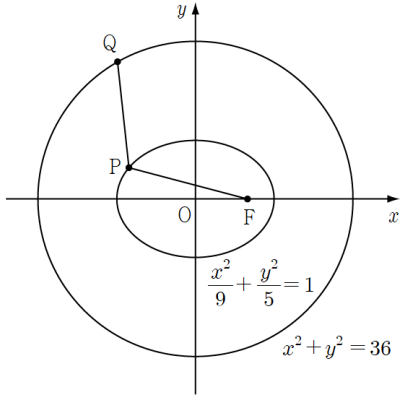
- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

24. 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 (2, 4)에서의 접선의

기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

25. 점 $F(2, 0)$ 과 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위를 움직이는 점 P , 원 $x^2 + y^2 = 36$ 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ} - \overline{PF}$ 의 최솟값은? [3점]



- ① -4 ② -2 ③ 0
- ④ 2 ⑤ 4

26. 매개변수 $t (t \neq 0)$ 로 나타내어진 곡선

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t - \frac{1}{t}$$

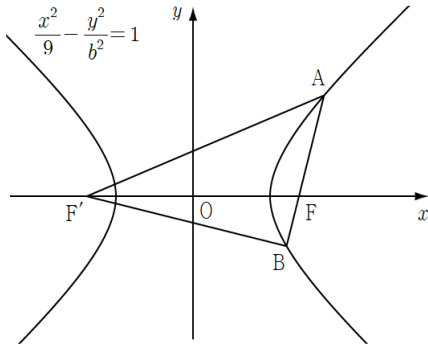
에 접하며 기울기가 2인 두 직선이 y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. \overline{AB} 의 값은? [3점]

- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8
- ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

27. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 점 F 를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하자.

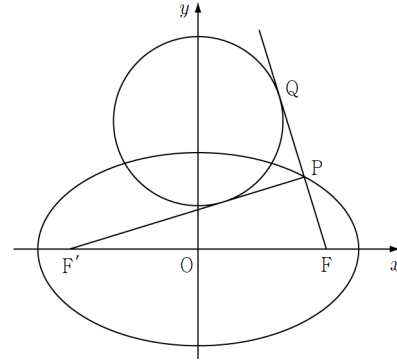
$$\angle F'BA = \frac{\pi}{2}, \quad \tan(\angle AF'B) = \frac{3}{4}$$

일 때, c^2 의 값은? [3점]



- ① 17
- ② 18
- ③ 19
- ④ 20
- ⑤ 21

28. 그림과 같이 두 초점이 F , F' 인 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 직선 FP 과 직선 $F'P$ 가 동시에 접하는 원 $x^2 + (y-4)^2 = r^2$ 이 있다. 양수 r 의 값은? [4점]



- ① $\sqrt{5}$
- ② $\sqrt{6}$
- ③ $\sqrt{7}$
- ④ $2\sqrt{2}$
- ⑤ 3

단답형

29. 실수 m 에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과

직선 $y = mx + 12$ 의 교점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자.
함수 $f(m)$ 이 $m = k$ 에서 불연속인 모든 k 의 값의
곱이 64일 때, b^2 의 값을 구하여라. [4점]

30. 두 양수 k, p 에 대하여 점 $A(-k, 0)$ 에서 포물선
 $y^2 = 4px$ 에 그은 두 접선 중 하나의 접점을 B, 점 B와
포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과
만나는 점 중 B가 아닌 것을 C, 포물선 위의 점 C에서의
접선이 x 축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD} = 6$ 이고
 $\overline{BF} = 2\overline{CF}$ 일 때, $k+2p$ 의 값을 구하여라. (단, 점 A의
 x 좌표는 점 D의 x 좌표보다 작다.) [4점]

[이주영/한성은 모의고사 3월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	⑤	03	②	04	④	05	①
06	①	07	③	08	③	09	④	10	⑤
11	③	12	④	13	②	14	⑤	15	②
16	8	17	26	18	8	19	6	20	16
21	31	22	54						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	②	25	③	26	④	27	⑤
28	④	29	144	30	615				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	③	25	④	26	③	27	②
28	①	29	42	30	256				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	③	25	②	26	②	27	①
28	③	29	48	30	16				

COMMENT 10

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } (1-x_1)2^{x_1} < (1-x_2)2^{x_2} &\Leftrightarrow (1-x_1)2^{-x_2} < (1-x_2)2^{-x_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{-x_2}}{1-x_2} < \frac{2^{-x_1}}{1-x_1} \Leftrightarrow \frac{2^{-x_2}}{x_2-1} > \frac{2^{-x_1}}{x_1-1} \end{aligned}$$

이다. 두 점 $(1, 0)$ 과 $(x, 2^{-x})$ 사이의 기울기로 해석.

