[기하] [01이차곡선] 교사평경 최근 3개년

07 기하 01 포물선

01 포물선의 방정식

03 포물선의 방정식3 (방정식과 초점 또는 준선 조건)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 25

1. 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$ 이고 준선이 직선 $x=-3$ 인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18

④ 20 ⑤ 22

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 24

2. 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a, 2)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

07 기하

01 포물선

02 포물선의 정의 활용

01 정의 활용1 (초점, 포물선 위의 점을 이은 선분 관련)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 28

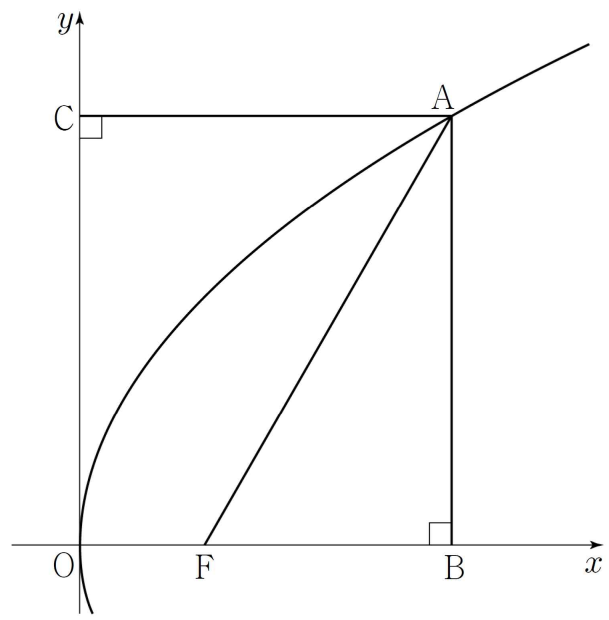
3. 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면에 있다.)

① 874 ② 876 ③ 878

④ 880 ⑤ 882

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 26

4. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}=8$이고 사각형 OFAC의 넓이와 삼각형 FBA의 넓이의 비가 2 : 1일 때, 삼각형 ACF의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, 점 A의 x좌표는 p보다 크다.)

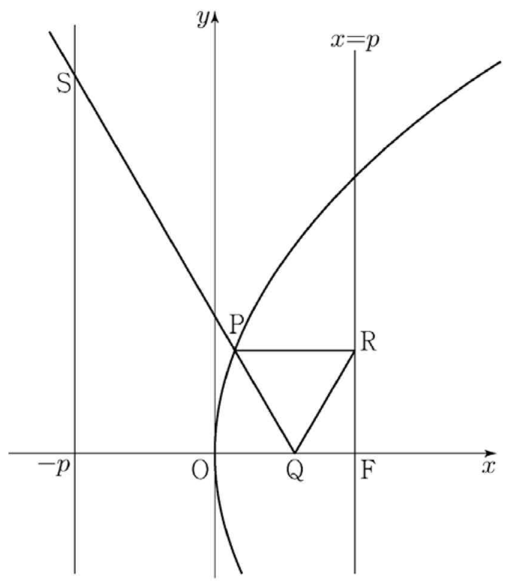


① $\frac{27}{2}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ 18

④ $12\sqrt{3}$ ⑤ 24

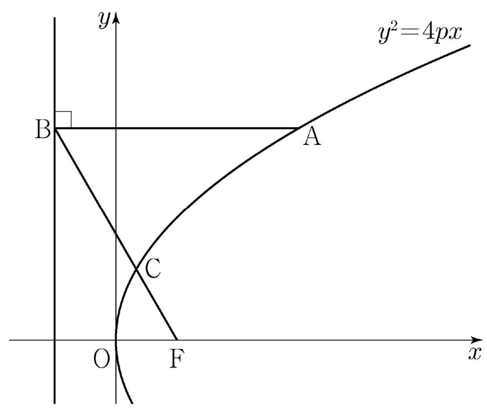
[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 29

5. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 x축과 평행하다. 직선 PQ가 점 $\mathrm{S}(-p,\ \sqrt{21})$을 지날 때, $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 26

6. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}+3\overline{\mathrm{CF}}=6$일 때, 양수 p의 값은?



① $\dfrac{7}{8}$ ② $\dfrac{8}{9}$ ③ $\dfrac{9}{10}$
④ $\dfrac{10}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{12}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 23

7. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 27

8. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은?

(가) 점 Q는 선분 FH를 $1:2$로 내분한다. (나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

07 기하

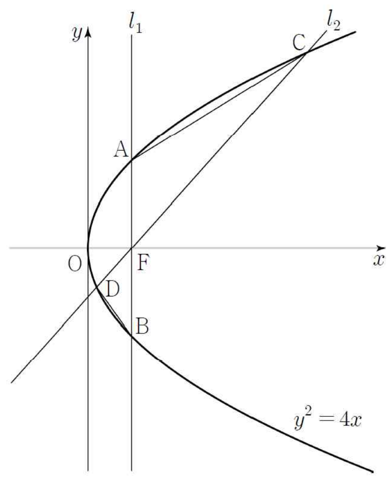
01 포물선

02 포물선의 정의 활용

02 정의 활용2 (초점을 지나는 직선 관련)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 28

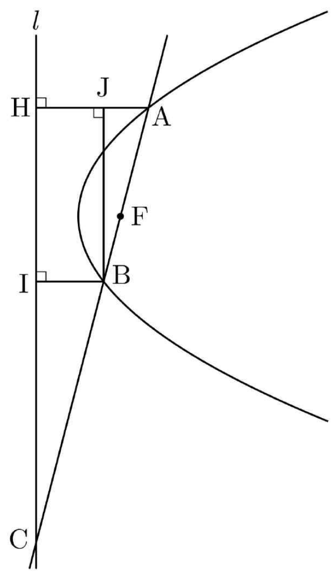
9. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나고 x축과 수직인 직선 l_1이 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 F를 지나고 기울기가 $m(m>0)$인 직선 l_2가 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D라 하자.
삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배일 때, m의 값은? (단, 두 점 A, C는 제 1사분면 위의 점이고, 두 점 B, D는 제 4사분면 위의 점이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 28

10. 점 F를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 있다. 포물선 위의 두 점 A, B와 점 F를 지나는 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 점 B에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 J라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{BJ}}}{\overline{\mathrm{BI}}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{5}$일 때, 선분 HC의 길이는?



① $21\sqrt{3}$ ② $22\sqrt{3}$ ③ $23\sqrt{3}$
④ $24\sqrt{3}$ ⑤ $25\sqrt{3}$

07 기하

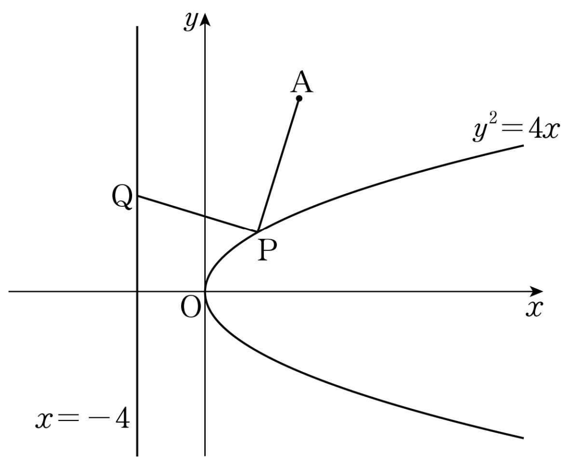
01 포물선

02 포물선의 정의 활용

04 정의 활용4 (최단거리 관련)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 27

11. 점 A$(6, 12)$와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은?



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

07 기하

01 포물선

02 포물선의 정의 활용

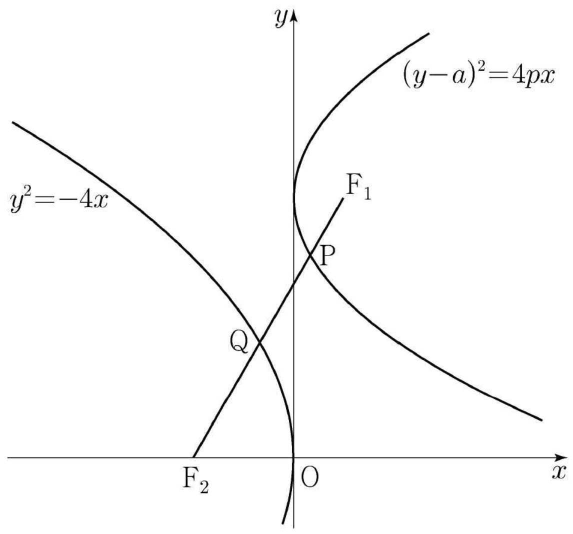
05 정의 활용5 (두 포물선 관련)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

12. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자.
선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다. a^2+p^2의 값은?

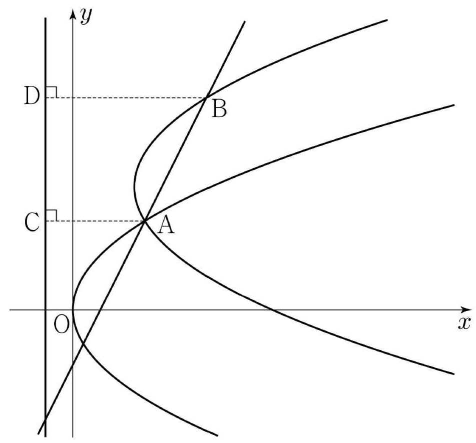
① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



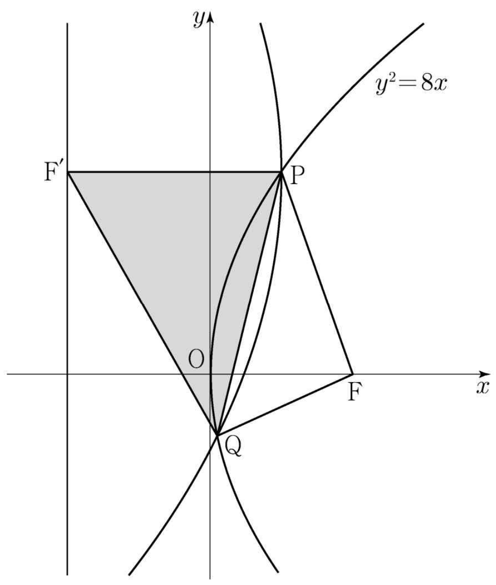
[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 29

13. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AB}}=k$이다. k^2의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 29

14. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



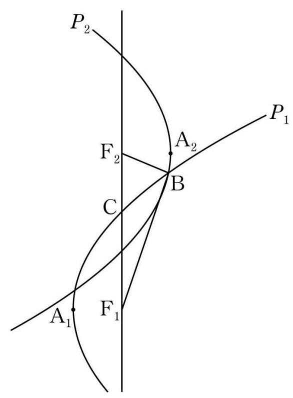
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 30

15. 그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 F_1F_2와 평행하고, 두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치한다.
두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 F_1F_2와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{A_1C}=5\sqrt{5}$

(나) $\overline{F_1B}-\overline{F_2B}=\frac{48}{5}$

삼각형 BF_2F_1의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오.
(단, $\angle F_1F_2B<90^\circ$)



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 28

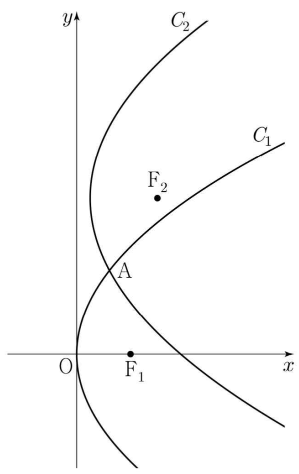
16. 실수 $p(p \geq 1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 4x, \quad C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x-f(p)\}$$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 할 때, $\overline{\mathrm{AF_1}}=\overline{\mathrm{AF_2}}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 27

17. 양수 p에 대하여 두 포물선 $x^2=8(y+2)$, $y^2=4px$가 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 포물선 $x^2=8(y+2)$의 준선에 내린 수선의 발 H와 포물선 $x^2=8(y+2)$의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PF}}=40$일 때, p의 값은?

① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$

④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

07 기하　　02 타원

01 타원의 방정식

01 타원의 방정식1 (방정식 세우기)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 24

18. 두 초점의 좌표가 $(0, 3)$, $(0, -3)$인 타원이 y축과 점 $(0, 7)$에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는?

