HOLMES 수2

안녕하세요? 저는 카이스트 수리과학과의 지인선이라고 합니다.
작년에 수능을 준비하신 분들에게는 ‘지인선 N제’로 더 많이 알려져 있을 것 같네요 ㅎㅎ

올해에도 물론 ‘2024 지인선 N제’가 무료배포될 것입니다! 하지만 다른 방식으로도 여러분에게 도움이 되고 싶어서, 새로 준비한 콘텐츠가 있습니다.

실전 개념, 자세 정리 칼럼집인 ‘HOLMES 수2’을 소개합니다!

‘HOLMES 수2’는 수능 수학의 공통과목 중 하나인 수2을 다룹니다.
기본 개념보다는, 수능에서 수2가 출제된다면 어떤 개념이 어떤 방식으로 강조되어 출제되는지 알려드리며, 여러분이 가지셔야 할 자세와 실전 개념을 정리해드립니다.

기출문제뿐만 아니라, 지인선 N제 콘텐츠를 이용하여 앞으로의 수능에서는 이런 방식으로도 출제될 수도 있겠구나라는 느낌을 받으실 수 있을 겁니다.

추천 대상:
수2 기본 개념을 끝마친 후, 기출문제를 어느 정도 풀어본 학생에게 권하며, 최소 수2 기본 개념은 끝마치셔야 따라오시기 편할 겁니다.

제 개인 카페인 ‘지인선의 수학 아지트’에서 pdf도 다운받으실 수 있을 겁니다.

지인선의 수학 아지트: https://cafe.naver.com/inseonmath

수2

제 0 장 올바른 다항함수 작성법

고난도 수능 수학 문제의 경우, 우리에게 미지의 함수를 찾아내도록 요구한다.
특히 수2의 경우, 문제의 조건에 부합하는 다항함수를 찾아내는 함수추론 문제가 수학 점수를 결정한다고 할 수 있다.
따라서, 다항함수에 관한 올바른 이해와, 그에 기반한 올바른 함수 작성법은 수학 고득점을 위한 기본 중의 기본이다.

keyword: 다항식, 차수, 나머지정리, 인수정리, 차이함수, 미분계수, 도함수

0.1. 함수 작성 예시

예를 들어, 삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(3)=3, f'(1)=0$이라고 주어졌다고 하자. 이때,

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 작성한 뒤,

$f(1)=a+b+c+d=3$
$f(3)=27a+9b+3c+d=3$
$f'(1)=3a+2b+c=0$
이런 식으로 풀어헤치지 말고

바로 $f(x)=a(x-1)^2(x-3)+3$으로 나타낼 수 있어야 한다.

앞서 언급한 예시는 극단적인 예시라서, '나는 이미 저렇게 안하고 있는데?' 라고 생각할 수 있다.
하지만 당연하다고 생각하는 내용에서 새롭게 다가오는 부분이 있을 것이다. 그리고 자기가 인식하지 못한 비효율적인 식 처리 습관이 존재할 수도 있으니 한 번 전체 내용을 따라오면 좋을 것이다.

0.2. 다항식, 다항함수란?

x^3+x+1, $2x^2+2x-1$, x^4+x^2+x와 같이

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (단, n은 0이상의 정수, $a_n \neq 0$)으로 나타낼 수 있는 식이 **다항식**이다.

따라서 $1+\sin x$나 $\frac{2}{x^2}+1$ 같은 식은 다항식이 아니다. 그리고 3같은 상수의 경우, 다항식이 맞다.

다항식에서 가장 중요한 정보는 '**차수**'이다.

다항식을 이루는 항들 중 가장 큰 차수를 갖는 항, 즉 최고차항이 그 다항식의 차수를 결정한다.

다항함수는 $y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$꼴로 나타낼 수 있는 함수이다.

다항함수의 최고차항의 차수와 계수는 해당 함수의 전체적인 개형을 결정하는 중요한 요소이므로, 매우 중요하다.

0.3. n차 다항식을 결정하려면, $n+1$개의 정보가 필요하다.

