

수리 영역 (나 형)

제 2 교시

성명

수험번호

3

1

- 자신이 선택한 유형(‘가’형 / ‘나’형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호와 답을 정확히 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $AB + B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2. $\log_4(\sqrt{2^7} \times 4^{\frac{1}{4}})$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

3. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 AB 의 역행렬이 존재하지 않을 때, 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

4. 세 양수 a, b, c 가 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $a+b=4$, $a+b+c=13$ 을 만족시킬 때, 공비 r 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

5. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2011}$ 의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 2 ② 7 ③ 12
④ 17 ⑤ 22

6. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시킬 때, a_{15} 의 값은? [3점]

- ① 66 ② 78 ③ 91
④ 105 ⑤ 120

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 일 때, $a_1 + a_6$ 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

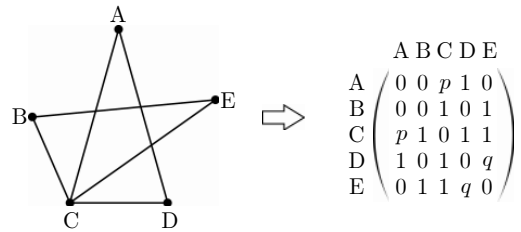
8. 연립부등식

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2^y \leq 4^{2-x}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^y \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$

을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (x, y) 에 대하여 $x+y$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

9. 다음은 꼭짓점이 5개인 그래프를 행렬로 나타낸 것이다.



꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법의 수를 r 라 할 때, 세 상수 p, q, r 에 대하여 $p+q+r$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

10. x, y 에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가
 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가질 때, 모든 상수 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

11. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서
 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. $A-2B=E$ 이면 $AB=BA$ 이다.
 ㄴ. A, B 의 역행렬이 모두 존재하면 $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.
 ㄷ. $(AB)^2=A^2B^2$ 이고 A 의 역행렬이 존재하면
 $A^{-1}B=BA^{-1}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 이상기체 1몰의 부피가 V_0 에서 V_i 로 변할 때,
 엔트로피 변화량 S_i (J/K)는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$S_i = C \log \frac{V_i}{V_0}$$

(단, C 는 상수이고 부피의 단위는 m^3 이다.)

이상기체 1몰의 부피가 V_0 에서 V_1 로 a 배 변할 때 $S_1=6.02$ 이고,
 이상기체 1몰의 부피가 V_0 에서 V_2 로 b 배 변할 때 $S_2=36.02$ 이다.

이때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, 몰은 기체입자수의 단위이고 $C=20$ (J/K)
 으로 계산한다.) [3점]

- ① 10 ② $6\sqrt{6}$ ③ $10\sqrt{10}$
 ④ $15\sqrt{15}$ ⑤ 100

13. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{3+5+7+\dots+(2n+1)}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$ 의 값은? [3점]

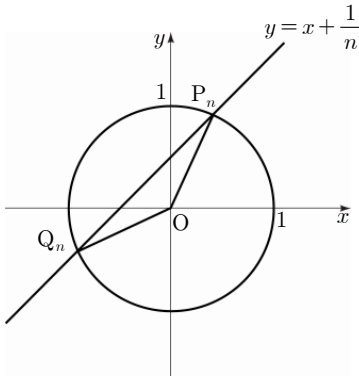
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

14. 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 직선 $y = x + \frac{1}{n}$ 과

원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자.

삼각형 OP_nQ_n 의 넓이를 A_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot A_n$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



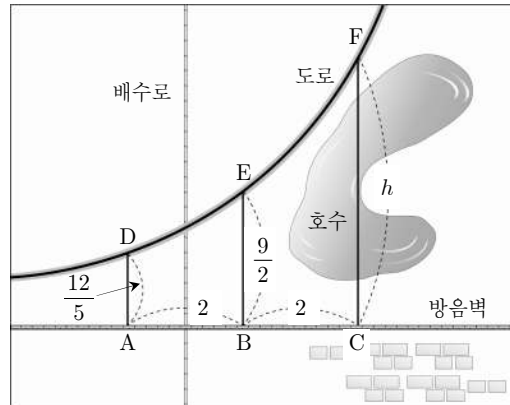
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

15. 지수방정식 $2^x - 6 + 2^{3-x} = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $\alpha + 2\beta$ 의 값은? (단, $\alpha < \beta$) [3점]

- ① 5 ② 7 ③ 9
 ④ 11 ⑤ 13

16. 다음은 어느 지역의 방음벽, 배수로, 도로를 나타낸 평면도이다.
 평면도에서 방음벽을 x 축, 방음벽과 수직으로 건설된 배수로를 y 축
 으로 할 때, 도로의 중앙선은 곡선 $y = a^x + 2$ ($a > 1$)의 일부로
 나타내어진다.

$\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ 를 만족시키는 x 축 위의 세 점 A, B, C를 지나고
 x 축에 수직인 세 직선을 그려 곡선 $y = a^x + 2$ 와 만나는 점을 각각
 D, E, F라 하자. $\overline{AD} = \frac{12}{5}$, $\overline{BE} = \frac{9}{2}$, $\overline{CF} = h$ 일 때, 상수 h 의
 값은? (단, 방음벽, 배수로, 도로의 중앙선의 폭은 무시한다.) [4점]



- ① $\frac{121}{8}$ ② $\frac{125}{8}$ ③ $\frac{137}{8}$
 ④ $\frac{141}{8}$ ⑤ $\frac{155}{8}$

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고,

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \right) - \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}a_{n-1} \right) \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = \boxed{(가)} \times a_n \text{이다.}$$

$n = 2, 3, 4, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

\vdots

$$a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} \text{이므로}$$

$$a_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_1 = 10 \text{이고, } a_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때, $f(5) \times g(10)$ 의 값은? [4점]

① 60

② 75

③ 90

④ 105

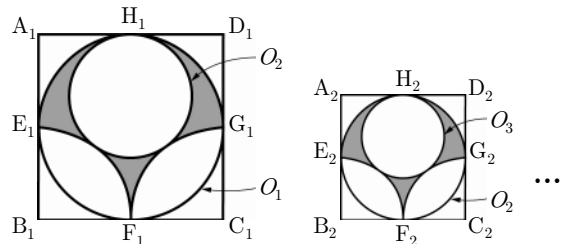
⑤ 120

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1 에 외접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 네 변 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ 의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1 이라 하자.