COMMENT 11

$$-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1, -1 \leq \sin 3\beta \leq 1 \text{ 이므로 } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin 2\alpha} \leq 1 \text{ 이고, } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sin 3\beta} \leq \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\frac{1}{2+\sin 2\alpha} + \frac{1}{3+\sin 3\beta} = \frac{3}{2} \text{ 이려면 } \frac{1}{2+\sin 2\alpha} = 1, \frac{1}{3+\sin 3\beta} = \frac{1}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\sin 2\alpha = -1, \sin 3\beta = -1 \text{ 이므로 } 2\alpha = 3\beta = \frac{3\pi}{2}, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$

* 치사해서 미안하지만 나름대로 수능이 좋아하는 유형이다.

COMMENT 12

$g(x)$ 는 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 가 만나는 지점에서만 미분불가능할 수 있다.

$f(1)=1$ 이며 $x=1$ 에서 미분가능하므로 대충 접하는 각이다. $f'(1)=1$ 이다.

또, $f(0)=0, f(3)=3$ 이므로 $f(x)=ax(x-1)^2(x-3)+x$ 이다.

개형을 썰어보면 $g(-1)=f(-1)$ 이고 $g(2)=2$ 이다.

COMMENT 13

$$\sum_{k=1}^m a_{2k-1} = \frac{a_1 + a_{2m-1}}{2} \times m = m \times a_m = 140, \quad \sum_{k=1}^m a_{2k} = m \times a_{m+1} = 160, \quad \sum_{k=1}^{m+1} a_{2k-1} = (m+1) \times a_{m+1} = 176$$

$$\text{이다. } \frac{m \times a_{m+1}}{(m+1) \times a_{m+1}} = \frac{160}{176} \text{ 에서 } m=10, a_m=14, a_{m+1}=16 \text{ 에서 } d=2, a_1=-4 \text{ 이다.}$$

COMMENT 14

$a=3, k$ 의 값 $-4, -1, 1, 4$

$a < 3$ 일 때, $\int_0^a f(x)dx > 0$ 이므로 $s=k$ 에서 $g(s)$ 가 불연속인 k 의 값은 8개다.

$a > 3$ 일 때, $\int_0^a f(x)dx < 0$ 이므로 $s=k$ 에서 $g(s)$ 가 불연속인 k 의 값은 12개다.

$a=3$ 일 때 함수 $\int_s^x f(t)dt$ 의 (작은) 극댓값과 (큰) 극솟값이 같다.

썰어보면 $g(s)$ 는 $s=-3, s=0, s=3$ 에서 연속이다.

COMMENT 15

가능한 p 의 값은 $1, \frac{3}{2}, 3$ 이다.

$$a_2 = -2, a_3 = -2+p, a_4 = \begin{cases} 4-p & (2 < p) \\ -2+2p & (p \leq 2) \end{cases}, a_5 = \begin{cases} 4 & (4 < p) \\ p-2 & (2 < p \leq 4) \\ -2p+4 & (1 < p \leq 2) \\ 3p-2 & (p \leq 1) \end{cases}$$

에서 $p-2=1$ 일 때, $p=3, -2p+4=1$ 일 때, $p=\frac{3}{2}, 3p-2=1$ 일 때, $p=1$ 이다.

COMMENT 19

$f(4)=0$ 또는 $f(2)=0$ 이다. $f(x)=a(x-4)(x-6)$ 은 풀어보면 망한다.

$f(x)=a(x-2)(x-6)$ 이다. 극한값을 계산하면 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$ 이다.

* $f(4)=0$ 일 때는 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)f(x-2)}{x-4} = f'(4) \times f(2)$ 가 음수이므로 모순이다.

COMMENT 20

$\overline{AB}=4a$ 라 하자. $\angle APM = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos(\angle PAM) = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ 이다.