일차식은 $ax+b$

이차식은 ax^2+bx+c

삼차식은 ax^3+bx^2+cx+d...

즉, n차식을 나타낼 때에는 $n+1$개의 미지수를 도입해야한다.
따라서 n차 다항식을 확정시키고 싶다면, $n+1$개의 정보가 필요하다.

예를 들어, 이차식 $f(x)$가 $f(0)=f(2)=1, f(4)=17$이라면
주어진 정보가
$f(0)=1$
$f(2)=1$
$f(4)=17$
총 3개이기 때문에
$f(x)=2x(x-2)+1$으로 딱 하나로 결정된다.

하지만, 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=4$이라면,
(즉, 주어진 조건이 3개라면)
$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+4$이기에, a라는 미지수가 들어가게 된다.

이는 삼차식을 결정하기 위해서는 4개의 정보가 필요한데, 3개가 주어져 있어서 그렇다.

어찌 보면 당연한 얘기일 수도 있지만, 조건의 개수와 다항식의 차수를 연관지어 생각한다면, 어딘가에서 빠뜨린 조건이 있는지 파악하는 데 도움이 될 것이다.

0.4. 나머지정리와 인수정리

효율적인 다항식 작성을 위한 가장 중요한 두 정리이다.

나머지정리는
A. '$f(p)=q$이다.'

B. '$f(x)$라는 다항식을 $(x-p)$라는 일차식으로 나눈 나머지가 q이다'.
(즉, 어떤 다항식 $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x-p)g(x)+q$)

이 두 문장이 동치라는 것을 의미한다.

예를 들어, 만약 이차함수가 $f(2)=3$이라고 해보자.
이 경우, 나머지정리에 의해 $f(x)$를 $(x-2)$로 나눈 나머지가 3이다.
지금 $f(x)$가 이차식이니, $f(x)=(x-2)(ax+b)+3$이다.

인수정리는, 다항식 $f(x)$가 주어져 있을 때
'$f(p)=0$이면, 어떤 다항식 $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x-p)g(x)$이다.'

을 말해준다. 즉, $f(p)=0$이라는 조건이 주어지면, $f(x)$는 $(x-p)$라는 일차식을 인수를 가지고 있다는 의미이다.

예를 들어, 이차식 $f(x)$가 $f(1)=0, f(2)=0$이라면,
$f(x)$는 $(x-1)$과 $(x-2)$를 인수로 가지고 있는데 $f(x)$는 이차식이므로
$f(x)=a(x-1)(x-2)$라고 할 수 있다.

0.5. 인수정리+미분계수

미분계수에 관한 정보는 효율적인 함수 작성에 중요한 정보이다.
다음 명제는 중요하니 꼭 기억해야 한다.

'다항함수 $f(x)$가 $f(p)=0, f'(p)=0$이라면, $f(x)$는 $(x-p)^2$을 인수로 갖는다.'

예를 들어, 삼차함수 $f(x)$가 $f(2)=f'(2)=0, f(3)=1$이라고 해보자.

그렇다면 처음 2개의 조건을 이용해서 $f(x)=(x-2)^2(ax+b)$로 나타낸 뒤, $f(3)=1$을 통해 $3a+b=1$임을 알 수 있고, 따라서
$f(x)=(x-2)^2(ax-3a+1)$이다.

또 예를 들어, 삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=2, f'(1)=0$이라면 어떻게 해야 할까?

이런 경우, $h(x)=f(x)-2$이라 하면, $h(1)=h'(1)=0$이므로
$h(x)=(x-1)^2(ax+b)$이고, 따라서 $f(x)=(x-1)^2(ax+b)+2$이다.
즉, 만약 $f(p)=q, f'(p)=0$이라면, $f(x)=(x-p)^2g(x)+q$로 둘 수 있다.

하지만, $f(2)=1, f'(2)=3$과 같이 미분계수의 값 또한 0이 아닌 경우에는 어떻게 할까?

이런 경우, **다항식의 또 다른 표현**을 활용해야 한다.

