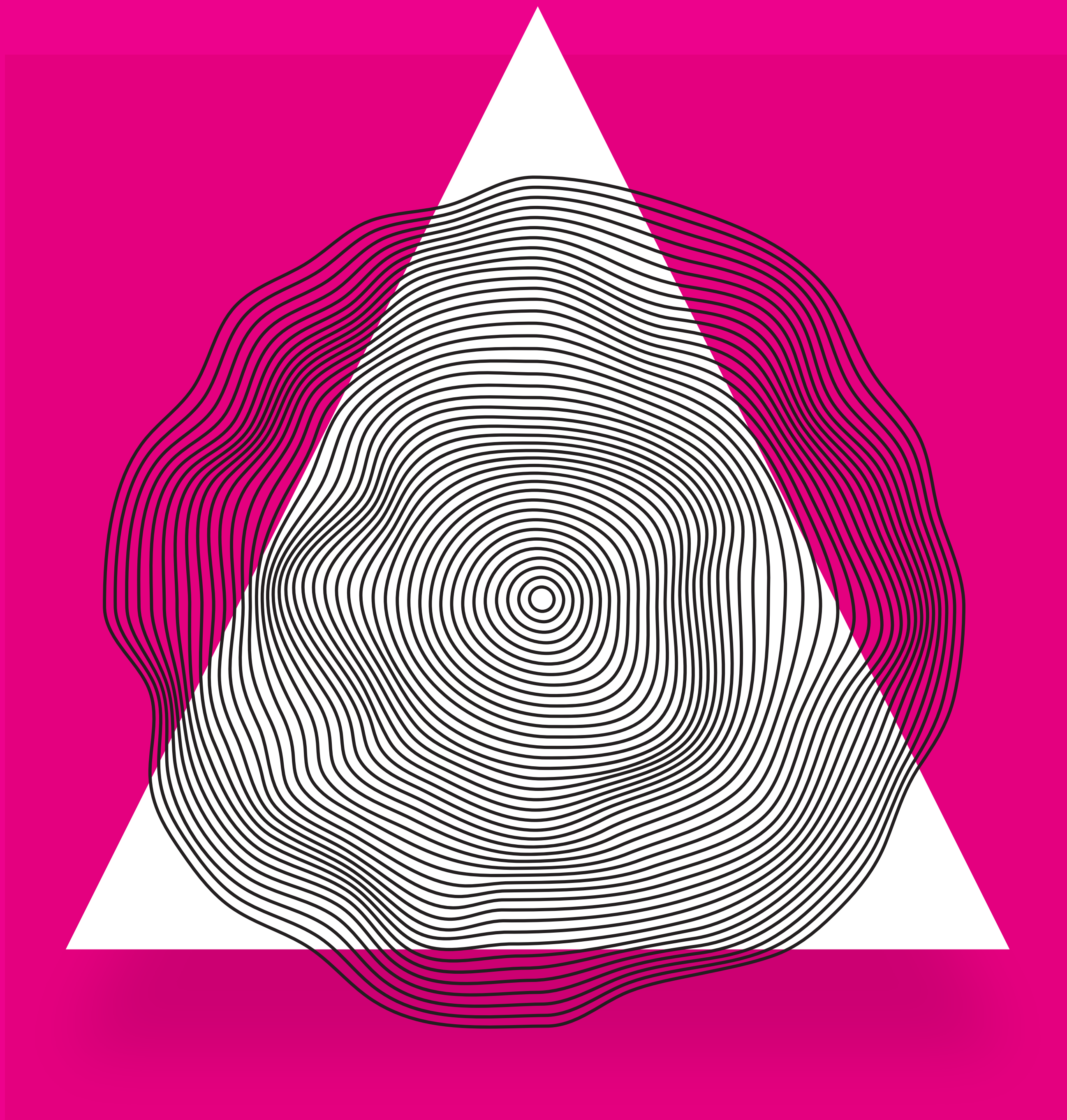
기출의_ 파급효과



수학영역 × 미적분 / 하 × STANDARD

미적분(하)
STANDARD
기출의 파급효과

orbi.kr

미적분(하)

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

미적분 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 195문제를 담았습니다.
standard 미적분(상)에는 111문제, standard 미적분(하)에는 84문제입니다.