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$
④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

07 기하　　02 타원

01 타원의 방정식

02 타원의 방정식2 (타원의 장단축과 초점)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 23

19. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 의 두 초점을 F, F$'$ 이라 할 때, 선분 FF$'$ 의 길이는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

07 기하

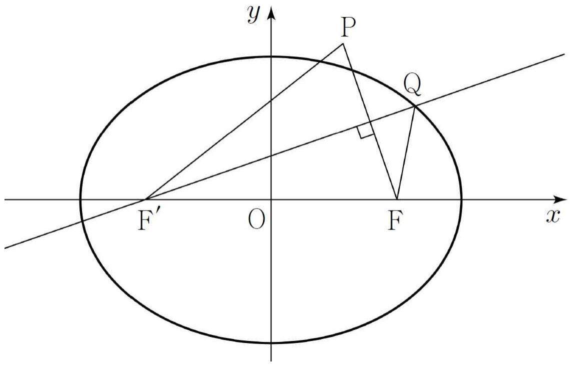
02 타원

02 타원의 정의 활용

01 정의 활용1 (타원의 두 정보)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 26

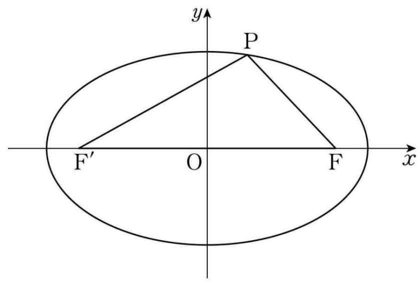
20. 그림과 같이 두 점 F$(\sqrt{7},\ 0)$, F$'(-\sqrt{7},\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$, $\overline{\mathrm{FP}}=2\sqrt{3}$을 만족시키는 점 P에 대하여 점 F$'$을 지나고 선분 FP에 수직인 직선이 타원과 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점을 Q라 할 때, 선분 FQ의 길이는?
(단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)



① 2　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 26

21. 그림과 같이 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF$'$, FF$'$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① 1　② $\dfrac{9}{8}$　③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{11}{8}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

07 기하

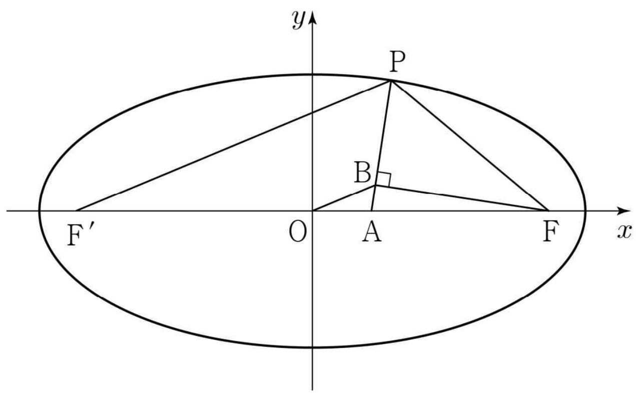
02 타원

02 타원의 정의 활용

02 정의 활용2 (타원의 한 정보)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 28

22. 그림과 같이 $F(6,\ 0)$, $F'(-6,\ 0)$을 두 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 $A\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 $\angle FPA=\angle F'PA$를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{OB}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.)



① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

07 기하

02 타원

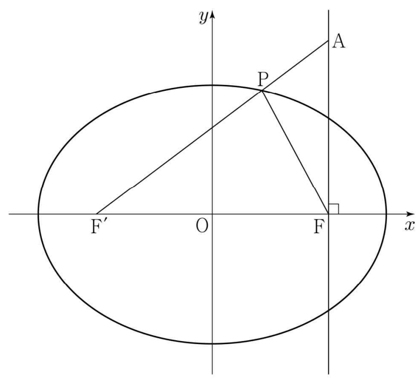
02 타원의 정의 활용

04 정의 활용4 (둘레의 길이 관련)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 25

23. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{AF'}=5$, $\overline{AF}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.)

① 8 ② $\dfrac{17}{2}$ ③ 9
④ $\dfrac{19}{2}$ ⑤ 10



07 기하

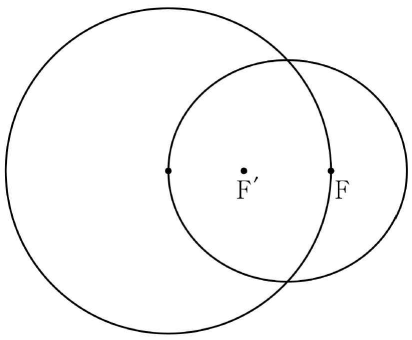
02 타원

02 타원의 정의 활용

05 정의 활용5 (원과 타원)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 28

24. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은?

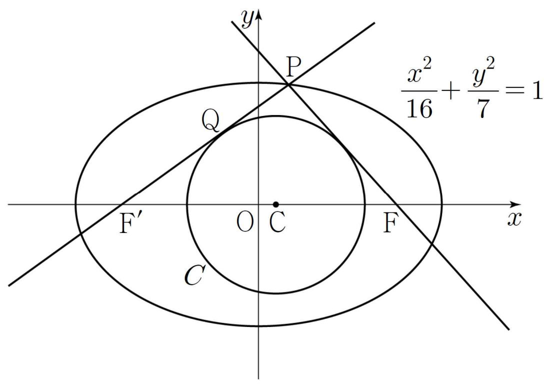


① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 30

25. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 선분 F′F 위에 있는 원 C가 있다. 원 C의 중심을 C, 직선 F′P가 원 C와 만나는 점을 Q라 할 때, $2\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$이다. $24\times\overline{\mathrm{CP}}$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

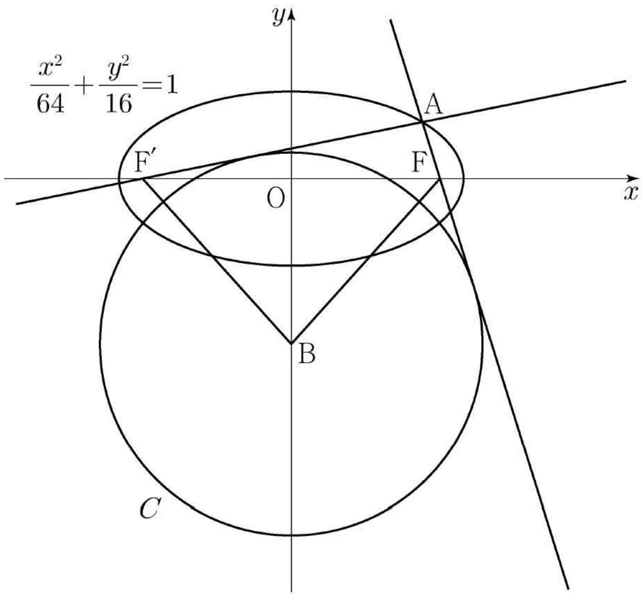


[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 26

26. 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는?

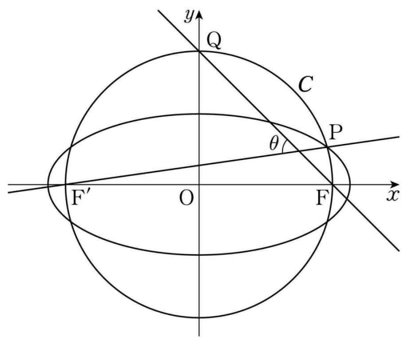
① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$

④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 28

27. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F$'$에 대하여 선분 FF$'$을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F$'$P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\frac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, a, b는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

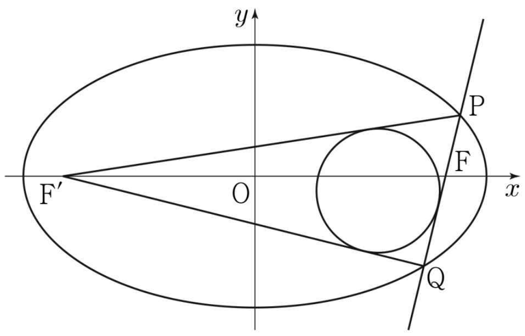


① $\frac{11}{64}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{13}{64}$

④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{15}{64}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 28

28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 타원 위의 점 중 제 1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF가 타원과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=1:4$이고 삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 내접원의 반지름의 길이가 2일 때, 양수 c의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{17}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{17}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$
④ $\frac{51}{8}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{17}}{5}$

07 기하 02 타원

02 타원의 정의 활용

06 정의 활용6 (포물선과 타원)

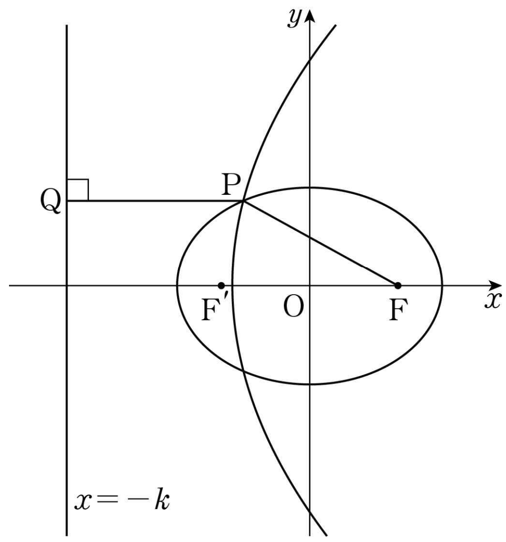
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 30

29. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k\,(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{F'FP})=\frac{7}{8}$

(나) $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{FF'}}$

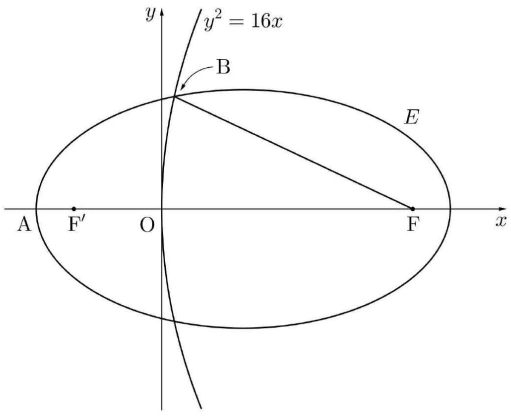
$c+k$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

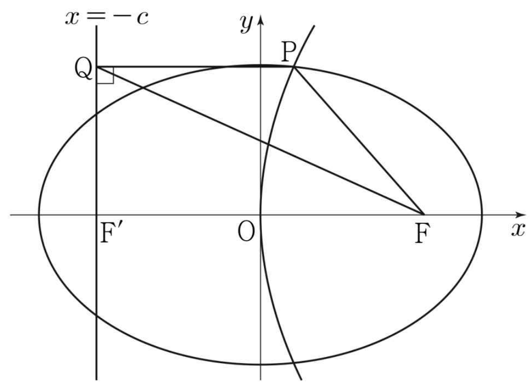
30. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 A$(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F$'$이 선분 AF위에 있는 타원 E가 있다. 포물선 $y^2=16x$가 타원 E와 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자.

$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{21}{5}$일 때, 타원 E의 장축의 길이는 k이다. $10k$의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 25

31. 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 꼭짓점이 원점 O이고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 있다. 타원과 포물선이 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 직선 $x=-c$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=8$이고 삼각형 FPQ의 넓이가 24일 때, 타원의 장축의 길이는?



① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

07 기하

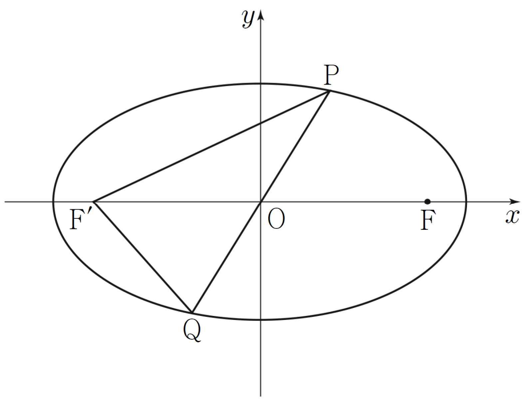
02 타원

02 타원의 정의 활용

07 정의 활용7 (대칭성)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 25

32. 좌표평면 위에 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$이 있다. 타원 위의 두 점 P, Q에 대하여 직선 PQ가 원점 O를 지나고 삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20일 때, 선분 OP의 길이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① $\frac{11}{3}$　② 4　③ $\frac{13}{3}$

④ $\frac{14}{3}$　⑤ 5

07 기하

03 쌍곡선

01 쌍곡선의 방정식

01 쌍곡선의 방정식1 (방정식 세우기)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 24

33. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 양수 c의 값은?

① 5　② 6　③ 7

④ 8　⑤ 9

07 기하 03 쌍곡선

01 쌍곡선의 방정식

02 쌍곡선의 방정식2 (초점과 주축 또는 점근선 구하기)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 25

34. 쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$
④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

07 기하 03 쌍곡선

01 쌍곡선의 방정식

03 쌍곡선의 방정식3 (초점과 주축 또는 점근선 조건)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 24

35. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.)

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 24

36. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 24

37. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.)

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$

④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

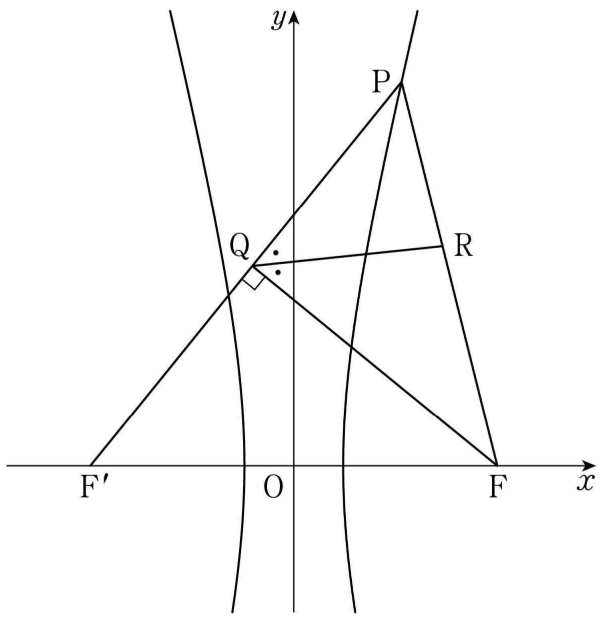
07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

01 정의 활용1 (쌍곡선의 두 정보)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 29

38. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, ∠FQP의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자.
$4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오.
(단, 점 F의 x좌표는 양수이고, $\angle F'PF<90°$이다.)



07 기하

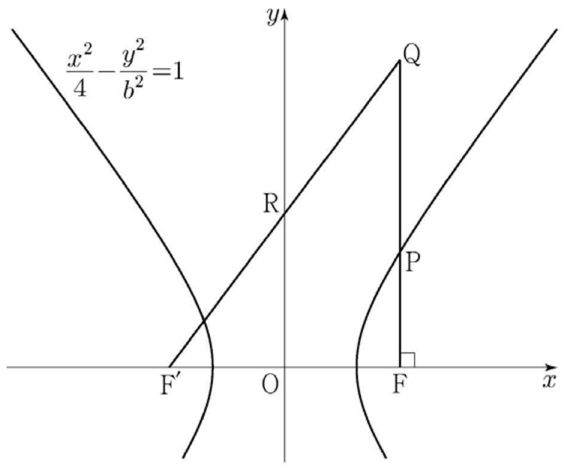
03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

02 정의 활용2 (쌍곡선의 한 정보)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 27

39. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 PF 위에 $\overline{\mathrm{QP}}:\overline{\mathrm{PF}}=5:3$이 되도록 점 Q를 잡는다. 직선 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$가 y축과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$이다. b^2의 값은? (단, b는 상수이고, 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.)