예를 들어, 다항식 $f(x)=x^3-3x+2$가 있다고 하자. 이 다항식은 사실 $f(x)=(x+1)^3-3(x+1)^2+4$로 나타낼 수도 있다.

즉, 우리는 기본적으로 다항식을 x의 거듭제곱(..., x^3, x^2, x^1, x^0)과 상수의 곱을 합한 형태로 나타내어 왔지만,

$x+1$의 거듭제곱, 즉 $(x+1)^3, (x+1)^2, (x+1)$들을 이용할 수도 있고,

$x-3$의 거듭제곱, 즉 $(x-3)^3, (x-3)^2, (x-3)$들을 이용할 수도 있는 것이다.

즉, 우리의 편의에 따라서 다항식의 표현을 여러 방식으로 할 수 있다.

다시 본론으로 돌아가면, 삼차함수 $f(x)$가 $f(2)=1, f'(2)=3$을 만족한다고 하자.

이런 경우, 가장 깔끔하게 표현한 것은 아마

$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+3(x-2)+1$
일 것이다. (실제 대입을 해서 확인해보자.)

즉, $f'(p)=A, f(p)=B$ 같은 조건이 제시된 경우, 주어진 다항식을 $(x-p)$를 이용하여 나타낸 뒤, $(x-p)$의 계수는 A, 상수항은 B라는 사실을 이용하자.

다항식의 또 다른 표현을 잘 활용하자. 특히 적분 계산에서 도움이 될 수도 있다. (0.9장 문제 1번)

0.6. 도함수 기준 함수 작성

다음 예시를 생각해보자.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
$f'(2)=f'(4)=1$, $f(1)=2$이라 하자. $f(x)$를 구하라.

이 문제를 다음과 같이 풀 수도 있을 것이다.
$f(1)=2$이고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이므로
$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)+2$이다.

이제 미분을 이용하여 $f'(2)=1, f'(4)=1$을 대입하여 연립한다.
하지만 연립방정식을 풀어야 하는 단점이 있다.

위의 문제를 다른 방식으로도 풀 수 있다.

$f'(x)$를 생각해보자. 이 함수는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.
그리고 $f'(2)=f'(4)=1$이므로,
$f'(x)=3(x-2)(x-4)+1=3x^2-18x+25$이다.

따라서, $f(x)=x^3-9x^2+25x+C$이고, $f(1)=2$를 이용하여
$f(x)=x^3-9x^2+25x-15$임을 알 수 있다.

문제에서 주어진 함수를 작성할 때, 원함수를 기준으로 할지, 아니면
도함수를 기준으로 작성한 후 적분을 할지 고민해보자.

보통, 도함수에 관한 조건이 더 많은 경우, 도함수를 기준으로 작성하는
것이 편리하다.

0.7. 차이 함수의 이용

다음 예시를 생각해보자.

‘삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=3, f(2)=5, f(3)=7$일 때, $f(x)=?$’

주목해야할 지점은, $1, 2, 3$으로 x값이 일정하게 증가함에 따라, 함숫값이 $3, 5, 7$로 일정하게 증가한다는 점이다.

여기서, 함수 $y=2x+1$을 생각해보자.
이 함수는 1을 대입하면 3, 2를 대입하면 5, 3을 대입하면 7이다.

그렇다면, 함수 $h(x)=f(x)-(2x+1)$의 경우, $h(x)$는 삼차함수이며 $h(1)=h(2)=h(3)=0$이다.

따라서 어렵지 않게 $h(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$으로 표현할 수 있으며, 따라서 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$이다.

이렇듯, 차이 함수를 이용하면 우리가 알고 있는 인수정리를 효율적으로 사용 가능하며, 효율적인 함수 작성을 도와준다.

0.8. 조건 적용 순서

지금까지 배운 내용을 이해하는 것과, 적용하는 것은 괴리가 클 것이다.

특히 문제에서 주어진 조건은 여러 가지인데, 어느 조건부터 사용해야 하는지 고민이 되는 경우가 많을 것이다.