점 B_1 을 중심으로 하고 선분 B_1F_1 을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_1F_1E_1$ 의 호 E_1F_1 과 점 C_1 을 중심으로 하고 선분 C_1F_1 을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_1F_1G_1$ 의 호 G_1F_1 과 원 O_1 의 호 $E_1H_1G_1$ 로 둘러싸인 도형을 R_1 이라 하자. R_1 에 내접하는 원을 O_2 라 하고 도형 R_1 의 넓이에서 원 O_2 의 넓이를 뺀 값을 S_1 이라 하자.

원 O_2 에 외접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 네 변 $A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2$ 의 중점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2 라 하자. 점 B_2 를 중심으로 하고 선분 B_2F_2 을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_2F_2E_2$ 의 호 E_2F_2 와 점 C_2 를 중심으로 하고 선분 C_2F_2 을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_2F_2G_2$ 의 호 G_2F_2 와 원 O_2 의 호 $E_2H_2G_2$ 로 둘러싸인 도형을 R_2 라 하자. R_2 에 내접하는 원을 O_3 이라 하고 도형 R_2 의 넓이에서 원 O_3 의 넓이를 뺀 값을 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 호 E_nF_n , 호 G_nF_n , 호 $E_nH_nG_n$ 으로 둘러싸인 도형을 R_n 이라 하고 R_n 에 내접하는 원을 O_{n+1} 이라 하자. 도형 R_n 의 넓이에서 원 O_{n+1} 의 넓이를 뺀 값을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{9-2\pi}{3}$

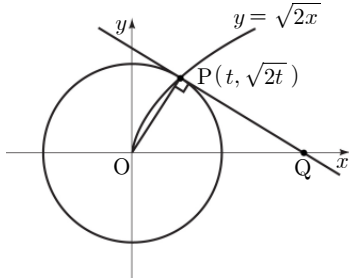
② $\frac{18-4\pi}{5}$

③ $\frac{9-2\pi}{2}$

④ $\frac{18-4\pi}{3}$

⑤ $9-2\pi$

19. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 위의 점 $P(t, \sqrt{2t})$ 가 있다. 원점 O 를 중심으로 하고 선분 OP 를 반지름으로 하는 원을 C , 점 P 에서의 원 C 의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 원 C 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)}{OQ - PQ}$ 의 값은? (단, $t > 0$) [4점]



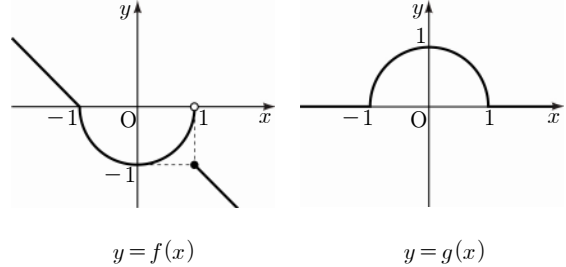
- ① $\sqrt{2}\pi$ ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$
 ④ 4π ⑤ $4\sqrt{2}\pi$

20. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

- < 보 기 >
- ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 일 때,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.
 ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 각각 수렴하면
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이다.
 ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
 을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

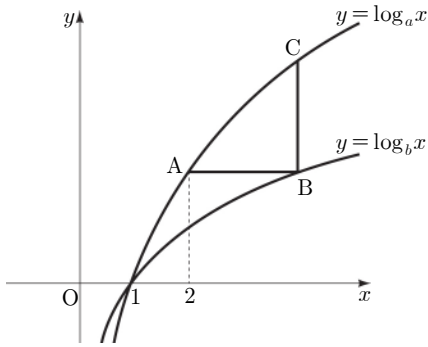
- ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n}$ 의 값을 구하시오. [2점]

23. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점 $A(2, \log_a 2)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_b x$ 와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < a < b$) [3점]



24. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} & (x \neq 2) \\ 2 & (x = 2) \end{cases}$ 가 $x = 2$ 에서 연속일 때,

두 상수 a, b 에 대하여 $2a - b$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^3}{x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

26. 다음 조건을 만족시키는 이차정사각행렬 A 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 행렬 A 는 역행렬을 갖지 않는다.
(나) 행렬 A 의 성분은 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 원소이다.

27. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{2n-1} = a_{2n} = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 240항까지의 값 중에서 3의 배수를 값으로 하는 모든 항의 개수를 구하시오. [4점]

28. 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 6 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\beta - \alpha$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 세 자리 이하의 자연수 n 에 대하여

$$f(n) = 10(\log n - [\log n])$$

일 때, $[f(n)] \leq 3$ 을 만족시키는 n 의 개수를 구하시오.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이고 $\log 2.51 = 0.3997$, $\log 2.52 = 0.4014$ 로 계산한다.) [4점]

30. 자연수 n 에 대하여 연립부등식

$$\frac{|x|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} + \frac{|y|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \leq 1, \quad \frac{|x|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} + \frac{|y|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \geq 1$$

을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (x, y) 가 나타내는 영역의 넓이를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여

$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 5S_{10})$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.