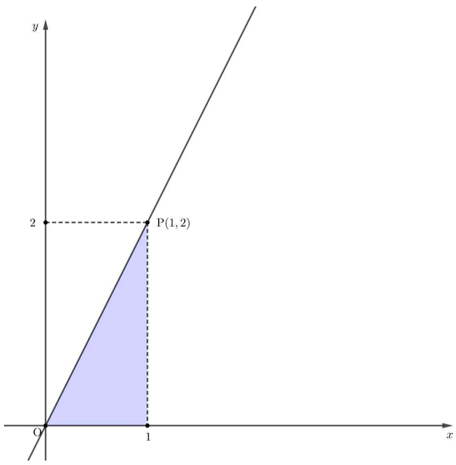
중적분 2

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 중적분의 계산(3)

<중적분 1>에서는 적분 영역이 직사각형인 경우와, 적분변수 x, y에 대해서 모두 계산 가능한 경우의 중적분을 살펴보았다. 하지만 <중적분 1>에서 간단히 언급한 것과 같이 x, y 중 한 적분변수에 대해서 계산하는 방법이 압도적으로 간편한 경우가 있다.

가령, 아래 **[그림 1]**과 같이 주어진 영역 Ω에 대하여 이변수함수 $f(x, y) = e^{x^2}y^2$의 중적분을 구하는 상황을 생각해보자.



[그림 1] 영역 Ω의 모습

구하고자 하는 적분은

$$\iint_{\Omega} f(x, y)dA$$

와 같이 쓸 수 있다. 이때 변수 x에 대해 먼저 적분하려 하면,

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}y^2 dxdy$$

를 계산해야 하고, 이때 e^{x^2}을 x에 대하여 적분해야 한다. $y = e^{x^2}$은 연속함수이므로 적분은 가능하지만, 그 부정적분은 초등함수들의 유한 연산으로 표현할 수 없으므로 이를 계산하는 일은 매우 어려울 것이다. (급수전개나 극좌표 변환의 다른 방법으로 풀릴 가능성

은 있으나, 일반적인 방법으로 접근하는 것이 거의 불가능하다는 점이 중요하다.)

하지만, 반대로 변수 y에 대해서 먼저 적분하면

$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} y^2 dy dx$$

와 같이 되고, y에 관한 항을 적분함으로써 이후 e^{x^2}에 x에 관한 다항식 꼴이 곱해지게 되어 초등적인 방법으로 계산이 가능해진다. (계산과정은 아래와 같다.)

$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} y^2 dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} e^{x^2} y^3 \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \frac{8}{3} x^3 e^{x^2} dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 u e^u du = \frac{4}{3} \left[(u-1) e^u \right]_0^1 = \frac{4}{3} \ \blacksquare \quad (u = x^2,\ du = 2x dx)$$

적분식이 주어진 상태에서 적분 순서만 바꾸는 것에 무슨 의미가 있냐고 반문할 수 있지만, 포인트는 적분 영역 Ω가 주어지지 않은 상태에서 적분의 순서를 바꾸는 것이다.

즉, 초등적인 방법으로 계산이 불가능한 중적분 $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} y^2 dx dy$가 주어진 상황에서 역으로 적분 영역 Ω를 알아내고, Ω를 이용하여 적분변수를 바꿔야한다.

적분 영역을 알아내기 위해, 먼저 바깥쪽 적분에 해당하는 $0 \le y \le 2$를 xy좌표에 표시한다. y가 0에서 2까지 변화할 때 x는 $\frac{y}{2}$부터 1까지 변화하게 되므로, 각 y에 따른 x의 자취(선분)를 연속적으로 이어 **[그림 1]**의 영역 Ω를 얻을 수 있다. 바깥쪽 적분변수가 x라면, x, y만을 바꾸어 동일한 과정으로 적분 영역을 알아낼 수 있다.