※ 문제 좌표에서 ‘나형’ 또는 ‘A형’ 또는 ‘인문계’라고 표시된 것을 제외하면 전부 ‘가형’ 또는 ‘B형’ 또는 ‘자연계’ 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 미적분(상) 173문제, extension 미적분(하) 72문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard를 ‘제대로’ 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER

06 적분법

상세한 개념 이해가 주목적이 아니기에 자세한 증명은 모두 생략하였다. 부정적분에 대한 기본 개념은 수Ⅱ에서 어느 정도 학습하였다는 전제 아래 기본적인 다항함수, 초월함수의 적분 공식을 살핀 후 치환적분과 부분적분을 중점적으로 다루도록 하겠다.

부정적분의 공식

(1) 함수 $y=x^n$의 부정적분 공식

$n \neq -1$일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$n=-1$일 때, $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 지수 · 로그함수의 부정적분 공식

$\int e^x dx = e^x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$ (단, C는 적분상수)

(3) 삼각함수의 부정적분 공식

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$ (단, C는 적분상수)

$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$ (단, C는 적분상수)

치환적분과 부분적분은 꼴 형태 파악과 양치기를 하면 쉽게 풀 수 있는 유형이다.
다만, 초반에 깨달음을 얻어가는 게 정말 중요하다.

치환적분

치환적분은 배우고 적용하기 쉽지만 문제를 더 수월하게 풀기 위해서는 모순적이긴 하지만
직접적인 치환을 최대한 자제해야 한다.

예를 들어 $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$꼴을 푼다고 해보자.

여기서 $x^2+1=t,\ 2x\,dx=dt$와 같이 **직접적인 치환을 하면 시간이 너무 지체된다.**

$\frac{2x}{x^2+1}$같은 구체적 식이 아닌 $f(x)$같은 일반식이 쓰인 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 같은 경우 대처가 더욱 늦어진다.

따라서 **직접적인 치환을 하기 전에 "무엇을 미분하면 적분 기호 안에 있는 식이 나올까?"라고 먼저 생각해보는 것이 좋다.**

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 같은 경우 $\ln|f(x)|+C$ 를 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}$꼴이 나오므로

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ (적분 상수 절대 빼먹지 마라!!)

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$도 같은 원리로 $\ln(x^2+1)+C$를 미분하면 $\frac{2x}{x^2+1}$꼴이 나오므로

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C$ (적분 상수 귀찮아도 써라!!)

※ $\ln|x|$를 미분하면? $\frac{1}{|x|}$? 아니다. $\frac{1}{x}$이다.

$f(x)=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ \ln(-x) & (x<0)\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>0)\\ \frac{-1}{-x} & (x<0)\end{cases}$를 보면 알 수 있다.

따라서 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$이다. 다만, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$에서 모든 x에 대하여

$f(x)>0$이면 편하게 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(f(x))+C$ 로 쓸 수 있다.

$\int f(x)f'(x)dx$ 같은 경우 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+C$를 미분하면 $f(x)f'(x)$꼴이 나오므로

$\int f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+C$

$\int \frac{\ln x}{x}dx$도 같은 원리로 $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$를 미분하면 $\frac{\ln x}{x}$꼴이 나오므로

$\int \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

합성함수 미분 형태 꼴은 치환적분의 제일 기본적인 형태이다.

$\int f'(g(x))g'(x)dx$ 같은 경우 $f(g(x))+C$를 미분하면 $f'(g(x))g'(x)$꼴이 나오므로

$\int f'(g(x))g'(x)dx=f(g(x))+C$

곱의 미분 꼴은 바로 발견해야 한다.
이를 치환적분하기도 부분적분하기도 애매하기 때문이다.