① $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ② $1+2\sqrt{5}$ ③ $\frac{3}{2}+2\sqrt{5}$

④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 28

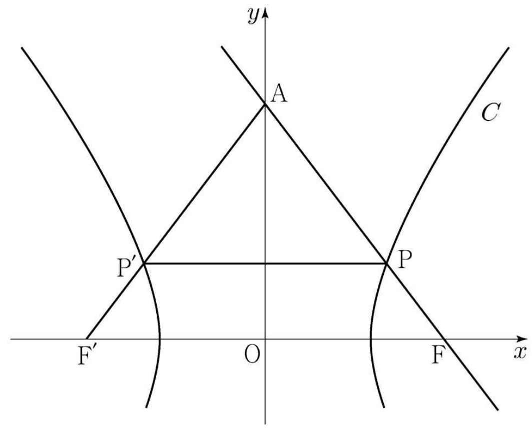
40. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF'과 만나는 점을 P'이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP}'}=5:6,\ \overline{\mathrm{PF}}=1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는?

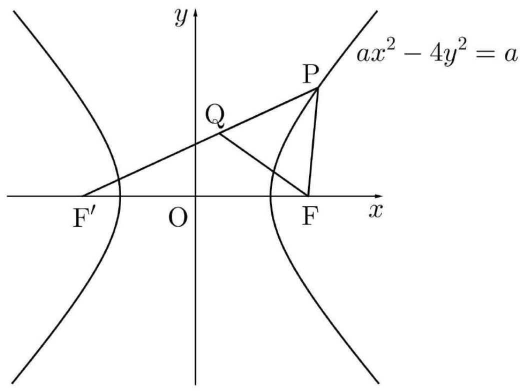
① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 27

41. 그림과 같이 두 초점이 F, F′ 인 쌍곡선 $ax^2-4y^2=a$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 선분 PF′ 위의 점 Q에 대하여 삼각형 PQF는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}-1$인 정삼각형이다. 상수 a의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

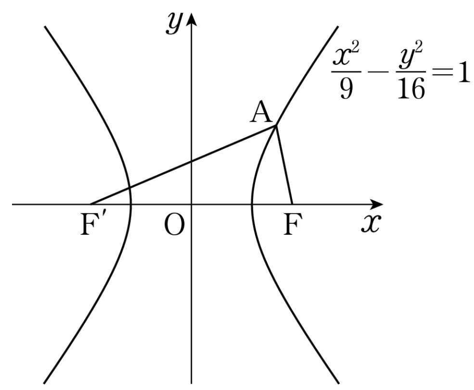
07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

04 정의 활용4 (둘레의 길이 관련)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 26

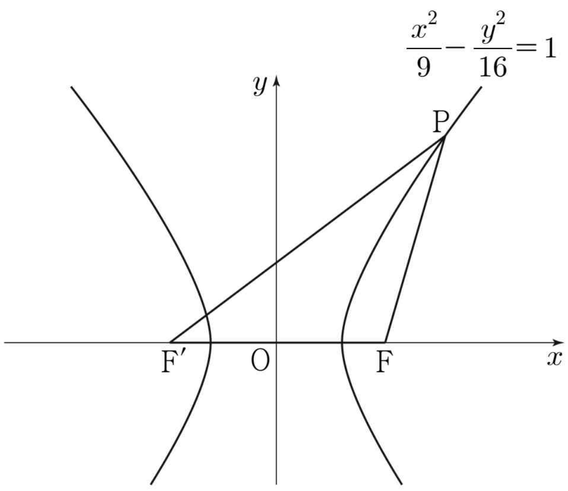
42. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′ 과 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24일 때, 삼각형 AF′F의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면의 점이다.)



① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{6}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 24

43. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{FP}=\overline{FF'}$일 때, 삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이는?



① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 29

44. 두 점 F, F'을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AF}<\overline{AF'}$
> (나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F'을 지난다.

선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF'과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

07 기하

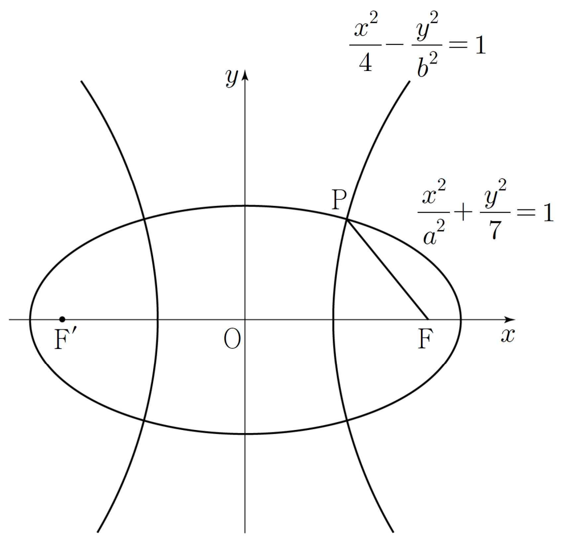
03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

07 정의 활용7 (타원과 쌍곡선)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 27

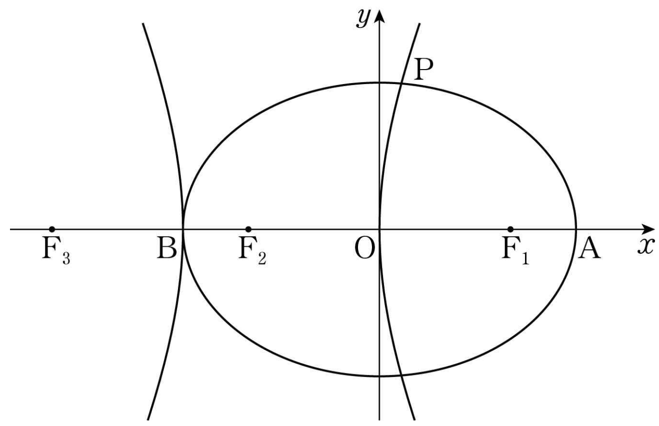
45. 그림과 같이 두 점 $F(c,\ 0)$, $F(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 29

46. 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



07 기하 04 이차곡선과접선

01 포물선과 접선

02 포물선과 접선2 (접점조건)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 24

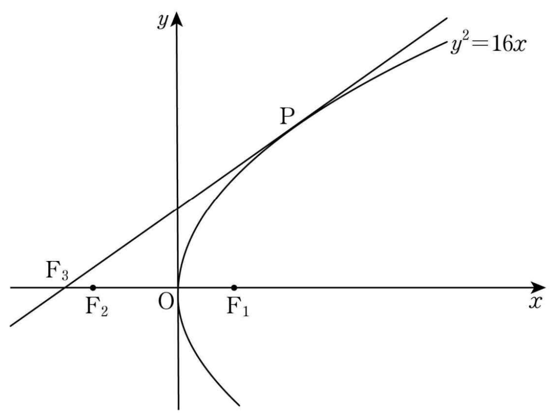
47. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 29

48. 두 점 $\mathrm{F}_1(4,\ 0)$, $\mathrm{F}_2(-6,\ 0)$에 대하여 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 중 제 1사분면에 있는 점 P가 $\overline{\mathrm{PF}_2}-\overline{\mathrm{PF}_1}=6$을 만족시킨다. 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 F_3이라 하면 두 점 F_1, F_3을 초점으로 하는 타원의 한 꼭짓점은 선분 PF_3 위에 있다. 이 타원의 장축의 길이가 $2a$일 때, a^2의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 29

49. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$에 대하여 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 $x=-p$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선 $x=-p$에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이 되도록 하는 상수 p의 값을 구하시오.

07 기하 04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

02 타원과 접선2 (접점조건)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 24

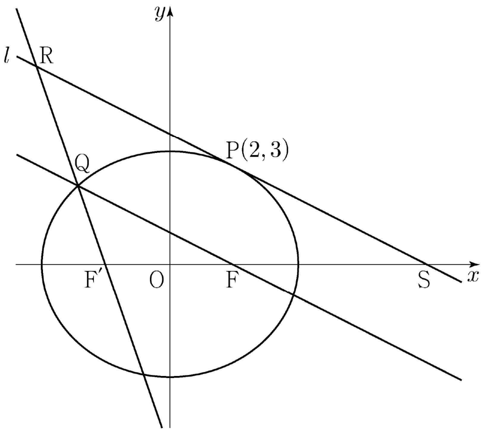
50. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은?

① 1 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 28

51. 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$위의 점 P$(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.
두 직선 F$'$Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이는?



① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 25

52. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.)

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

07 기하

04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

03 타원과 접선3 (기울기조건)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 26

53. 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=19$ 와 직선 l 은 제1사분면 위의 한 점에서 접하고, 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{19}{5}$ 이다. 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{5}{6}$　③ -1
④ $-\frac{7}{6}$　⑤ $-\frac{4}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 24

54. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하고 기울기가 2인 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

① $8\sqrt{2}$　② 12　③ $10\sqrt{2}$
④ 15　⑤ $12\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 25

55. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 과 두 점 $\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(0,-3)$이 있다. 이 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 k가 되도록 하는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은?

① $3\sqrt{2}-3$　② $6\sqrt{2}-7$　③ $3\sqrt{2}-2$
④ $6\sqrt{2}-6$　⑤ $6\sqrt{2}-5$

07 기하 04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

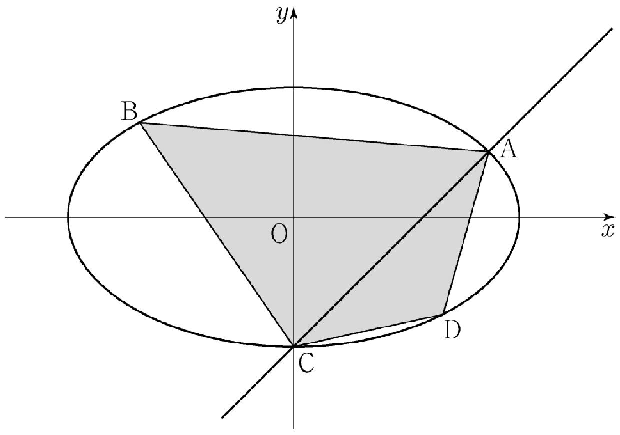
04 타원과 접선4 (길이 또는 넓이의 Mm)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 26

56. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



07 기하 04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

05 타원과 접선5 (곡선 밖의 점)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 26

57. y축 위의 점 A에서 타원 C: $\frac{x^2}{8}+y^2=1$에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 타원 C와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 점 A의 y좌표는 1보다 크다.)

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$

④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

07 기하 04 이차곡선과접선

03 쌍곡선과 접선

02 쌍곡선과 접선2 (접점조건)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 24

58. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 (4, 7)에서의 접선의 x절편은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 24

59. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, ab의 값은?
(단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 25

60. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선의 x절편이 $\frac{1}{3}$이다. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 할 때, 선분 PF의 길이는?

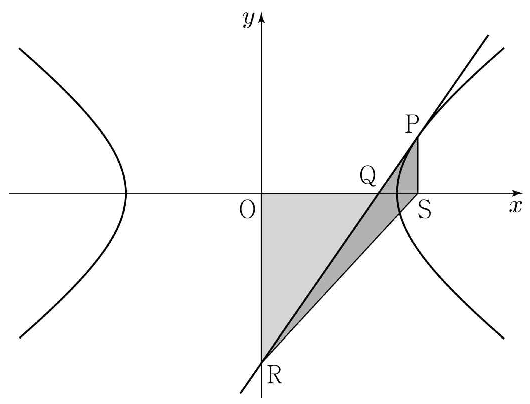
① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$

④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 27

61. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 P$(4,\ k)(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. S$(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자.

$A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.)



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 24

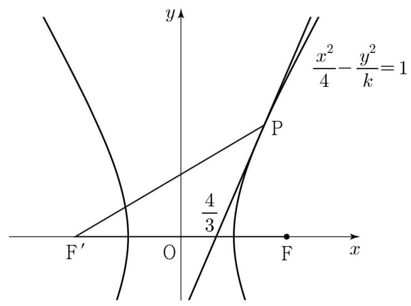
62. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 26

63. 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 양수 k의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 28

64. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다.
두 점 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$일 때, 상수 c의 값은?

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

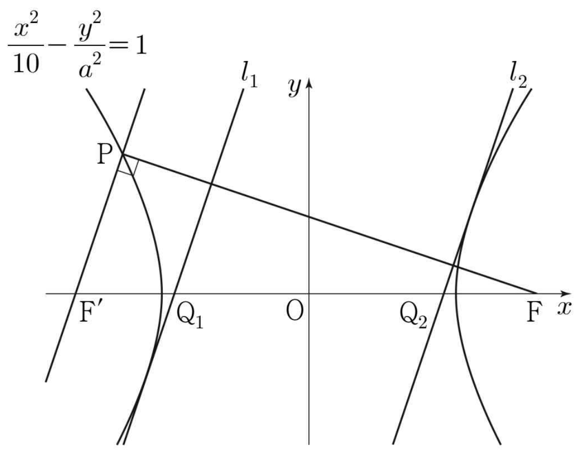
07 기하 04 이차곡선과접선

03 쌍곡선과 접선

03 쌍곡선과 접선3 (기울기조건)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 30

65. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{F'FP}$는 넓이가 15이고 $\angle\mathrm{F'PF}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 직선 $\mathrm{PF'}$과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$라 할 때, $\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, a는 양수이다.)