두 점 Q, R와 원 C_2 의 중심 O를 각각 연결하고
삼각형 AOQ 또는 삼각형 AOR에서 코사인법칙을 돌리면,

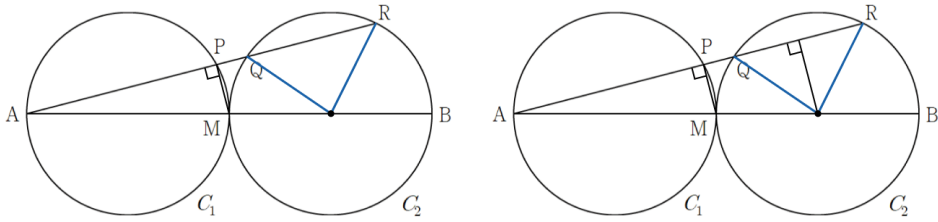
$$a^2 = (3a)^2 + x^2 - 6ax \times \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

이다. $x^2 - 6\sqrt{a^2-1}x + 8a^2 = 0$ 의 두 근 $3\sqrt{a^2-1} \pm \sqrt{a^2-9}$ 이 각각 \overline{AQ} 와 \overline{AR} 이다.

$$\overline{AQ} \times \overline{AR} = (3\sqrt{a^2-1} - \sqrt{a^2-9})(3\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2-9}) = 8a^2$$

이므로 $a=4$ 이다.

* 점 O에서 선분 QR에 수선의 발을 내리면 예쁘게 설명된다. 코사인법칙 문제는 원래 그렇다.



* 이런.. 방벽을 때리면 $\overline{AQ} \times \overline{AR} = \overline{AM} \times \overline{AB}$ 이므로 바로 답이 나온다.

의도가 아니라 망한 문항이지만 학생들이 눈치채지 못할 것을 믿어본다.

COMMENT 22

$x \times \{f(x) - f(a)\} \geq 0$ 에서

$x < 0$ 일 때는 $f(x) \leq f(a)$,

$x > 0$ 일 때는 $f(x) \geq f(a)$ 이다.

잘 썰어보면 $f(0) = f(a)$ 이므로

$f(x) = kx(x-a)^2 + c$ 라 나타낼 수 있다.

함수 $f(x)$ 는 두 개의 극점만을 가지므로

$x = \alpha_3$ 에서 극대, $x = \alpha_5$ 에서 극소이다.

불연속점 만들어 지는 모양은 오른쪽 그림 참고.

세로 점선에 함수값이 걸리면 불연속이 뜬다.

$f(\alpha_3)$ 와 $f(\alpha_5)$ 가 여기에 걸리는 그림은 유일하다.

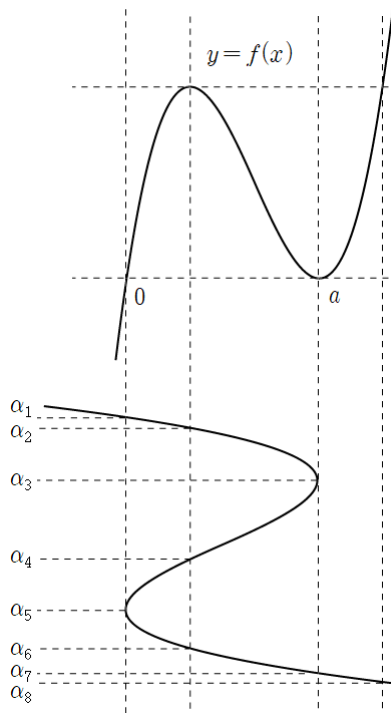
$\alpha_3 = \frac{1}{3}a$, $\alpha_5 = a$ 이고 $m=8$ 이다.

또 $f(\alpha_3) = \alpha$, $f(\alpha_5) = 0$ 이므로

극대극소 차이에서 $\frac{k}{2} \left(\frac{2}{3}a\right)^3 = a$ 이다.

잘 썰어보면, $f'(0) = ka^2 = \frac{27}{4}$ 이다.

* k 의 값과 a 의 값은 구할 수 없다.



COMMENT 확률과 통계 28

$a+b+c$ 의 값이 정해지면 $d+e$ 의 값이 정해진다.

Case1) $a+b+c=10, d+e=0 : {}_3H_{10} = 66$

Case2) $a+b+c=9, d+e=1 : {}_3H_9 \times 2 = 110$

Case3) $a+b+c=8, d+e=2 : {}_3H_8 \times 3 = 135$

Case4) $a+b+c=7, d+e=3 : {}_3H_7 \times 4 = 144$

COMMENT 확률과 통계 30

초콜릿을 나누어 주는 묶음의 개수에 따라 분할하면,

Case1) $[5, 0, 0] : 3 \times {}_3H_5 = 63$

Case2) $[4, 1, 0] : 3 \times 2 \times {}_3H_6 = 168$

Case3) $[3, 2, 0] : 3 \times 2 \times {}_3H_6 = 168$

Case3) $[3, 1, 1] : 3 \times {}_3H_7 = 108$

Case3) $[2, 2, 1] : 3 \times {}_3H_7 = 108$

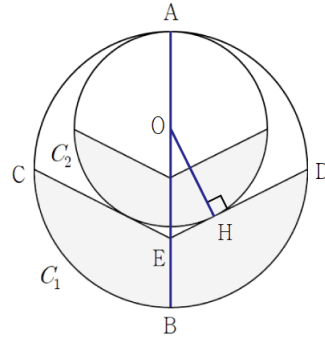
이다.