$\int f(x)g'(x)+f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)+C$ 꼴을 반드시 기억하자!!

곱의 미분 꼴을 응용한 형태에는 대표적으로

$\int \{f(x)+f'(x)\}e^x dx=f(x)e^x+C$와

$\int \{f(x)-f'(x)\}e^{-x}dx=-f(x)e^{-x}+C$가 있다.

항등식 $f(x)+f'(x)=g(x)$의 양변을 x에 대해 적분해야 하는 일이 있을 때,
양변에 e^x를 곱하여 $\{f(x)+f'(x)\}e^x=g(x)e^x$ 꼴로 바꾼 후

$\int \{f(x)+f'(x)\}e^x dx=f(x)e^x+C$를 적용하면 문제 풀기 수월할 것이다.

항등식 $f(x)-f'(x)=g(x)$의 양변을 x에 대해 적분해야 하는 일이 있을 때,
양변에 e^{-x}를 곱하여 $\{f(x)-f'(x)\}e^{-x}=g(x)e^{-x}$ 꼴로 바꾼 후

$\int \{f(x)-f'(x)\}e^{-x}dx=-f(x)e^{-x}+C$를 적용하면 문제 풀기 수월할 것이다.

몫의 미분 형태 꼴도 바로 발견해야 한다.
이를 치환적분하기도 부분적분하기도 애매하기 때문이다.

$\int \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\frac{f(x)}{x}+C$ 꼴을 반드시 기억하자!!

항등식 $xf'(x)-f(x)=g(x)$의 양변을 x에 대해 적분해야 하는 일이 있을 때,

양변에 x^2을 나누어 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ 꼴로 바꾼 후

$\int \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\frac{f(x)}{x}+C$를 적용하면 문제 풀기 수월할 것이다.

예제(1) 15년 7월 교육청 19번

구간 $(0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$ (나) $F(1)=2e$

$F(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}e^3$ ② $\frac{1}{2}e^3$ ③ e^3 ④ $2e^3$ ⑤ $4e^3$

1. 문제의 첫 줄을 읽을 때 꼭 $F'(x)=f(x)$를 표시한다.
   조건 (가)에서 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$ 를 보면 **좌변이 $(xF(x))'$**임을 알아봐야 한다.
   곱의 미분 꼴을 잘 익혀두자!

2. $(xF(x))'=(2x+2)e^x$ 이므로 양변을 x에 대해 적분하면 $xF(x)=2xe^x+C$.
   적분 상수 꼭 붙여줘라!!

3. 조건 (나) $F(1)=2e$을 이용해 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$ 에 $x=1$을 넣어도 되지만 사실 조건 (나)는 $xF(x)=2xe^x+C$의 적분 상수 C를 위한 것이다. $C=0$!!
   보통 이런 류의 문제에 함숫값이 주어지면 적분 상수 처리를 위해 있는 것이다.
   따라서 이 조건을 섣불리 '처음'부터 대입하고 조건을 다 썼다고 생각하지 말자.

4. $xF(x)=2xe^x$인데 정의역 구간이 $(0, \infty)$이므로 $F(x)=2e^x$이다.
   섣불리 양변에 x가 있다고 함부로 x로 나누지 말자.
   만약 정의역 구간에 0이 포함되어 있었으면 $x\{F(x)-2e^x\}=0$으로 정리하는 것을 추천한다.
   $F(x)=2e^x\ (x\neq 0)$과 $x=0$일 때를 따로 case를 나눠 생각해도 되는데 대다수 학생들이 귀찮아서 안 하거나 까먹는다.
   $F(3)=2e^3$이므로 **답은 ④!!**

comment

아직 익숙하지 않을 수도 있다. **하지만 직접적인 치환 없이 연습하다 보면 킬러 문제를 풀 때 적분 가능 형태가 쉽게 보여** 문제를 보다 쉽게 접근할 수 있다.