07 기하 04 이차곡선과접선

04 접선의 활용

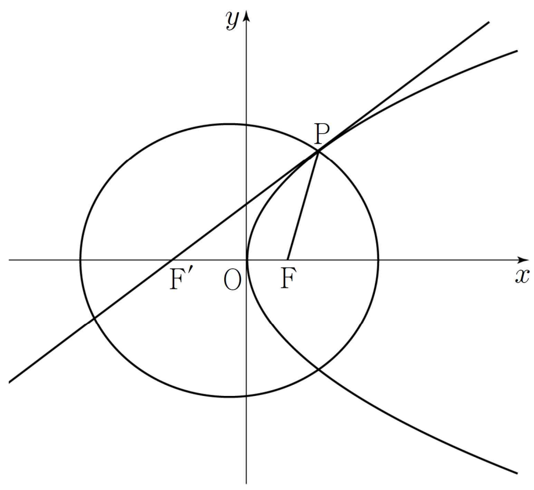
01 활용1 (두 개 이상의 이차곡선과 접선의 관계)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 28

66. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는?

① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14

④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15



07 기하 04 이차곡선과접선

04 접선의 활용

02 활용2 (공통접선)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 25

67. 양수 a에 대하여 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$과 포물선 $y^2=ax$에 동시에 접할 때, 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[기하] [01이차곡선] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

기백 3개년 2022.12.29

1. [정답] ②
2. [정답] ③
3. [정답] ⑤
4. [정답] ④
5. [정답] 6

6. [정답] ③
7. [정답] ②
8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] ⑤

11. [정답] ③
12. [정답] ⑤
13. [정답] 80
14. [정답] 23
15. [정답] 384

16. [정답] ①
17. [정답] ①
18. [정답] ⑤
19. [정답] ③
20. [정답] ①

21. [정답] ③
22. [정답] ③
23. [정답] ⑤
24. [정답] ③
25. [정답] 63

26. [정답] ②
27. [정답] ④
28. [정답] ③
29. [정답] 15
30. [정답] 66

31. [정답] ①
32. [정답] ②
33. [정답] ①
34. [정답] ④
35. [정답] ③

36. [정답] ④
37. [정답] ②
38. [정답] 32
39. [정답] ④
40. [정답] ②

41. [정답] ②
42. [정답] ④
43. [정답] ②
44. [정답] 128
45. [정답] ⑤

46. [정답] 12
47. [정답] ④
48. [정답] 54
49. [정답] 21
50. [정답] ⑤

51. [정답] ①
52. [정답] ④
53. [정답] ⑤
54. [정답] ⑤
55. [정답] ④

56. [정답] ⑤
57. [정답] ⑤
58. [정답] ③
59. [정답] ②
60. [정답] ①

61. [정답] ③
62. [정답] ②
63. [정답] ④
64. [정답] ①
65. [정답] 13

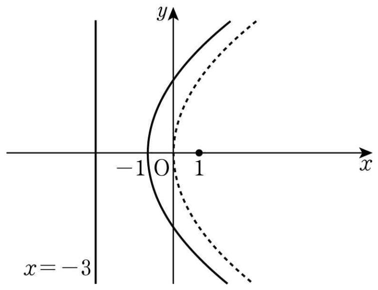
66. [정답] ⑤
67. [정답] ②

[기하] [01이차곡선] 교사평경 최근 3개년(해설)

기백 3개년 2022.12.29

1) [정답] ②

[해설]



꼭짓점이 점 $(-1, 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 초점은 $(1, 0)$이므로 구하는 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2=8(x+1)$, 즉 $y^2=8x+8$

$a=8$, $b=8$이므로

$a+b=16$

2) [정답] ③

[해설]

초점이 점 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 직선 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선의 방정식은 $y^2=\frac{4}{3}x$

이 포물선 위에 점 $(a, 2)$가 있으므로

$2^2=\frac{4}{3}\times a$

$\therefore\ a=3$

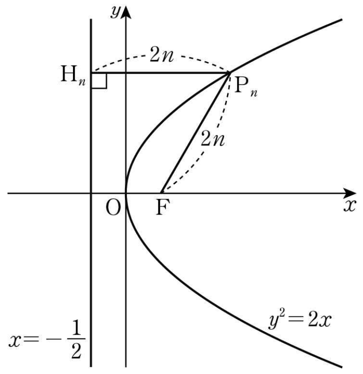
3) [정답] ⑤

[해설]

포물선 $y^2=2x$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고

준선은 직선 $x=-\frac{1}{2}$이다.

점 P_n에서 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$

이므로 점 P_n의 x좌표는 $2n-\frac{1}{2}$이다.

$y^2=2\left(2n-\frac{1}{2}\right)=4n-1$

에서 점 P_n의 y좌표는 $\sqrt{4n-1}$이다.

따라서 점 P_n의 좌표는 $\left(2n-\frac{1}{2}, \sqrt{4n-1}\right)$이고

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{4n-1}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(4n^2-2n+\frac{1}{4}\right)+(4n-1)}$

$=\sqrt{4n^2+2n-\frac{3}{4}}$

따라서

$\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2=\sum_{n=1}^{8}\left(4n^2+2n-\frac{3}{4}\right)$

$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}-8\times\frac{3}{4}$

$=882$

4) [정답] ④

[해설]

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{FA}}=8$

$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{HA}}-\overline{\mathrm{HC}}=8-p$

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OF}}=8-2p$

$\overline{\mathrm{AB}}=h$라 하면

사다리꼴 OFAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{(8-p)+p\}\times h=4h$

직각삼각형 FBA의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(8-2p)\times h=(4-p)h$$

$4h : (4-p)h=2 : 1$이므로 $p=2$

$\overline{FB}=4$이므로 직각삼각형 FBA에서

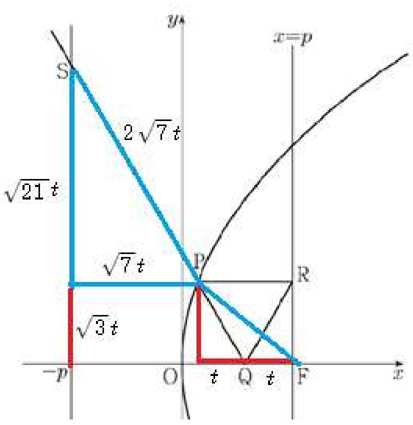
$$h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ACF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

5) [정답] 6

[해설]



그림에서 $\sqrt{21}t+\sqrt{3}t=\sqrt{21}$이므로

$$t=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}=\frac{7-\sqrt{7}}{6},\ \therefore a+b=6$$

6) [정답] ③

[해설]

두 점 A, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

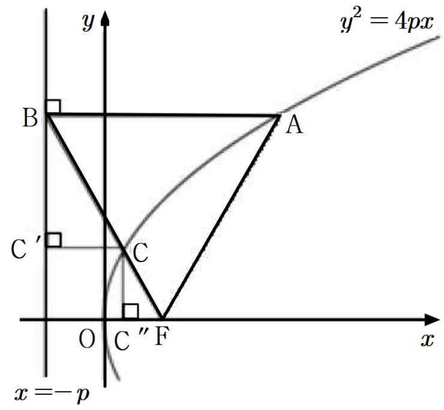
$$\overline{AB}=x_1+p$$

이때, $\overline{AB}=\overline{BF}$이므로

$$\overline{BF}=x_1+p \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 점 C에서 포물선의 점근선에 내린 수선의 발을 C′이라 하면

$$\overline{CF}=\overline{CC'}=x_2+p \quad \cdots\cdots ㉡$$



이때, $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$이므로 ㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}\overline{BC}+3\overline{CF}&=\overline{BF}+2\overline{CF}\\&=(x_1+p)+2(x_2+p)\\&=x_1+2x_2+3p\\&=6 \quad \cdots\cdots ㉢\end{aligned}$$

한편, $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF}=\overline{AB}$이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 그러므로 $\angle OFB=60°$

이때, $\overline{BF}\cos60°=2p$, $\overline{CF}\cos60°=p-x_2$이므로

$$(x_1+p)\times\frac{1}{2}=2p,\ (x_2+p)\times\frac{1}{2}=p-x_2$$

즉, $x_1=3p$, $x_2=\frac{1}{3}p$ $\quad \cdots\cdots ㉣$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$3p+\frac{2}{3}p+3p=6,\ \frac{20}{3}p=6$$

따라서 $p=\frac{9}{10}$

7) [정답] ②

[해설]

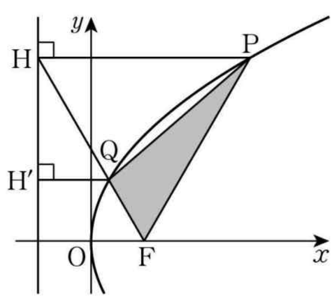
포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P와 y축 사이의 거리가 3이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 $2+3=5$

따라서 $\overline{PF}=5$

8) [정답] ①

[해설]



점 Q에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라

하면 점 Q는 포물선 위의 점이므로 $\overline{QF}=\overline{QH'}$

조건 (가)에서 $\overline{QF}:\overline{QH}=1:2$이므로

$\cos(\angle HFO)=\cos(\angle HQH')=\dfrac{\overline{QH'}}{\overline{QH}}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 $\angle HFO=60^\circ$

$\overline{PH}\,/\!/\,\overline{OF}$이므로 $\angle PHF=\angle HFO=60^\circ$

이때 삼각형 PHF는 $\overline{PF}=\overline{PH}$인 이등변삼각형이므로

$\angle PFH=\angle PHF=60^\circ$

$\angle FPH=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$이므로

삼각형 PHF는 정삼각형이다.

이때 초점 F의 좌표가 $(p,0)$이므로

$\overline{FH}=4p$

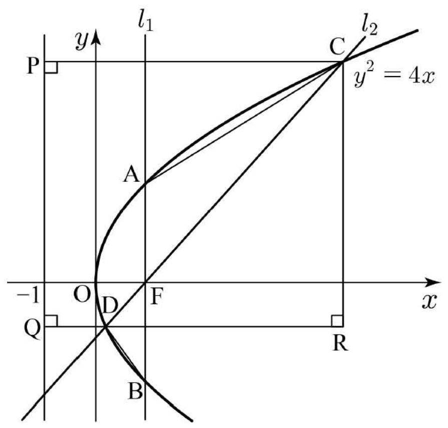
조건 (나)에서 삼각형 PQF의 넓이는 정삼각형 PHF의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4p)^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $p^2=2$

따라서 $p>0$이므로 $p=\sqrt{2}$

9) [정답] ③

[해설]



$\angle AFC=\angle DFB$이고 $\overline{FA}=\overline{FB}$이다.

삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{FC}\times\sin(\angle AFC)$$
$$=5\times\frac{1}{2}\times\overline{FB}\times\overline{FD}\times\sin(\angle DFB)$$
$$\overline{FC}=5\overline{FD}$$

두 점 C, D에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 C를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 QD가 만나는 점을 R라 하자.

$\overline{FD}=s$라 하면 $\overline{QD}=\overline{FD}=s$, $\overline{PC}=\overline{FC}=5s$

$\overline{DR}=\overline{QR}-\overline{QD}=4s$, $\overline{CD}=6s$에서

$$\overline{CR}=2\sqrt{5}s$$

따라서 $m=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{DR}}=\dfrac{2\sqrt{5}s}{4s}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

10) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{BI}=3k$라 하면 $\dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BI}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$에서 $\overline{BJ}=2\sqrt{15}k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{BI}=\overline{BF}=3k$, $\overline{AF}=\overline{AH}=8\sqrt{5}-3k$

$\overline{JH}=3k$이므로 $\overline{AJ}=8\sqrt{5}-6k$

직각삼각형 ABJ에서

$(8\sqrt{5})^2=(2\sqrt{15}k)^2+(8\sqrt{5}-6k)^2$

$96k^2-96\sqrt{5}k=0$, $96k(k-\sqrt{5})=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AJ}=2\sqrt{5}$, $\overline{BJ}=10\sqrt{3}$, $\overline{AH}=5\sqrt{5}$이고

$\triangle ABJ\backsim\triangle ACH$이므로

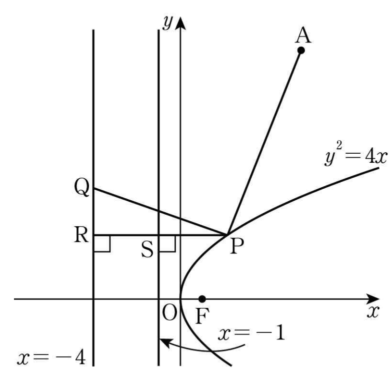
$\overline{AJ}:\overline{JB}=\overline{AH}:\overline{HC}$

$2\sqrt{5}:10\sqrt{3}=5\sqrt{5}:\overline{HC}$

$\therefore\overline{HC}=25\sqrt{3}$

11) [정답] ③

[해설]



포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1,0)$이다. 점 P에서 직선 $x=-4$와 포물선의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면

$\overline{PR}=\overline{PS}+\overline{SR}=\overline{PS}+3$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PS}=\overline{PF}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}&\ge\overline{AP}+\overline{PR}\\&=\overline{AP}+\overline{PS}+3\\&=\overline{AP}+\overline{PF}+3\\&\ge\overline{AF}+3\\&=\sqrt{5^2+12^2}+3\end{aligned}$$

$=16$

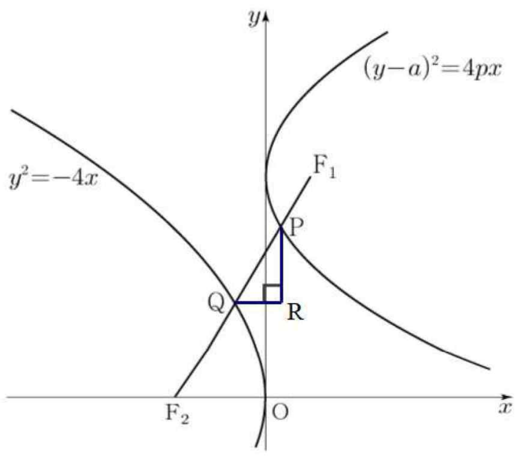
따라서 점 P는 선분 AF와 포물선 $y^2=4x$가 만나는 점이고, 이 교점에서 직선 $x=-4$에 내린 수선의 발이 Q일 때, $\overline{AP}+\overline{PQ}$는 최솟값 16을 가진다.