COMMENT 미적분 28

두 번째 원의 반지름의 길이를 r 이라 하자. 그림을 채려보면

$$\overline{AO}=r, \quad \overline{OE}=\frac{\sqrt{5}}{2}r, \quad \overline{EB}=1$$

에서 $\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)r = 3$ 이므로 $r = 6\sqrt{5} - 12$ 이다.



COMMENT 미적분 29

k 에 1부터 대입해보자.

$$a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 4, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8$$

이다.

COMMENT 미적분 30

점 $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n^2}\right), Q_n\left(\frac{1}{n}, 2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}\right), R_n\left(\frac{1}{n}, 2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}\right)$ 이다.

$$\overline{P_nQ_n} = 2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}} - \frac{a}{n^2} = \frac{1 - 4a + \frac{a^2}{n^4}}{2 - \frac{a}{n^2} + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}}, \quad \overline{P_nR_n} = 2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}} - \frac{a}{n^2}$$

이므로

$$n^k \times \overline{P_nQ_n} \times \overline{P_nR_n} = \frac{(1 - 4a)}{n^2} n^k + \frac{a^2}{n^4} n^k$$

이다. 0이 아닌 값으로 수렴하려면 $a = \frac{1}{4}, k = 4$ 이고, 수렴값 $b = a^2 = \frac{1}{16}$ 이다.

COMMENT 기하 26

연립하여 t 를 소거하자. $x^2 - y^2 = 4$ 이다.

COMMENT 기하 27

$\overline{FA}=a$, $\overline{FB}=b$ 라 하면 $\overline{F'A}=a+6$, $\overline{F'B}=b+6$ 이다.

직각삼각형 $F'BA$ 에서 3:4:5 돌려보면 $b=2$, $a=4$ 이다.

직각삼각형 $F'BF$ 에서 $\overline{FF'}=2\sqrt{17}$ 이므로 $c=\sqrt{17}$ 이다.

COMMENT 기하 28

$O'(0, 4)$, 원과 직선 PF' 의 교점을 H , $\overline{FQ}=a$, $\overline{PQ}=b$ 라 하자.

$\overline{FP}=a-b$, 대칭성을 켜려보면 $\overline{F'H}=a$, $\overline{PH}=b$ 이다.

타원의 정의에서 $\overline{FP}+\overline{F'H}+\overline{PH}=10$ 이므로 $a=5$ 이다.

$\overline{FO'}=4\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 FQO' 에서 $r^2=7$ 이다.

COMMENT 기하 29

직선이 쌍곡선에 접할 때와 쌍곡선의 점근선과 평행할 때 불연속이다. (k 의 값으로 4개)

쌍곡선에 접할 때 : $y=mx \pm \sqrt{12m^2 - b^2}$ 에서 $\sqrt{12m^2 - b^2}=12$ 이므로 $m=\pm \sqrt{12 + \frac{b^2}{12}}$ 이다.

점근선과 평행할 때 : $m=\pm \frac{b}{2\sqrt{3}}$ 이다.

모든 k 의 값의 곱은 $\left(12 - \frac{b^2}{12}\right)\frac{b^2}{12}$ 이다. $\left(12 - \frac{b^2}{12}\right)\frac{b^2}{12}=64$ 에서 $b^2=48$ 이다.

COMMENT 기하 30

성질 켜려보면 $B(k, 2\sqrt{pk})$ 이고 $\overline{BF}=k+p$ 이다.

$\frac{1}{BF} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{p}$ 에서 $\overline{CF}=p + \frac{p^2}{k}$ 이다.

$C\left(\frac{p^2}{k}, \frac{2p\sqrt{p}}{\sqrt{k}}\right)$ 이므로 $D\left(-\frac{p^2}{k}, 0\right)$ 이다.

$\overline{AD}=k - \frac{p^2}{k}=6$ 이고

$\overline{BF}=2\overline{CF}$ 에서 $\overline{CF}=\frac{k}{2} + \frac{p}{2}=p + \frac{p^2}{k}$ 이다.

연립하여 풀면 $k=8$, $p=4$ 이다.