예제(2) 19학년도 6월 평가원 11번

$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{7}{15}$　② $\frac{8}{15}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{11}{15}$

1. $\sqrt{\ }$ 안이 단순해야 함을 인식하여 $x^2-1=t$로 치환할 생각을 한다. 치환적분에 익숙하다면 $(x^2-1)'=2x$이고 $x^3=\frac{1}{2}\times 2x\times x^2$로 분리될 수 있어 $x^2-1=t$ 치환이 가능하다는 걸 쉽게 안다. 그렇지 못한다면 부분적분을 해야 하나 고민하면서 시간을 많이 쓴다.

2. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(t+1)\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{8}{15}$

답은 ②!!

예제(3) 20학년도 수능 8번

$\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2}dx$의 값은? [3점]

① $\dfrac{e+2}{e^2}$ ② $\dfrac{e+1}{e^2}$ ③ $\dfrac{1}{e}$ ④ $\dfrac{e-1}{e^2}$ ⑤ $\dfrac{e-2}{e^2}$

1. 치환적분이 고였다면 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$꼴이 생각났을 것이다.

$\left(\dfrac{-\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$이므로 $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_e^{e^2} = \frac{-2+e}{e^2}$이다.

답은 ⑤!!

※ 다른 풀이 1

$\ln x = t$, $\dfrac{1}{x}dx = dt$로 치환하자. $x = e^t$이다.

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{t}{e^t}dt - \int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \left[-(1+t)e^{-t}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2} = \frac{2e-3}{e^2} + \frac{1-e}{e^2} = \frac{e-2}{e^2}$$이다.

※ 다른 풀이 2

부분적분을 사용하자. $\dfrac{1}{x^2}$**을 적분하기 쉬운 형태로,** $1-\ln x$**를 미분하기 쉬운 형태로 두자.**

$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx = \left[\frac{1-\ln x}{x}\right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{e^2} - \left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2} = \frac{e-2}{e^2}$이다.

예제(4) 19학년도 수능 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.

(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1$, $f(6) = 2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3}$

1. **조건 (가)를 보면 바로 치환적분 꼴**이라는 걸 알아야 한다.

따라서 $\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 + \mathrm{A}$ 가 바로 나와야 한다.

정리 좀 해주면 $4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + \mathrm{C}$

2. **조건 (나)를 보면 '아! 적분 상수 처리용이구나.'**를 인지해야 한다.

조건 (나)를 이용하기 위해 x에 숫자를 직접 대입해 보자.

$x = -\frac{1}{8}$을 대입하면 $4 = \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 + \mathrm{C}$

$x = \frac{3}{4}$를 대입하면 $4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 = \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 + \mathrm{C}$

$x = \frac{5}{2}$를 대입하면 $4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 = 8 + \mathrm{C}$

3. 이제 가볍게 위 식들을 정리하면…….

$4\{4\times(4-\mathrm{C})-\mathrm{C}\}-\mathrm{C} = 8$이 되고 $\mathrm{C} = \frac{8}{3}$

$x = -1$을 대입하면

$$4\{f(-1)\}^3 = \{f(-1)\}^3 + \frac{8}{3}$$

$$\{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9}$$

$$f(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

답은 ④!!

예제(5) 19학년도 수능 16번

$x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$ ④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2+3}{3\quad 2}$

1. 문제에서 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$를 발견했을 때, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$가 바로 생각났어야 했다.

   두 번째로 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$에서 **적분 구간 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}$ 봤을 때, 치환적분을 써야겠다는 확신**이 생긴다.

2. 양변을 정적분을 씌워주면 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}dx$이다.

   좌변을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}2f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}2f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=3\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx$$

   우변을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}dx=\left[\ln x-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=2\ln 2+\frac{3}{2}$$

   따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$

답은 ②!!