Ⅱ. 중적분의 계산(4)

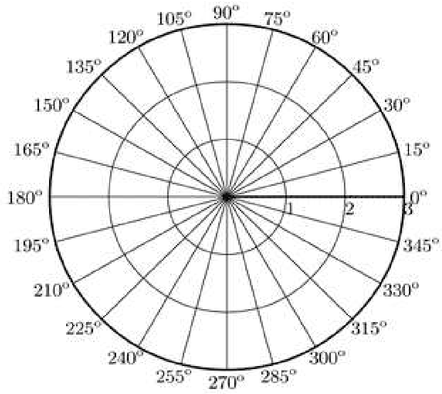
중적분의 계산 (1) ~ (3)으로도 계산이 쉽지 않은 적분이 있다.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sin(x^2+y^2)\, dy dx$$

와 같은 적분은 적분의 순서에 관계없이 두 경우 모두 초등적인 방법으로 해결이 불가능하며, 따라서 이 경우 극좌표로의 좌표 변환을 한 후 적분을 해야 한다.

극좌표란 직교좌표계의 일종으로, 2차원 평면상의 한 점을 원점으로부터의 거리 r과 x축의 양의 방향으로부터 반시계 방향으로 돌아간 각도 θ로 나타내는 것이다.

즉, 아래 **[그림 2]**와 같이 그릴 수 있다.



[그림 2] 극좌표

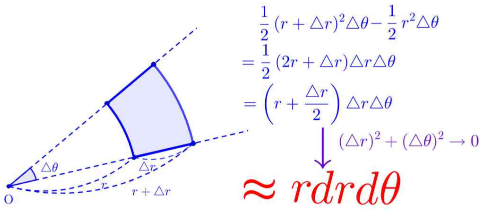
따라서 극좌표로 Cartesian 직교좌표계로 변환하는 공식은 다음과 같음을 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

또한 이를 역으로 적용하여 Cartesian 직교좌표계를 극좌표로 변환하는 공식 역시 구해볼 수 있다. $(0 \leq \theta < 2\pi)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & (x > 0,\ y \geq 0) \\ \tan^{-1}(y/x) + 2\pi & (x > 0,\ y < 0) \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & (x < 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x = 0,\ y > 0) \\ \dfrac{3}{2}\pi & (x = 0,\ y < 0) \end{cases} \end{cases}$$

극좌표에서의 미소 넓이는 $dA = rdrd\theta$이고, 이는 아래 **[그림 3]**과 같이 근사적으로 증명할 수 있다. 엄밀한 증명은 아직 중요하지 않으므로, 여기서는 미소 넓이가 $dA = rdrd\theta$라는 것을 직관적으로 이해하고 넘어가도록 하겠다. (이후의 칼럼에서 야코비안을 이용하여 이를 엄밀하게 증명할 것이다.)



Let $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(T(r,\theta))rdrd\theta$$

[그림 3] 극좌표에서의 미소 넓이

x, y를 극좌표의 r과 θ에 관한 식으로 바꾼 후, 적분 범위 역시 r과 θ에 관한 범위로 바꿔야 한다. 따라서 적분 영역을 먼저 그린 후, 영역의 생김새를 보고 적분 범위를 결정하면 된다. 가령, 위에서 언급한 적분 $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sin(x^2+y^2)\,dydx$의 적분 영역 Ω는 1사분면에 위치한 반지름의 길이가 2인 사분원인 것을 쉽게 알 수 있으므로, r은 0부터 2까지, θ는 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 변화하게 된다.

따라서 이는 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sin(x^2+y^2)\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\sin(r^2)\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4)d\theta = \frac{\pi}{4}(1-\cos 4) \blacksquare$$

극좌표계 변환은 가우스 적분의 계산에도 이용할 수 있다. 가우스 적분이란 $f(x)=e^{-x^2}$을 실수 전체에 대하여 이상적분한 값이며, 그 값은 아래와 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

지수함수의 적분에서 원주율이 등장하는 것이 매우 이상해보일 수 있으나, 극좌표 변환을 통해 구해진다는 것을 알게 되면 $d\theta$를 적분하는 과정에서 π가 등장했을 것으로 유추할 수 있다. ($f(x)=e^{-x^2}$ 역시 e^{x^2}과 마찬가지로 그 부정적분이 초등함수가 아니지만, e^{-x^2}의 경우 특이하게 실수 전체에 대한 이상적분이 $\sqrt{\pi}$라는 간단한 값으로 수렴한다.)