12) [정답] ⑤

[해설]
두 점 F_1, F_2의 좌표가 각각 $F_1(p,\ a)$, $F_2(-1,\ 0)$이고, $\overline{F_1F_2}=3$이므로

$(p+1)^2+a^2=9$ …… ㉠

그림과 같이 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.



직선 PQ의 기울기는 직선 F_1F_2의 기울기와 같은 $\dfrac{a}{p+1}$이므로 직각삼각형 PQR에서 양수 t에 대하여 $\overline{PR}=at$, $\overline{QR}=(p+1)t$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ}=1$이므로 $a^2t^2+(p+1)^2t^2=1$에서

$t^2=\dfrac{1}{a^2+(p+1)^2}=\dfrac{1}{9}$

즉, $t=\dfrac{1}{3}$

한편, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\overline{PF_1}=p+x_1$, $\overline{QF_2}=1-x_2$, $\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=2$이고

$x_1-x_2=(p+1)t=\dfrac{1}{3}(p+1)$이므로

$(p+x_1)+(1-x_2)=2$에서

$p=1-(x_1-x_2)$

$=1-\dfrac{1}{3}(p+1)$

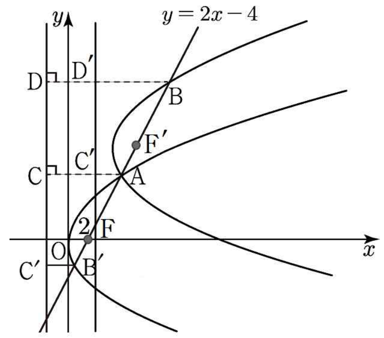
즉, $p=\dfrac{1}{2}$

㉠에서 $\left(\dfrac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$이므로 $a^2=\dfrac{27}{4}$

따라서 $a^2+p^2=\dfrac{27}{4}+\dfrac{1}{4}=7$

13) [정답] 80

[해설]



$y^2=8x$와 $y=2x-4$의 교점을 A와 B′이고,

$y^2=8x$와 $y=2x-4$을 연립하여 풀면

$(2x-4)^2=8x,\ 4x^2-24x+16=0$

$x^2-6x+4=0$

이차방정식의 두 근을 x_1, x_2라 하면 $x=3\pm\sqrt{5}$

따라서 B′의 x좌표는 $3-\sqrt{5}$, A의 x 좌표는 $3+\sqrt{5}$

그런데, 포물선 $y^2=8x$이 x축으로 a만큼 y축으로 $2a$만큼 평행이동한 포물선은 $(y-2a)^2=8(x-a)$이고, 각각의 초점이 F(2, 0), F′(2+a, 2a)가 $y=2x-4$위에 있으므로 점 B′가 x축으로 a만큼 이동한 점이 A가 된다.

따라서 $a=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$ …… ㉠

또, 포물선 정의에 의해서 $\overline{AC'}=\overline{AF'}$, $\overline{BD'}=\overline{BF'}$

그리고, $\overline{DD'}=\overline{CC'}=a$이므로

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{AC'}+\overline{CC'}+\overline{BD'}+\overline{DD'}-\overline{AB}$

$=\overline{AB}+\overline{CC'}+\overline{DD'}-\overline{AB}$

$=\overline{CC'}+\overline{DD'}$

$=2a$

㉠을 대입하면 $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=4\sqrt{5}$이므로 $k=4\sqrt{5}$

$\therefore\ k^2=80$

14) [정답] 23

[해설]
포물선 $y^2=8x$의 초점은 F(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P의 x좌표를 $a(0<a<2)$라 하면

$P(a,\ 2\sqrt{2a})$

$F'(-2,\ 2\sqrt{2a})$

포물선의 성질에 의해

$\overline{PF}=\overline{PF'}=2+a$

한편, 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로

하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2a})^2=-4(2+a)(x-a)$

이 포물선의 준선의 방정식은 $x=2a+2$

점 Q에서 두 직선 $x=-2$, $x=2a+2$에 내린 수선의 발을

각각 R, S라 하면

포물선의 성질에 의해

$\overline{QF}=\overline{QR}$

$\overline{QF'}=\overline{QS}$

이므로

$\overline{QF}^2+\overline{QF'}=\overline{QR}+\overline{QS}=\overline{RS}=2a+4$

사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=12$에서

$2\overline{PF'}+\overline{RS}=12$

$2(2+a)+(2a+4)=12$

$4a=4$

$a=1$

이때, P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이고

점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

이다.

두 포물선

$y^2=8x \cdots\cdots$ ㉠

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1) \cdots\cdots$ ㉡

이 만나는 점 Q의 y좌표를 구해 보자.

㉠에서

$x=\dfrac{y^2}{8}$

$x=\dfrac{y^2}{8}$을 ㉡에 대입하면

$(y-2\sqrt{2})^2=-12\left(\dfrac{y^2}{8}-1\right)$

$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$

$(y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2})=0$

$y=2\sqrt{2}$ 또는 $y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

점 Q의 y좌표는 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$이다.

점 Q에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PF'}=2-(-1)=3$

$\overline{QH}=2\sqrt{2}-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$

삼각형 PF′Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QH}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$

$=\dfrac{18}{5}\sqrt{2}$

따라서 $p=5$, $q=18$이므로

$p+q=5+18=23$

15) [정답] 384

[해설]

좌표평면에서 점 F_1을 원점, 직선 A_1F_1을 x축, 직선 F_1F_2를 y축이라 하자.

포물선 P_1의 방정식을 $y^2=4p(x+p)(p>0)$이라 하면

$\overline{A_1F_1}=p$, $\overline{F_1C}=2p$에서 $\overline{A_1C}=\sqrt{p^2+(2p)^2}=p\sqrt{5}$

조건 (가)에서 $p\sqrt{5}=5\sqrt{5}$이므로 $p=5$

두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $A_1F_1A_2F_2$는 평행사변형이다.

포물선 P_1의 준선 l_1의 방정식은 $x=-10$이고 포물선 P_2의 준선 l_2의 방정식은 $x=10$이다.

점 B에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{BH_1}+\overline{BH_2}=20 \cdots\cdots$ ㉠

점 B는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{F_1B}=\overline{BH_1}$, $\overline{F_2B}=\overline{BH_2}$

조건 (나)에서

$\overline{BH_1}-\overline{BH_2}=\dfrac{48}{5} \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BH_1}=\dfrac{74}{5}$, $\overline{BH_2}=\dfrac{26}{5}$

점 B에서 직선 F_1F_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=10-\overline{BH_2}=\dfrac{24}{5}$

직각삼각형 BF_2H에서

$\overline{F_2H}^2=\overline{F_2B}^2-\overline{BH}^2$

$=\left(\overline{F_2B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_2B}+\overline{BH}\right)$

$=\left(\dfrac{26}{5}-\dfrac{24}{5}\right)\times\left(\dfrac{26}{5}+\dfrac{24}{5}\right)$

$=4$

이므로 $\overline{F_2H}=2$

직각삼각형 F_1BH에서

$\overline{F_1H}^2=\overline{F_1B}^2-\overline{BH}^2$

$=\left(\overline{F_1B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_1B}+\overline{BH}\right)$

$=\left(\frac{74}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{74}{5}+\frac{24}{5}\right)$

$=196$

이므로 $\overline{F_1H}=14$

$\overline{F_1F_2}=\overline{F_1H}+\overline{F_2H}=14+2=16$

그러므로 삼각형 BF_2F_1의 넓이 S는

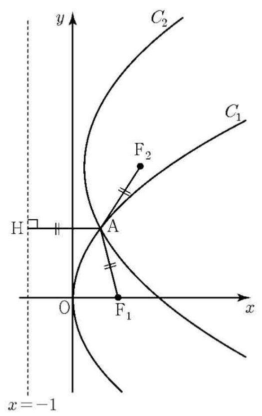
$S=\frac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times16\times\frac{24}{5}=\frac{192}{5}$

따라서

$10S=10\times\frac{192}{5}=384$

16) [정답] ①

[해설]



A에서 포물선 C_1의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AF_1}=\overline{AH}=\overline{AF_2}$에서 포물선 C_2의 준선이 포물선 C_1의 준선과 같다.

즉, C_2의 준선 $x=-p+f(p)$이 $x=-1$이므로

$-p+f(p)=-1$이다.

$(p+a)^2-p+1=0$

$p^2+(2a-1)p+a^2+1=0$

이 식을 만족하는 p가 오직 하나이므로 판별식 $D=0$이다.

따라서, $D=(2a-1)^2-4a^2-4=0$에서 $a=-\frac{3}{4}$이다.

17) [정답] ①

[해설]

포물선 $x^2=8(y+2)$에서

초점 F의 좌표는 $(0,0)$, 준선의 방정식은 $y=-4$

점 P의 좌표를 $(a,b)(a>0, b>0)$이라 하자.

점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{PF}=\overline{PH}$

$\overline{PH}+\overline{PF}=40$에서 $\overline{PF}=\overline{PH}=20$

$\overline{PH}=|b-(-4)|=20$에서 $b=16$

$\overline{PF}=\sqrt{a^2+16^2}=20$에서 $a=12$

점 $P(12, 16)$은 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$16^2=48p$이다.

따라서 $p=\frac{16}{3}$

18) [정답] ⑤

[해설]

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$이라 하자. 두 초점의 좌표가 $(0,3)$, $(0,-3)$이므로 $b^2-a^2=9$ …… ㉠

타원이 y축과 만나는 점 $(0,7)$은 장축의 한 끝점이므로 $b=7$

㉠에서 $a=2\sqrt{10}$

따라서 타원의 단축의 길이는

$2a=4\sqrt{10}$

19) [정답] ③

[해설]

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점의 좌표는

$(4,0)$, $(-4,0)$이므로 $\overline{FF'}=8$

20) [정답] ①

[해설]

직선 F′Q와 직선 FP가 만나는 점을 R라 하자.

직선 F′Q가 선분 FP를 수직이등분하므로

$\overline{PR}=\overline{FR}=\sqrt{3}$

삼각형 FRF′에서 $\overline{FF'}=2\sqrt{7}$, $\overline{FR}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{F'R}=5$

장축의 길이가 8이므로

$\overline{F'Q}+\overline{QF}=\overline{F'R}+\overline{RQ}+\overline{QF}=8$

$\overline{FQ}=a$라 하면 $\overline{RQ}=3-a$

삼각형 FQR에서 $a^2=(3-a)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, $a=2$

따라서 선분 PQ의 길이는 2

21) [정답] ③

[해설]

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$

이고 장축의 길이는 10이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10,\ \overline{FF'}=2\times4=8$ …… ㉠

세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{FF'}$…… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PF}=2(10-\overline{PF})-8$

$\overline{PF}=4$이므로 $\overline{PF'}=6$

$\overline{PF'}<\overline{FF'}$이므로 점 P의 x좌표를 t라 할 때,

$0<t<4$

점 P에서 선분 FF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HF}=4-t,\ \overline{HF'}=4+t$

$\overline{PH}^2=\overline{PF'}^2-\overline{HF'}^2=\overline{PF}^2-\overline{HF}^2$에서

$6^2-(4+t)^2=4^2-(4-t)^2$

$t=\frac{5}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

22) [정답] ③

[해설]

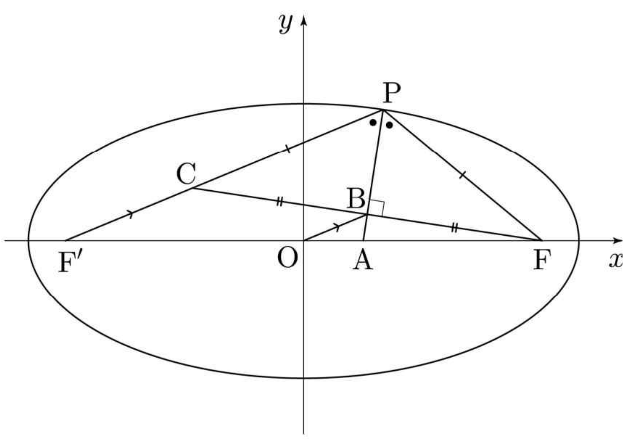
$\overline{AF}=\frac{9}{2},\ \overline{AF'}=\frac{15}{2}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF}:\overline{PF'}=3:5$

$\overline{PF}=3k,\ \overline{PF'}=5k(k>0)$이라 하자.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8k=2a$

그러므로 $a=4k$



직선 BF와 선분 PF′이 만나는 점을 C라 하면 각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로 만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다. 그러므로 $\overline{BC}=\overline{BF}$ 두 삼각형 FBO와 FCF′에서 $\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$ 두 삼각형 FBO, FCF′은 서로 닮음이므로

$\overline{OB}:\overline{F'C}=1:2\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC'}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$

$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}$

$k=\sqrt{3},\ a=4\sqrt{3}$

$c^2=a^2-b^2$이므로 $36=48-b^2$

$b^2=12,\ b=2\sqrt{3}$

따라서 $a\times b=24$

23) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AF'}=5,\ \overline{AF}=3$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FF'}^2=\overline{AF'}^2=-\overline{AF}^2=5^2-3^2=16$

$\therefore\ \overline{FF'}=4$

타원의 두 초점의 좌표를 각각 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$

$(c>0)$이라 하면 $2c=4$이므로 $c=2$이고,

타원의 성질에 의하여 $c^2=a^2-5$이므로 $a^2=9$이다.