예제(6) 17학년도 수능 21번

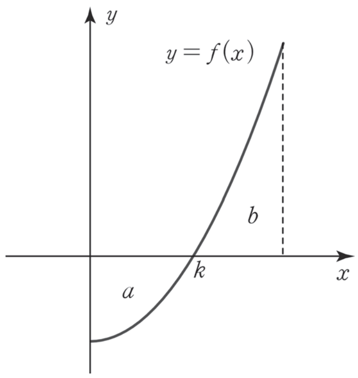
닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^1 |f(x)|dx = 2\sqrt{2}$를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가 $F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \ (0 \le x \le 1)$일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$ ④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

1. $F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ **정적분으로 정의된 함수가** 나왔으므로

   1. $x=0$ **대입**을 하여 $F(0)=0$을 얻어낸다.
   2. **양변을 x에 대해 미분**하여 $F'(x)=|f(x)|$를 얻어낸다.

2. **절댓값 기호를 보면 구간을 나누어 벗겨줄 생각**을 꼭 해야 한다!
   그대로 끌고 나가면 문제가 풀리지 않는다.
   첫 문장을 읽어준 후 고민이 되는 게 **절댓값을 벗겨줄 만한 구간에 대한 조건이 딱히 나와 있지 않다.**
   $f(x)$가 **증가하는 '연속함수'**라고 나와 있고
   $\int_0^1 f(x)dx$ **값과** $\int_0^1 |f(x)|dx$ **값이 다른 걸 보면**
   다음과 같이 그림을 그려줄 수 있다.
   미분가능성에 대해선 언급하지 않았으므로 함부로 판단하지 않는다.



   따라서 이제 **$|f(x)|$의 절댓값을 벗겨줄 수 있다.**
   $0 \le x \le k$일 때에는 $|f(x)| = -f(x)$, $k \le x \le 1$에는 $|f(x)| = f(x)$이다.

   함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,1]$ 에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.
   곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 b라고 하자.

   ※ **연속함수라는 조건과 미분가능하다는 조건**은 킬러뿐만 아니라 중요한 조건이기에 **꼭 표시**해야 한다.
   킬러에서는 특히 이것에 문제를 푸느냐 마느냐가 달렸다.

3. $\int_0^1 f(x)dx = 2$에서 $-a+b=2$, $\int_0^1 |f(x)|dx = 2\sqrt{2}$에서 $a+b=2\sqrt{2}$이므로
   $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{2}+1$

4. $0 \le x \le k$**일 때,** $F(x) = \int_0^x (-f(t))dt$, $F'(x) = -f(x)$

   $k \le x \le 1$**일 때,** $F(x) = -a + \int_k^x f(t)dt$, $F'(x) = f(x)$

   따라서 $\int_0^1 f(x)F(x)dx = \int_0^k f(x)F(x)dx + \int_k^1 f(x)F(x)dx$
   $= -\int_0^k F'(x)F(x)dx + \int_k^1 F'(x)F(x)dx$
   로 정리할 수 있고 드디어 치환적분 꼴이 보인다!

5. $-\frac{1}{2}\left[\{F(x)\}^2\right]_0^k+\frac{1}{2}\left[\{F(x)\}^2\right]_k^1$ 으로 $F(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt$ 이므로

$F(0)=0,\ F(k)=\sqrt{2}-1,\ F(1)=2\sqrt{2}$ 를 이용하면

$\int_0^1 f(x)F(x)dx=1+2\sqrt{2}$

답은 ④!!

예제(7) 17년 10월 교육청 14번

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,
$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$의 값은? [4점]

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

1. **역함수라는 말이 나오면…….**

(1) $f(g(x))=x,\ g(f(x))=x$를 꼭 적는다.

(2) $f(1)=3$에서 $g(3)=1$을, $g(1)=3$에서 $f(3)=1$을 꼭 적는다.

2. $f(g(x))=x \quad \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
$g(f(x))=x \quad \{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$와 $f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$를 이용해서 $\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$를

$\int_1^3 f(x)g'(x)+f'(x)g(x)dx$로 바꿔줄 수 있다.

※ $f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$와 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 정도는 평소에 기억하고 다니자.