비록 명확한 행동강령이 존재하지는 않겠지만, 다음을 염두하고 0.8.의 문제들을 해결해가면, 효율적인 함수 작성을 체화할 수 있을 것이다.

1. 도함수를 기준으로 작성할지, 원함수를 기준으로 작성할지 고민하자. 만약 미분계수에 관한 조건이 적다면, 원함수를 기준으로 작성하고 미분계수 조건을 나중에 이용하자.

2. 비슷한 조건들이 많은 경우, 그것들을 우선순위로 하고, 차이함수를 적용할 수 있는지 고민하자.

3. 나머지정리나 인수정리를 이용할 때, 주어진 함수의 차수와 계수를 주목하자.

0.9. 문제

문제에서 '$f(x)$를 구하라'고 한다면, $f(x)$를 별도의 미지수 없이 완전히 표현가능한 것이다.

'$f(x)$를 간단히 표현하라'고 한다면, 미지수를 도입하되 최대한 간단한 방식으로 표현하는 것이 목표이다.

1. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어 떨어진다. $f(3)=0$일 때, $f(x)$를 간단히 표현하라.
2. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(2)=0, f(3)=2, f(4)=12$일 때, $f(x)$를 구하라.
3. 삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(3)=0$이고, $f(2)=-1$이다. $f(x)$를 간단히 표현하라.
4. 삼차함수 $f(x)$가 $f'(1)=f'(3)=2$이다. $f(x)$를 간단히 표현하라.
5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$이다. $f(x)$를 간단히 표현하라.
6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f'(1)=f(1)=0$이고 $f(2)=3$이다. $f(x)$를 구하라.
7. 삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=5, f(3)=3, f(5)=1$일 때, $f(x)$를 간단히 표현하라.
8. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(2)=1$일 때, $f(x)$를 간단히 표현하라.
9. 사차함수 $f(x)$가 $f'(1)=f'(2)=f'(3)$이다. $f(x)$를 간단히 표현하라.
10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수가 $f(1)=f'(1), f(2)=3$이다. $f(x)$를 간단히 표현하라.

0.10. 문제 풀이

단순히 정답만 비교하기보단, 효율적인 방법과 순서를 적용했는지 확인하자.

1번.

일단 $f'(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어 떨어진다는 아주 큰 정보가 주어져 있다. 따라서 도함수를 기준으로 함수를 작성해보자. 그리고 지금 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로, 아마 이런 식으로 작성했을 것이다.

$$f'(x)=4(x-a)(x-2)^2$$

하지만, 이 식으로부터 $f(x)$를 구하기 위해 $f'(x)=4(x-a)(x-2)^2$을 전개하고 일일이 적분하는 것은 너무 힘들다.

하지만 다음과 같은 방식으로 $f'(x)$를 표현한다면 어떨까?

$$f'(x)=4(x-2)^3+a(x-2)^2$$

위처럼 표현한다면, 어차피 $(x-2)^n$의 적분은 $\dfrac{1}{n+1}(x-2)^{n+1}$이므로, 적분 계산이 훨씬 쉬워진다.

또한, a대신 $3a$를 이용해서 나타내면, 즉

$f'(x)=4(x-2)^3+3a(x-2)^2$로 나타내면,
$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^3+C$ 로서, 분수없이 깔끔하게 표현 가능하다.
이제 $f(3)=0$이므로, $C=-a-1$이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^3-a-1$이다.

2번.
우선 $f(1)=f(2)=0$이라는 조건이 비슷하므로, 우선적으로 고려하자.
즉, $f(x)$는 $x-1$과 $x-2$를 인수로 가진다.

여기서 중요하다. 만약 이 단계에서

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)(x-b)$로 작성을 했다면 반성하자.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+ax+b)$로 작성하는 것이 옳다.

왜냐하면, 지금 $(x-1)(x-2)$를 제외한 나머지 이차식이 실근을 갖는지 허근을 갖는지 모르기 때문에, 무작정 1차식의 곱으로 나타낸다면 a,b가 복잡한 수가 나오기 때문에, 효율적이지 않다.