Ⅲ. 극좌표계 변환의 활용

이제 극좌표계를 이용하여 가우스 적분의 값을 직접 구해보자. 적분 변수 x, y 자체에는 아무 의미가 없음을 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right]$$

이때 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$의 값은 상수이므로, 이를 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dy$의 안에 넣어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dxdy$$

또한 푸비니의 정리에 의해 e^{-y^2} 항을 두 번째 적분 기호 안으로 넣어도 x와 y는 독립적인 적분 변수이므로 e^{-y^2}은 상수로 취급되고, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

이는 곧 이변수함수 $z = e^{-(x^2+y^2)}$을 xy평면 전체에 대해 적분한 것과 같으므로, 극좌표 변환을 적용하면 적분 구간은 $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$가 되고 그 값은 다음과 같다.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta = \pi$$

따라서

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

이고, $f(x) = e^{-x^2}$이 우함수임을 이용하면 다음 두 등식을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

가우스 적분은 정규분포의 확률밀도함수의 실수 전체에 대한 정적분 값이 1임을 증명하는 데에도 이용된다.

$N(\mu, \sigma^2)$을 따르는 정규분포의 확률밀도함수는

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

이고, 이는 확률밀도함수이므로 확률밀도함수의 성질에 의해 실수 전 구간에 대한 정적분의 값이 1이 되어야 한다. 우선 $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$로 치환하면

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

이고, 다시 $z = \sqrt{2}\,y$로 치환하면

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$$

을 얻는다. ■

(논외로, 고등학교 확률과 통계 교과서에는 정규분포의 확률밀도함수가 그대로 써져 있고, 이를 적분하려 하면 e^{-x^2}의 이상적분을 구해야 하므로 정적분 값이 1임을 보이는 증명은 실려 있지 않다. e^{-x^2}의 적분은 초등적인 방법으로 거의 불가능에 가깝고, 확률을 계산할 때에도 정확한 수치를 구하지 못해 표준정규분포표를 이용하므로 미적분 과목과 확률과 통계 과목을 동시에 학습하는 학생은 정적분 값이 1이라는 것을 근사에 의한 결과로 받아들일 가능성이 있다. 하지만 이는 위와 같은 극좌표계 변환으로 아주 아름답게 해결가능하며, 그 값 역시 정확히 1이다.)

중적분에 대해 학습하게 된 이상 기존의 정적분에도 중적분의 관점을 적용할 수 있어야 하며, 그러한 관점에서 바라본다면 정적분은 단순히 넓이를 계산하는 것이 아니라, 때로는 부피를 계산하는 것이 될 수도 있다. 예를 들어, 적분 $\int_0^2 x^2 dx$는 $y = x^2$의 그래프의 $0 \le x \le 2$일 때의 밑넓이로 해석되지만, 이를 $\int_0^2 \int_0^{x^2} 1\, dy dx$로 해석하면 이는 높이가 항상 1이고 밑면의 영역이 $y = x^2$의 그래프의 $0 \le x \le 2$일 때의 밑넓이인 입체의 부피가 된다. 같은 방법으로 중적분 역시 삼중적분으로 확장하여 생각해볼 수 있으며, 정적분이 단순히 2차원적 밑넓이에만 국한되어있는 것은 아니라는 것에 유의해야 한다.

Ⅳ. 연습문제

1. 다음 중적분에 대하여 적분 영역을 그린 후, 적분값을 구하여라. 또 적분 순서를 바꾸어 적분값을 구한 후 두 개의 값이 같음을 보여라.

(1) $\int_0^1 \int_x^1 dydx$

(2) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dydx$

(3) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dxdy$

(4) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dxdy$

(5) $\int_0^1 \int_1^{e^x} dydx$

(6) $\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} 16xdydx$

(7) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3ydxdy$

(8) $\int_1^2 \int_{y^5}^{3y^5} \frac{1}{x}dxdy$

2. 다음 중적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 ye^{x^2}dxdy$

(2) $\int_{-1}^1 \int_0^{\pi} x\sqrt{\sin y}\,dydx$

(3) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)dxdy$

(4) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$

(5) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{3-x^3}\,dxdy$

(6) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1\sin(y^2)dydx$

(7) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\frac{1}{y^3+1}dydx$

(8) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dxdy$

3. 다음 적분을 극좌표에 관한 적분으로 변환하여 계산하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dydx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dydx$

(3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)dxdy$

(4) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}}xdxdy$

(5) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{3}x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

(6) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}dydx$

(8) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dydx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dxdy$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dydx$