$\therefore\ a=3$

타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 $2a$와 같으므로 6이다.

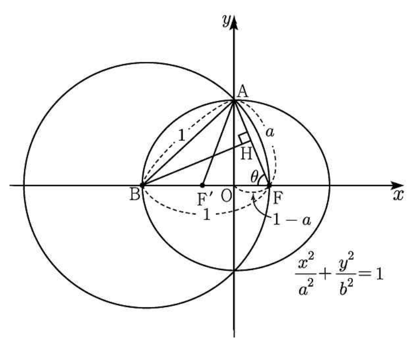
따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$(\overline{PF'}+\overline{PF})+\overline{FF'}=6+4=10$

이다.

24) [정답] ③

[해설]



두 초점 F, F′의 중점을 O라 하고 점 O를 타원의 중심으로 하고 두 초점이 x축 위에 놓여있는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

위의 그림과 같이 y축 위에 있는 타원의 한 꼭짓점을 A, x축 위에 있는 타원의 한 꼭짓점을 B, 점 B에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하자.

타원의 정의에 의해 거리의 합이 $2a$이므로 $\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$

그런데, $\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로 $\overline{AF}=a$

또, $\triangle$ABF는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HF}}=\frac{2}{a}$

$\angle\mathrm{AFO}=\theta$라 하면 $\triangle$BHF와 $\triangle$AOF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{FH}}}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}$이므로 $\frac{\frac{a}{2}}{1}=\frac{1-a}{a}$

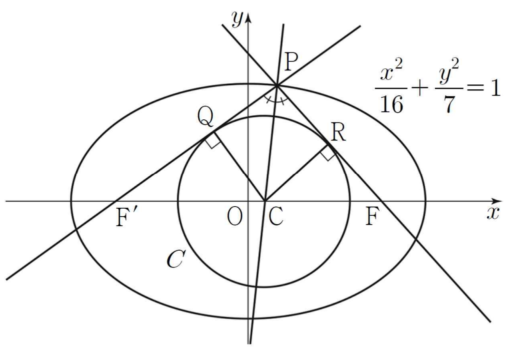
즉, $\frac{a}{2}=\frac{1-a}{a}$에서 $a^2=2-2a$

$\therefore a^2+2a-2=0$

$\therefore\ a=\sqrt{3}-1(\because\ a>0)$

25) [정답] 63

[해설]



$c^2=16-7=9,\ c=3$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c=6$

직선 FP가 원 C와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{\mathrm{PQ}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{PQ}}=2a$이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}=a$

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RF}}$이고, $\angle\mathrm{PRC}=90°$이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{CP}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{FC}}$에서 $\overline{\mathrm{F'C}}=6-l$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}$이고

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{QF'}}=8-3a$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$에서 $a<2$ …… ㉠

삼각형 FPF′에서 $\angle\mathrm{F'PC}=\angle\mathrm{CPF}$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'C}}:\overline{\mathrm{CF}}$

$(8-2a):2a=(6-l):l$에서 $l=\frac{3}{2}a$ …… ㉡

점 Q는 점 C에서 선분 PF′에 내린 수선의 발이므로

$\overline{\mathrm{F'C}}^2-\overline{\mathrm{F'Q}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2$

$(6-l)^2-(8-3a)^2=l^2-a^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의해 $4a^2-15a+14=0$

$(a-2)(4a-7)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{4}$

㉠에 의해 $a=\frac{7}{4},\ l=\frac{21}{8}$

따라서 $24\times\overline{\mathrm{CP}}=63$

26) [정답] ②

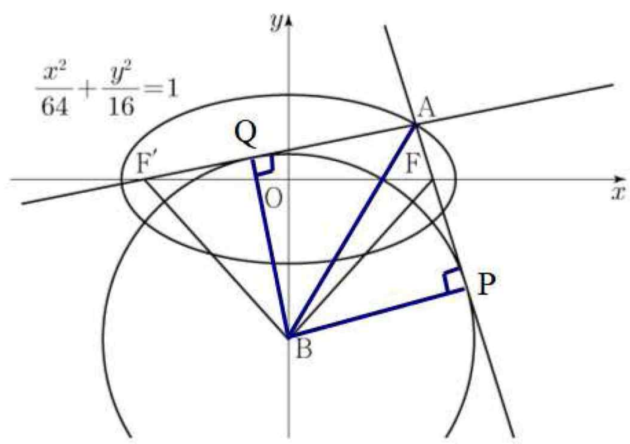
[해설]

$\overline{\mathrm{AF}}=p,\ \overline{\mathrm{AF'}}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times 8=16$

원 C가 두 직선 AF, AF′과 접하는 두 점을 각각 P, Q, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=r$



사각형 AFBF′의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF′으로 나누어 생각하면

$\frac{1}{2}\times p\times r+\frac{1}{2}\times q\times r=72$

따라서

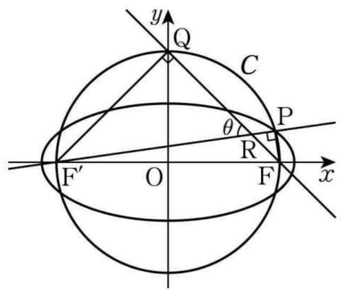
$r=72\times\frac{2}{p+q}$

$=72\times\frac{2}{16}$

$=9$

27) [정답] ④

[해설]



두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고

$\cos(\angle QRF')=\cos(\angle PRF)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}$

$\overline{QR}=3t(t>0)$이라 할 때

$\overline{RF'}=\dfrac{\overline{QR}}{\cos\theta}=5t,$

$\overline{QF}=\overline{QF'}=\overline{RF'}\sin\theta=4t,$

$\overline{RF}=\overline{QF}-\overline{QR}=4t-3t=t,$

$\overline{RP}=\overline{RF}\cos\theta=\dfrac{3}{5}t$

$\overline{PF}=\overline{RF}\sin\theta=\dfrac{4}{5}t$

점 P는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{RF'}+\overline{RP}+\overline{PF}$

$=5t+\dfrac{3}{5}t+\dfrac{4}{5}t$

$=\dfrac{32}{5}t$

$2a=\dfrac{32}{5}t$에서 $a=\dfrac{16}{5}t$

점 F의 좌표를 $(c,\ 0)(c>0)$이라 할 때

$\overline{FF'}=\sqrt{2}\times\overline{QF}$에서 $c=2\sqrt{2}t$

$b^2=a^2-c^2=\dfrac{256}{25}t^2-8t^2=\dfrac{56}{25}t^2$

따라서 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{\frac{56}{25}t^2}{\frac{256}{25}t^2}=\dfrac{7}{32}$

28) [정답] ③

[해설]

$\overline{OQ}=\overline{OF}$에서 점 Q는 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle FQF'=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{FQ}=k$라 하면 $\overline{FQ}:\overline{F'Q}=1:4$에서 $\overline{F'Q}=4k$이고

타원의 장축의 길이는 $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=5k$

삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이는 2이므로

삼각형 PF′Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{F'Q}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times2\times(\overline{F'P}+\overline{F'Q}+\overline{PQ})$

$\dfrac{1}{2}\times4k\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times2\times\{\overline{F'P}+\overline{F'Q}+(\overline{PF}+\overline{FQ})\}$

$2k\times\overline{PQ}=(\overline{F'P}+\overline{PF})+(\overline{F'Q}+\overline{FQ})$

$=5k+5k$

$=10k$

이므로 $\overline{PQ}=5$

$\overline{PF}=\overline{PQ}-\overline{FQ}=5-k,\ \overline{F'P}=5k-(5-k)=6k-5$

이므로 직각삼각형 PF′Q에서

$(6k-5)^2=(4k)^2+5^2$

$20k^2-60k=20k(k-3)=0,\ k=3$

따라서 직각삼각형 F′QF에서

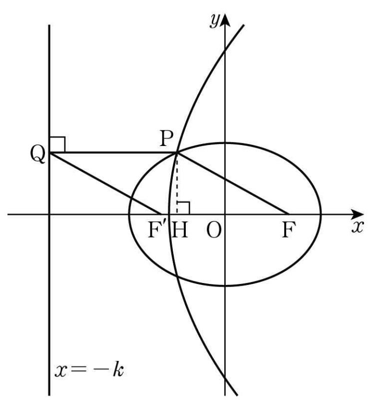
$\overline{F'F}^2=\overline{F'Q}^2+\overline{FQ}^2$

$(2c)^2=12^2+3^2=153$이므로

$c^2=\dfrac{153}{4},\ c=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

29) [정답] 15

[해설]



점 F가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP}=\overline{PQ}$이다.

조건 (나)의 $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$에서

$\overline{F'Q}=\overline{FF'}$

두 직선 FF′, PQ가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, F′FQ에서

$\angle PQF=\angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, F′FQ는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP=\angle PQF=\angle F'FQ=\angle F'QF$

이고, 선분 FQ는 공통이므로

두 삼각형 PQF, F′FQ는 서로 합동이다.

즉 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{FF'}}$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=12-2c$

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2=(2c)^2+(2c)^2-2\times(2c)^2\times\cos(\angle\mathrm{F'FP})$

$c^2-16c+48=0$

$(c-4)(c-12)=0$

장축의 길이가 12이므로 $c<6$에서 $c=4$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{FP}}=8$에서

$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FP}}\times\cos(\angle\mathrm{F'FP})=7$

$\overline{\mathrm{FH}}=7$에서 점 H의 x좌표는 $4-7=-3$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FP}}=8$에서 점 H의 x좌표는 $-k+8$이므로

$-3=-k+8$, 즉 $k=11$

따라서 $c+k=15$

30) [정답] 66

[해설]

$y^2=16x$의 초점 F(4, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다. 점 A$(-2,\ 0)$을 지나고 초점이 선분 AF 위에 있으므로 점 A는 꼭짓점이다. 타원과 포물선의 교점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BF}}$이다.

그러므로 점 B의 x좌표는 $-4+\dfrac{21}{5}=\dfrac{1}{5}$이다.

그러므로 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{\sqrt5}\right)$

중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 F(4, 0)이고 중심에서 거리가 $4-a$이므로 $\mathrm{F'}(2a-4,\ 0)$, $\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}$가 장축의 길이이므로 장축의 길이는 $(a+2)\times2$이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BF'}}=2a+4-\frac{21}{5}=2a-\frac{1}{5}$$

$$\sqrt{\left(2a-4-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt5}\right)^2}=2a-\frac{1}{5}$$

$$\left(2a-\frac{21}{5}\right)^2+\frac{16}{5}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$$

$$4a^2-\frac{84}{5}a+\frac{441}{25}+\frac{80}{25}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$$

$$\frac{520}{25}=16a\qquad\therefore\ a=\frac{13}{10}$$

$$\therefore\ 10k=20a+40=26+40=66$$

31) [정답] ①

[해설]

직선 $x=-c$는 포물선의 준선이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FP}}=8$

삼각형 FPQ의 넓이가 24이고 $\angle\mathrm{F'QP}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times8\times\overline{\mathrm{F'Q}}=24$에서 $\overline{\mathrm{F'Q}}=6$

직각삼각형 PQF′에서 $\overline{\mathrm{F'P}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=8+10=18$

32) [정답] ②

[해설]

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$

삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{OP}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}=4$

33) [정답] ①

[해설]

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하자.

주축의 길이가 8이므로 $2a=8$에서

$a=4$

한 점근선의 기울기가 $\dfrac{3}{4}$이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$에서

$b=3$

$c^2=a^2+b^2=4^2+3^2=25$

$c>0$이므로 $c=5$

34) [정답] ④

[해설]

$4x^2-8x-y^2-6y-9=0$에서

$4(x-1)^2-(y+3)^2=4$

$(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$

쌍곡선 $(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $y-(-3)=2(x-1)$, $y=2x-5$

직선 $y=2x-5$의 x절편, y절편이 각각 $\frac{5}{2}$, -5이다. 따라서 직선 $y=2x-5$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5=\frac{25}{4}$

35) [정답] ③

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1$의 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},\ 0)$이므로

$a^2+6=18 \qquad a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

36) [정답] ④

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{4}{a}x$

이때, 점근선 중 하나의 기울기가 3이므로 $a>0$에서 $\frac{4}{a}=3$

따라서 $a=\frac{4}{3}$

37) [정답] ②

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이므로

$2a=6$

$a=3$ ……㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

이때, $a>0,\ b>0$이므로

$\frac{b}{a}=2$

$b=2a$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=2\times 3=6$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을

$F(c,\ 0),\ F(-c,\ 0)((c>0)$

이라 하면

$c^2=a^2+b^2$

$=3^2+6^2$

$=45$

$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$\overline{FF'}=2c=6\sqrt{5}$

38) [정답] 32

[해설]

직선 QR가 $\angle FQP$를 이등분하므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=\overline{PR}:\overline{RF}$

이때 $4\overline{PR}=3\overline{RF}$이므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=3:4$

$\overline{PQ}=3k(k>0)$이라 하면 $\overline{QF}=4k$이고 $\angle PQF=90°$이므로

삼각형 PQF에서 $\overline{PF}=5k$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이므로

$\overline{PF'}=5k+2,\ \overline{QF'}=\overline{PF'}-\overline{PQ}=(5k+2)-3k=2k+2$

$F(\sqrt{17},\ 0),\ F'(-\sqrt{17},\ 0)$이므로 직각삼각형 $QF'F$에서

$\overline{FF'}^2=\overline{QF}^2+\overline{QF'}^2,\ (2\sqrt{17})^2=(4k)^2+(2k+2)^2$

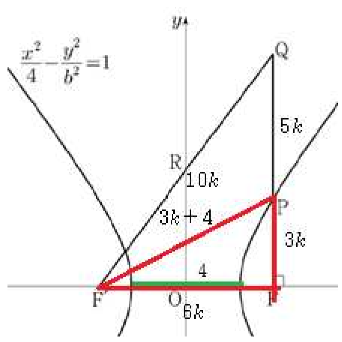
$5k^2+2k-16=0,\ (5k-8)(k+2)=0,\ k=\frac{8}{5}\,(k>0)$

따라서 삼각형 $PF'F$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QF}=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{32}{5}=32$

39) [정답] ④

[해설]



삼각형 QFF′의 세 변의 길이는 $10k,\ 8k,\ 6k=2c$

쌍곡선의 정의에서 삼각형 PFF′의 세 변의 길이는

$3k+4,\ 3k,\ 6k=2c$

$(3k+4)^2=(3k)^2+(6k)^2$,

$(3k)^2-2(3k)-4=0,\ 3k=1+\sqrt{5}$

$b^2=c^2-4=(3k)^2-4=(1+\sqrt{5})^2-4=2+2\sqrt{5}$

40) [정답] ②

[해설]

선분 PP′의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP'}}=5:6$에서

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PM}}=5:3$

삼각형 AMP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{PM}}}=\dfrac{4}{3}$ 이므로 직선 AF의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$ 이고, 직선 AF′의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$ 이다.