그냥 더 일반적인 x^2+ax+b로 나타내는 것이 옳다.

$f(3)=2, f(4)=12$로부터

$9+3a+b=1$
$16+4a+b=2$이다.

따라서, $a=-6, b=10$이다.

따라서, $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-6x+10)$이다.

3번. $f(1)=f(3)=0$이므로, $f(x)=(x-1)(x-3)(ax+b)$로 표현 가능하다.

그리고, $f(2)=-1$이므로 $f(2)=-(2a+b)=-1$이다. 따라서, $2a+b=1$이고 $f(x)=(x-1)(x-3)(ax-2a+1)$로 둘 수 있다.

4번. $f'(1)=f'(3)=2$이므로, 도함수를 기준으로 작성해보자. 지금 $f(x)$는 삼차함수이므로, $f'(x)$는 이차함수이다. 따라서 $f'(x)=a(x-1)(x-3)+2$라고 두고 시작할 수도 있다.

하지만 여기서 더 팁을 주자면, a대신 $3a$로 두고 푸는 것이 좋다. 즉, $f'(x)=3a(x-1)(x-3)+2$로 두는 것이 좋다.

왜냐하면, 만약 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 a라면 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{a}{3}$이므로 보기 불편할 것이기 때문이다.

$f'(x)=3a(x-1)(x-3)+2=3ax^2-12ax+9a+2$이므로

$f(x)=ax^3-6ax^2+(9a+2)x+C$라고 둘 수 있다.

5번. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$이다. 즉, $f(2)=3, f'(2)=5$이므로, $(x-2)$를 기준으로 삼차함수를 작성하는 것이 효율적일 것이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^3+a(x-2)^2+5(x-2)+3$이다.

6번. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f'(1)=f(1)=0$이고 $f(2)=3$이다. 지금 $f'(1)=f(1)=0$로부터 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가짐을 알 수 있고, 따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$이다. 지금
$f(2)=3$이므로, $2-a=3$이다. 따라서 $a=-1$이고,
$f(x)=(x-1)^2(x+1)$이다.

7번. $f(1)=5, f(3)=3, f(5)=1$이므로, 만약 $h(x)=f(x)+x-6$이라 한다면, $h(1)=h(3)=h(5)=0$이므로
$h(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$이고,
$f(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)+6-x$이다.

8번. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(2)=1$이므로, $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+ax+b)+1$로 표현하는 것이 최선이다. 혹시 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)(x-b)+1$로 썼다면 반성해야 한다. 지금 저 a,b가 무리수, 심지어는 복소수가 될 수도 있기에, 저렇게 표현하는 것은 바람직하지 않다.

9번. $f'(1)=f'(2)=f'(3)$이라는 조건이 있으므로, 도함수를 기준으로 작성하자. 지금 $f(x)$는 사차함수이므로, $f'(x)$는 삼차함수이다. 따라서 $f'(x)=4a(x-1)(x-2)(x-3)+b$로 두는 것이 좋다.
($4a$로 둔 이유는, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a로 만들기 위함이다.)

그리고, 저 위의 식을 무작정 풀어 해치지 말고, 이런 식으로 전개해보자.
$(x-1)(x-3)=(x-2+1)(x-2-1)=(x-2)^2-1$이므로,
$f'(x)=4a(x-2)^3-4a(x-2)+b$이고, 이를 적분하면
$f(x)=a(x-2)^4-2a(x-2)^2+b(x-2)+C$라 할 수 있다.

10번. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수가 $f(1)=f'(1), f(2)=3$이라는 조건에서, $f(2)=3$이라는 조건은 나중에 생각하자. $f(1)=f'(1)$이라는 조건에서, $(x-1)$을 기준으로 $f(x)$를 나타내는 것이 좋아보인다.
따라서,
$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+b$이고, $f(2)=3$으로부터
$1+a+2b=3$이다. 따라서, $a=2-2b$이고,

$f(x)=(x-1)^3+(2-2b)(x-1)^2+b(x-1)+b$로 나타낼 수 있다.