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0,\ b>0$)라 하면

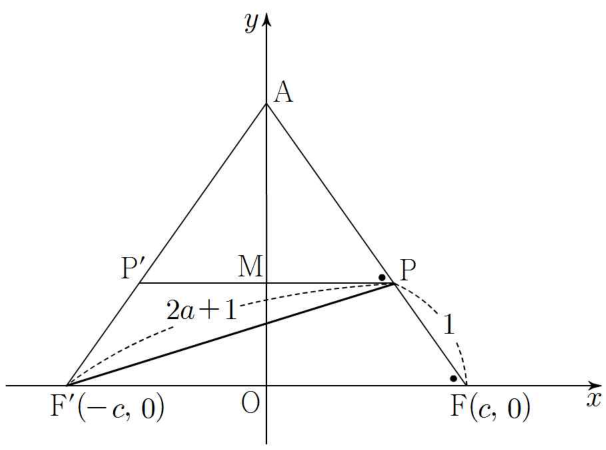
점근선의 기울기가 $\pm\dfrac{4}{3}$ 이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3},\quad b=\dfrac{4}{3}a$

$c^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{25}{9}a^2$에서 $\quad c=\dfrac{5}{3}a$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a+1$



삼각형 PFF′에서 코사인법칙을 이용하면

$(2a+1)^2=(2c)^2+1^2-2\cdot 2c\cdot 1\cos(\angle\mathrm{PFF'})$

$c=\dfrac{5}{3}a,\ \cos(\angle\mathrm{PFF'})=\dfrac{3}{5}$ 이므로

$4a^2+4a+1=\dfrac{100}{9}a^2+1-4a$

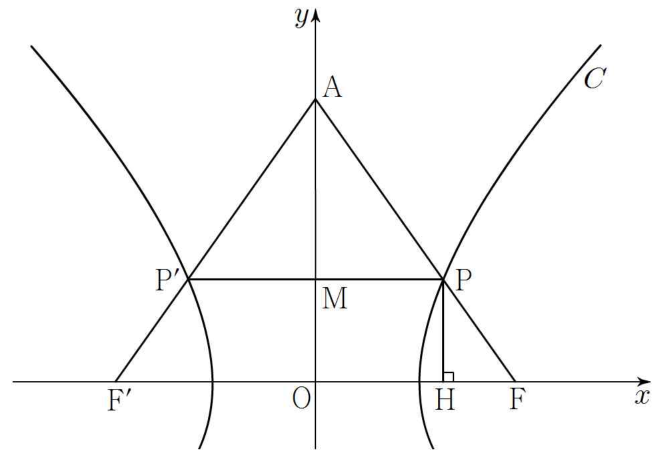
$\dfrac{8}{9}a(8a-9)=0$

$a>0$이므로 $\quad a=\dfrac{9}{8}$

따라서 쌍곡선 C의 주축의 길이는 $\dfrac{9}{4}$ 이다.

[다른 풀이]

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PP′이 y축과 만나는 점을 M이라 하자.



$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP'}}=5:6$이고 점 M은 선분 PP′의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{MP}}=5:3$

직각삼각형 AMP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MP}}}=\dfrac{4}{3}$이므로 직선 AF의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이고 직선 AF′의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이다.

쌍곡선 C의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0,\ b>0$)

으로 놓으면 점근선의 기울기가 $\pm\dfrac{4}{3}$ 이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$

$a=3k,\ b=4k$ (단, $k>0$)

이라 하면 쌍곡선 C의 방정식은

$\dfrac{x^2}{9k^2}-\dfrac{y^2}{16k^2}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 F의 x좌표는

$\sqrt{9k^2+16k^2}=\sqrt{25k^2}=5k$

이고, 직각삼각형 PHF에서 $\overline{\mathrm{PF}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\dfrac{3}{5},\ \overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{4}{5}$

따라서 점 P의 좌표는 $\quad \mathrm{P}\left(5k-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

점 P가 쌍곡선 C 위의 점이므로 ㉠에 대입하면

$\dfrac{\left(5k-\dfrac{3}{5}\right)^2}{9k^2}-\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}{16k^2}=1$

$16k^2-6k=0,\quad 2k(8k-3)=0$

$k>0$이므로 $\quad k=\dfrac{3}{8}$

따라서 구하는 쌍곡선 C의 주축의 길이는

$$2a=6k=\frac{9}{4}$$

41) [정답] ②

[해설]

삼각형 PQF는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{6}-1$

$ax^2-4y^2=a$에서 $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{a}{4}}=1$이므로 쌍곡선의 주축의 길이는 2이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}$, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 ㉠에 대입하면

$\overline{\mathrm{QF'}}=2$

$\angle\mathrm{PQF}=60^\circ$에서 $\angle\mathrm{FQF'}=120^\circ$이므로 삼각형 QFF′에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{QF}}^2+\overline{\mathrm{QF'}}^2-2\overline{\mathrm{QF}}\cdot\overline{\mathrm{QF'}}\cos120^\circ$$
$$=(\sqrt{6}-1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{6}-1)\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{a}{4}}=1$에서

$\overline{\mathrm{OF}}^2=1+\dfrac{a}{4}$, $\overline{\mathrm{FF'}}^2=4+a$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $4+a=9$

$\therefore a=5$

42) [정답] ④

[해설]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)(c>0)$이라 하면

$c^2=9+16=25$

에서 $c=5$이므로 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F'}(-5, 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=6$ …… ㉠

삼각형 AF′F 의 둘레의 길이가 24이므로

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=24$

이고 $\overline{\mathrm{FF'}}=10$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=14$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{AF}}=4$, $\overline{\mathrm{AF'}}=10$이므로 삼각형 AF′F는 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 AF′F 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{10^2-2^2}=8\sqrt{6}$$

43) [정답] ②

[해설]

$c^2=9+16=25$, $c=5$에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=10$이고

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF'}}=10$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 6이므로

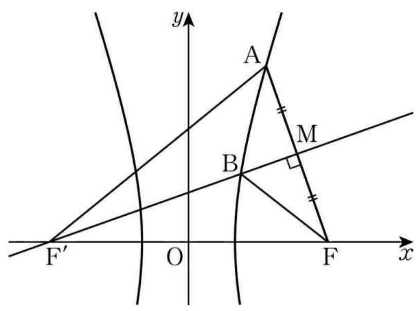
$\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=6$, $\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FP}}+6=16$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{FP}}=16+10+10=36$

44) [정답] 128

[해설]



그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(6, 0)$, $\mathrm{F'}(-6, 0)$이라 하자.

점 F′이 선분 AF의 수직이등분선 위의 점이므로

두 직각삼각형 AF′M, FF′M이 합동이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=12$

점 A가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AF}}=8$

점 M은 선분 AF의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=4$

직각삼각형 AF′M에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{MF'}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

점 B가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}-4$이고

$\overline{\mathrm{BM}}=8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}$이므로

삼각형 BFM의 둘레의 길이는

$\overline{BF}+\overline{FM}+\overline{BM}^2=(\overline{BF'}-4)+4+(8\sqrt{2}-\overline{BF'})$

$=8\sqrt{2}$

따라서 $k=8\sqrt{2}$이므로 $k^2=128$

45) [정답] ⑤

[해설]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 4이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$에서 $\overline{PF'}=7$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이가 $2|a|$이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=7+3=2|a|$에서 $a^2=25$

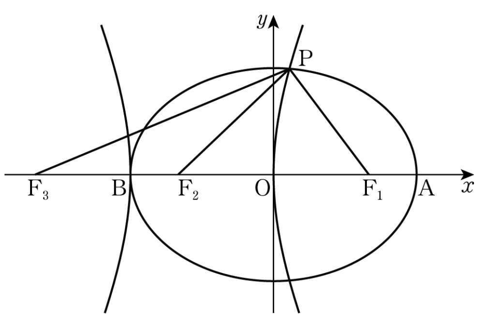
타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{7}=1$에서 $c^2=25-7=18$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $4+b^2=c^2=18,\ b^2=14$

따라서 $a^2+b^2=25+14=39$

46) [정답] 12

[해설]



점 P에서 타원의 두 초점 F_1, F_2까지의 거리의 합은 장축인 선분 AB의 길이와 같다.

즉 $\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=6$ …… ㉠

점 P에서 쌍곡선의 두 초점 F_1, F_3까지의 거리의 차는 주축인 선분 BO의 길이와 같다.

즉 $\overline{PF_3}-\overline{PF_1}=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 더하면

$\overline{PF_2}+\overline{PF_3}=9$

쌍곡선의 두 초점이 F_3, F_1이므로

$\overline{F_3B}=\overline{OF_1}=c$

$\overline{BF_2}=\overline{BO}-\overline{F_2O}=3-c$

그러므로 $\overline{F_3F_2}=\overline{F_3B}+\overline{BF_2}=3$

따라서 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이는

$\overline{PF_2}+\overline{PF_3}+\overline{F_3F_2}=12$

47) [정답] ④

[해설]

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2(x+9)$

준선의 방정식이 $x=-1$이므로 $a=-1$

점 $(-1, b)$가 접선 위의 점이므로 $b=\dfrac{8}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{5}{3}$

48) [정답] 54

[해설]

$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$에서 점 P는 두 초점이 $F_1(4, 0)$, $F_2(-6, 0)$이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ …… ㉠

점 P는 포물선 $y^2=16x$와 쌍곡선 ㉠의 교점이므로

$\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{16x}{16}=1,\ x^2-7x-8=0,\ (x-8)(x+1)=0,\ x=8$ 또는 $x=-1$

제 1사분면 위의 점 P의 좌표는 $(8, 8\sqrt{2})$이다.

포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$8\sqrt{2}y=8(x+8)$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+8)$ …… ㉡

이므로 점 F_3의 좌표는 $(-8, 0)$이다.

두 점 $F_1(4, 0)$, $F_3(-8, 0)$을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은 x축 또는 직선 $x=-2$ 위에 있다.

이때 선분 PF_3 위에 있는 꼭짓점은 직선 $x=-2$위에 있으므로 ㉡에 $x=-2$를 대입하면 $y=3\sqrt{2}$이 타원의 단축의 길이는 $6\sqrt{2}$이고 두 초점 사이의 거리는 12이다.

따라서 $a^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=54$

49) [정답] 21

[해설]

점 P의 x좌표를 k라 하면 점 P의 좌표는 $(k, 2\sqrt{kp})$이다.

직선 QR는 x축과 평행하고 $\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$에서

직선 PR는 y축과 평행하므로 두 점 P, R의 x좌표는 서로 같고 두 점 Q, R의 y좌표는 서로 같다.

그러므로 두 점 R, Q의 좌표는

$\mathrm{R}(k, -2\sqrt{kp})$, $\mathrm{Q}(-p, -2\sqrt{kp})$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{kp}\,y=2p(x+k)$이고 점 Q를 지나므로

$-4kp=2p(-p+k)$, $p=3k$

$\overline{\mathrm{QR}}=p+k=4k$에서 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{FP}}=4k$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=4\sqrt{kp}=4\sqrt{3}k$이므로

직각삼각형 PQR에서

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(4k)^2+(4\sqrt{3}k)^2=64k^2$

$\overline{\mathrm{PQ}}=8k$

사각형 PQRF의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RF}}+\overline{\mathrm{FP}}=8k+4k+4k+4k=140$, $\quad k=7$

따라서 $p=3k=21$

50) [정답] ⑤

[해설]

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$위의 점 $(2, \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$$

$y=0$을 대입하면 $\frac{2x}{8}=1$이므로 $x=4$

즉, x절편은 4

[참고]

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

51) [정답] ①

[해설]

점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$$

그러므로 점 S의 좌표는 (8, 0)이다.

한편, $c=\sqrt{16-12}=2$이므로 F(2, 0), F$'(-2, 0)$

이때, 두 삼각형 F$'$FQ, F$'$SR는 $\angle \mathrm{QF'F}=\angle \mathrm{RF'S}$이고

$\overline{\mathrm{FQ}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{SR}}$이므로 닮은 삼각형이다.

한편, $\overline{\mathrm{F'F}}=4$, $\overline{\mathrm{F'S}}=10$이므로 두 삼각형 F$'FQ, F'$SR의 둘레의 길이의 비는 2 : 5

한편, 삼각형 F$'$FQ의 둘레의 길이는 타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2\times4=8$이므로

$$\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}=4+8=12$$

따라서 구하는 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이를 l이라 하면

$12 : l=2 : 5$이므로 $l=30$

52) [정답] ④

[해설]

점 (2, 1)이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$위에 있으므로

$$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1, \qquad y=-\frac{2b^2}{a^2}x+b^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}, \qquad a^2=4b^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$a^2=8,\ b^2=2$$

그러므로 주어진 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

타원의 두 초점을 각각 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$라 하면

$$c^2=8-2=6, \qquad c=\sqrt{6}$$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

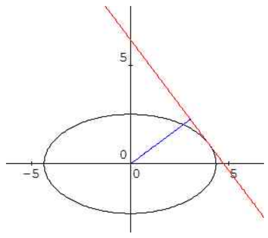
$$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{6}$$

53) [정답] ⑤

[해설]

타원의 접선

접선의 기울기를 m이라고 하면



$y=mx+\sqrt{19m^2+\frac{19}{3}}$

원점에서 거리는

$$\frac{\sqrt{19m^2+\frac{19}{3}}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{19}{5}$$

이것을 풀면 $m^2=\frac{16}{9}$, $\therefore m=-\frac{4}{3}$

54) [정답] ⑤

[해설]

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

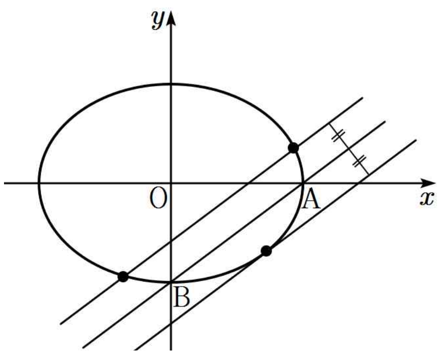
$y=2x\pm\sqrt{16\times 2^2+8}$, $y=2x\pm 6\sqrt{2}$

두 직선의 y절편은 각각 $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$이다.

따라서 $\overline{AB}=12\sqrt{2}$

55) [정답] ④

[해설]



그림과 같이 삼각형 ABP의 넓이가 k인 점 P의 개수가 3개가 되기 위해서는 직선 AB와 평행한 직선이 타원과 접하는 접점이 점 P 중 하나이어야 한다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 타원에 접하는 접선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x\pm\sqrt{16\times\frac{9}{16}+9}=\frac{3}{4}x\pm 3\sqrt{2}$

그림과 같이 y절편이 음수이어야 하므로

$y=\frac{3}{4}x-3\sqrt{2}$

점 A(4, 0)에서 직선 $3x-4y-12\sqrt{2}=0$까지의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|12-12\sqrt{2}|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12\sqrt{2}-12}{5}$$

$\overline{AB}=5$이므로 삼각형 ABP의 넓이 k는

$$k=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{12\sqrt{2}-12}{5}=\frac{6\sqrt{2}-6}{5}$$

56) [정답] ⑤

[해설]

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times 1+1}$

즉, $y=x\pm 2$

직선 $y=x+2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접 하는 점이 B이고

직선 $y=x-2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 D일 때,

사각형 ABCD의 넓이는 최대이다.

두 직선 $y=x+2$, $y=x-1$사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x+2$ 위의 점 $(0, 2)$에서 직선 $y=x-1$즉

$x-y-1=0$사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

두 직선 $y=x-2$, $y=x-1$사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0, -2)$에서 직선 $y=x-1$ 즉

$x-y-1=0$사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|0-(-2)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$와 직선 $y=x-1$

이 만나는 두 점 A, C의 좌표를 구해 보자.

$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$에서

$2x(2x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$x=0$일 때, $y=-1$

$x=\frac{3}{2}$일 때, $y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

두 점 A, C가

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C(0, -1)$

이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

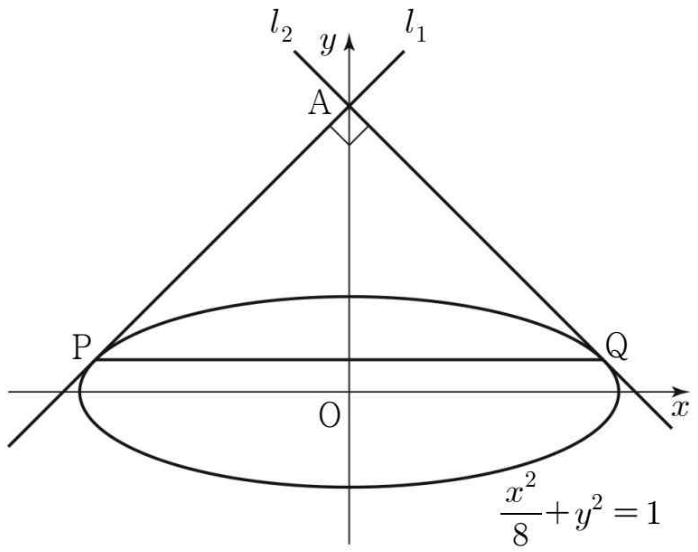
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3$

57) [정답] ⑤

[해설]



두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
삼각형 APQ는 직각이등변삼각형이고
직선 l_1의 기울기는 1이다.
타원 C에 접하고 기울기가 1인 직선 l_1의 방정식은
$y=x+\sqrt{8\times1^2+1}=x+3$
타원 C와 직선 $y=x+3$이 만나는 점 P의 x좌표를 k라 하면

$\frac{k^2}{8}+(k+3)^2=1$

$9k^2+48k+64=(3k+8)^2=0$에서 $k=-\frac{8}{3}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $\frac{8}{3}\times2=\frac{16}{3}$

58) [정답] ③

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(4,\ 7)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{4x}{2}-\frac{7y}{7}=1$,

$2x-y=1$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$

59) [정답] ②

[해설]
쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax-by=1$

기울기가 2이므로 $\frac{a}{b}=2$, $a=2b$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이므로

$4b^2-b^2=1$

$3b^2=1$이고 b가 양수이므로 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$a=2b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $ab=\frac{2}{3}$

60) [정답] ①

[해설]
접점 P를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x-\frac{y_1y}{3}=1$이므로 x절편이 $\frac{1}{3}$이므로 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$를 지난다.

$\frac{1}{3}x_1=1$, 즉, $x_1=3$이므로 점 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{6})$ $(\because\ y_1>0)$

초점의 좌표중 양수인 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$ $(\because\ c^2=a^2+b^2)$
그러므로 선분 PF의 길이는

$\sqrt{(3-2)^2+(2\sqrt{6}-0)^2}=\sqrt{1+24}=5$

61) [정답] ③

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$이므로

$x=0$일 때, $y=-\frac{b^2}{k}$ 즉, $\mathrm{R}\left(0,\ -\frac{b^2}{k}\right)$

$y=0$일 때, $x=\frac{a^2}{4}$ 즉, $\mathrm{Q}\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right)$

그러므로 삼각형 QOR의 넓이 A_1, 삼각형 PRS의 넓이 A_2는

$$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{4}\times\frac{b^2}{k}=\frac{a^2b^2}{8k},$$

$$A_2=\frac{1}{2}\times k\times 4=2k$$

이 때 $A_1 : A_2=9:4$를 만족하므로

$$\frac{a^2b^2}{8k} : 2k=9:4,\ a^2b^2=36k^2$$

$$k^2=\frac{a^2b^2}{36} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{16}{a^2}-\frac{a^2b^2}{36b^2}=1$

$$\frac{16}{a^2}-\frac{a^2}{36}=1,\ 16\cdot 36-a^4=36a^2$$

$$a^4+36a^2-576=0$$

$$(a^2+48)(a^2-12)=0$$

따라서 $a=2\sqrt{3}$ $(\because a>0)$

따라서 주축의 길이가 $2a$이므로 주축의 길이는 $4\sqrt{3}$

62) [정답] ②

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

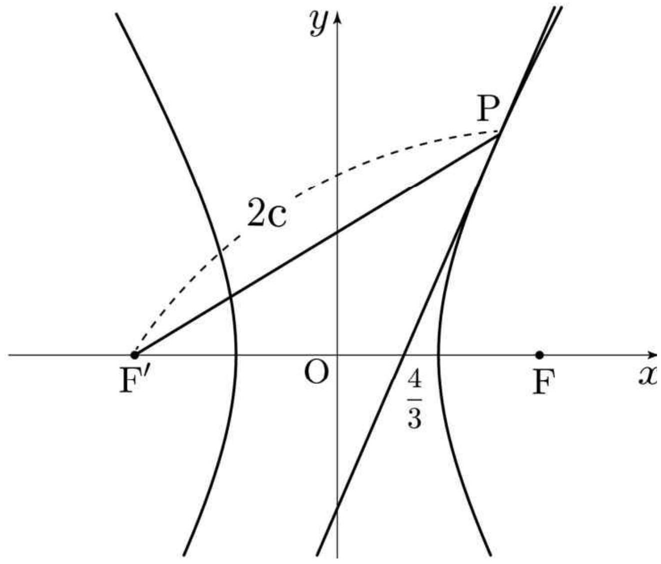
$$\frac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1,\ \frac{2x}{a}-\sqrt{3}y=1$$

이고 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

따라서 $\frac{2}{\sqrt{3}a}\times(-\sqrt{3})=-1$에서 $a=2$

63) [정답] ④

[해설]



점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{4}-\frac{y_1y}{k}=1$

이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{4}{x_1}$

$\frac{4}{x_1}=\frac{4}{3}$이므로 $x_1=3$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로 $\sqrt{(3+c)^2+y_1^2}=2c$

$y_1^2=3c^2-6c-9 \quad \cdots\cdots$㉠

점 $\mathrm{P}(3,\ y_1)$이 쌍곡선 위의 점이고

$k=c^2-4$이므로 $\frac{9}{4}-\frac{y_1^2}{c^2-4}=1$

$y_1^2=\frac{5}{4}(c^2-4) \quad \cdots\cdots$㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$$3c^2-6c-9=\frac{5}{4}(c^2-4)$$

$7c^2-24c-16=0,\ (7c+4)(c-4)=0 c>0$이므로 $c=4$

따라서 $k=12$

64) [정답] ①

[해설]

두 양수 a, b에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

이 쌍곡선이 점 $(3,\ 3)$을 지나고 점 $(3,\ 3)$에서 직선 $y=2x-3$에 접할 때, $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$는 최대이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3,\ 3)$에서 의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$$

즉, $y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$

이 직선이 $y=2x-3$이므로

$\frac{b^2}{a^2}=2,\ -\frac{b^2}{3}=-3$에서

$a^2=\frac{9}{2},\ b^2=9$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

$c^2=a^2+b^2=\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$

따라서 $c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

65) [정답] 13

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=k-2\sqrt{10}$

삼각형 F′FP는 넓이가 15인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\times k\times(k-2\sqrt{10})=15$

$k^2-2\sqrt{10}k-30=(k-3\sqrt{10})(k+\sqrt{10})=0$

$k=3\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{10},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{10}$

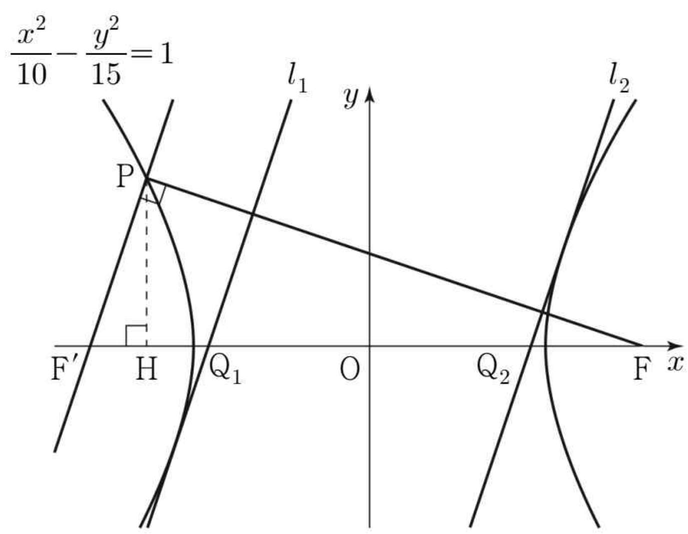
직각삼각형 F′FP에서

$\overline{\mathrm{F'F}}^2=(\sqrt{10})^2+(3\sqrt{10})^2=100$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=2c=10,\ c=5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$에서

$10+a^2=c^2=25$이므로 $a^2=15$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 F′FP와 삼각형 F′PH는 서로 닮음이므로

직선 PF′의 기울기는

$\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{F'H}}}=\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$에 접하고 기울기가 3인

직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10\times3^2-15}=3x\pm5\sqrt{3}$이므로

$l_1: y=3x+5\sqrt{3},\ l_2: y=3x-5\sqrt{3}$

에서 두 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$의 좌표는 각각

$\mathrm{Q_1}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},\ 0\right),\ \mathrm{Q_2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$에서

$p=3,\ q=10$이므로 $p+q=3+10=13$

66) [정답] ⑤

[해설]

점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$이 포물선의 초점이므로

준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$에서 $x_1=4,\ y_1=6$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$6y=\frac{9}{2}(x+4)$이고 점 F′을 지나므로 $c=4$

$\mathrm{P}(4,\ 6),\ \mathrm{F'}(-4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=10$

타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{65}{4}$이고

$\overline{\mathrm{F'F}}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$이므로

타원의 단축의 길이를 k라 하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$

따라서 타원의 단축의 길이는 15

67) [정답] ②

[해설]

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{36\times\frac{1}{4}+16},\ y=\frac{1}{2}x\pm5$

포물선 $y^2=ax$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

a가 양수이므로 $\frac{a}{2}=5$, $a=10$

따라서 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는 $\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$