3. $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$은 **곱의 미분 꼴**이므로

$$\int_1^3 f(x)g'(x)+f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_1^3 = f(3)g(3)-f(1)g(1)=-8$$

답은 ①!!

예제(8) 자 작 문 제

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 이계도함수를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=xf'(x)-(x\cos x-\sin x)$ (나) $f(\pi)=\pi$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{2}-2$ ② $\dfrac{\pi}{2}-1$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{\pi}{2}+1$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}+2$

1. 치환적분이 고였다면 조건 (가)에서 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 꼴이 생각났을 것이다.

   이를 이용하기 위해서 조건 (가)를 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$로 바꿔주자.

2. $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$는 곧 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'$이므로

   양변을 x에 대해 적분하면 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sin x}{x}+C$이다.

   조건 (나)를 통해 $C=1$임을 알 수 있으므로 $f(x)=\sin x+x$이다.

   $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}$이다.

답은 ④!!

comment

최근 적분 킬러는 단순히 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 알아보는 것이 아닌 식을 조작하여 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 '만들어' 내는 것을 요구하고 있다. 이를 대비하기 위해 몫의 미분꼴 형태를 만들어 적분하는 문제를 만들어 보았다. 언젠가는 평가원에 나올 것이기에 잘 대비해두자.

예제(9) 20학년도 6월 평가원 20번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) > 0$

(나) $\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x > 0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. **조건 (가)의** $f(x)>0$**는 조건 (나)의** $\ln f(x)$**의 로그 진수 조건을 만족한다.**

x**에 대한 '항등식'** $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$**는 정적분으로 정의된 함수이므로**

$f(0)=1$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$**뽑아낸다.**

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$에서 $f'(0)=0$도 얻을 수 있다,

※ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$을 얻는 과정

$\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$를 $\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$로 바꾼 후,

양변을 x에 대해 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$을 얻을 수 있다.

2. $f(x)>0$이므로 $x>0$에서 $\int_0^x f(t)dt>0$이다.

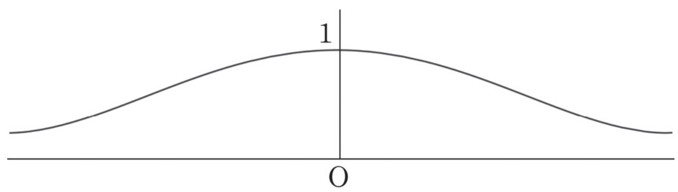
따라서 $x>0$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$이 성립하려면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}<0$, $f'(x)<0$이어야 한다.

선지 (ㄱ)은 참.

3. $f(x)>0$이므로 $x<0$에서 $\int_0^x f(t)dt<0$이다.

따라서 $x<0$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$이 성립하려면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}>0$, $f'(x)>0$이어야 한다.

정리하면 $f(x)$는 $x>0$에서 $f'(x)<0$이고, $x<0$에서 $f'(x)>0$이다.
$f(x)>0$, $f'(0)=0$, $f(0)=1$을 반영한 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



선지 (ㄴ)은 참.

4. $F(x)=\int_0^x f(t)dt$**는 정적분으로 정의된 함수이므로** $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$**를 뽑아낸다.**

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$를 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$로 바꾸어 보자.

선지 (ㄷ)을 판단하려면 $f(x)+\{F(x)\}^2$꼴이 필요한데 어떻게 해야 할까?

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$의 양변에 $f(x)$를 곱하자. $f'(x)+2F(x)f(x)=0$이다.

$f'(x)+2F(x)f(x)=0$의 양변을 x에 대해 적분하면 $f(x)+\{F(x)\}^2=\mathrm{C}$이다.

$f(0)=1$, $F(0)=0$이므로 $\mathrm{C}=1$이다. **모든** x**에 대해** $f(x)+\{F(x)\}^2=1$**이다.**

따라서 $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다. 선지 (ㄷ)은 참.

답은 ⑤!!

※ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$의 양변에 $f(x)$를 곱하는 발상은 어떻게 떠올릴까?

$f(x)+\{F(x)\}^2$가 우리가 목표하는 꼴인데 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$를 가만히 둬도 소용없고, x에 대해 미분해도 소용없다. 그렇다면? x**에 대해 적분하는 선택지만 남는다.**

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$의 양변을 x에 대해 적분하려고 하면

$f(x)+\{F(x)\}^2$에서 $\left(\{F(x)\}^2\right)'=2F(x)f(x)$을 떠올리고

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2F(x)=0$의 양변에 $f(x)$를 곱해야겠다고 생각할 수 있다.

기출로 누적된 경험으로부터 치환적분 꼴을 가볍게 알아볼 수 있어야 한다.

comment

최근 적분 킬러는 단순히 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 알아보는 것이 아닌 식을 조작하여 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 '만들어' 내는 것을 요구하고 있다.

또한, 평가원 ㄱㄴㄷ 문제가 발전하여 선지를 보기 전 문제 발문에서 얻을 수 있는 정보를 정리하지 않으면 선지 (ㄱ)조차 판단하기 어려워졌다. **선지를 보기 전 문제 발문에서 얻을 수 있는 정보를 정리하자.**

예제(10) 20학년도 9월 평가원 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin \pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

1. $f(7)$을 **구하기 위해서는 함수** $f(x)$**에 대한 식이 필요하다.**

이를 위해 $f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$의 양변을 x에 대해 적분해야 한다.

하지만 $f'(x^2+x+1)$을 x에 대해 바로 적분할 수 없다.

양변에 $(2x+1)$**을 곱하여 치환적분 꼴을 만들어주자.**

$(2x+1)f'(x^2+x+1)=(2x+1)(\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2)$

$=f(1)(2x+1)\pi\sin\pi x+f(3)(2x^2+x)+10x^3+5x^2$ 이므로 x에 대해 양변을 적분하면

$$f(x^2+x+1)=-f(1)\left\{(2x+1)\cos\pi x-\int 2\cos\pi x\,dx\right\}+f(3)\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3$$

$$=f(1)\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi x-(2x+1)\cos\pi x\right)+f(3)\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+C$$ 이다.

2. $x^2+x+1=x(x+1)+1$이므로 $x=0$과 $x=-1$을 대입해서 $f(1)$을 구하자.

일단 먼저 $x=0$을 대입하자.

$f(1)=-f(1)+C$ 에서 $f(1)=\dfrac{C}{2}$이다.

다음으로 $x=-1$을 대입하자.

$f(1)=-f(1)-\dfrac{f(3)}{6}+\dfrac{5}{6}+C$ 에서 $f(3)=5$를 얻는다.

※ 대칭성을 이용해 $f(3)=5$을 얻기

$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$에서

$f'(x^2+x+1)$, $\pi f(1)\sin\pi x$가 직선 $x=-\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(3)x+5x^2$도 직선 $x=-\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이어야 한다.

이차함수 $f(3)x+5x^2$가 직선 $x=-\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이려면 $f(3)=5$여야 한다.

3. $x=1$을 대입하여 $f(1)$과 적분상수 C를 구하자.

$f(3)=3f(1)+\dfrac{7}{6}f(3)+\dfrac{25}{6}+C$ 에서

$f(1)=\dfrac{C}{2}$, $f(3)=5$를 대입하면

$5=\dfrac{3}{2}C+\dfrac{35}{6}+\dfrac{25}{6}+C$ 에서 $\dfrac{5}{2}C=-5$, $C=-2$, $f(1)=-1$을 얻는다.

따라서 $f(x^2+x+1)=-\left(\dfrac{2}{\pi}\sin\pi x-(2x+1)\cos\pi x\right)+\dfrac{5}{2}x^4+5x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2$ 이다.

4. $x=2$를 대입하여 구하고자 하는 $f(7)$의 값을 구하자.
$f(7)=5+40+40+10-2=93$이다.

답은 93!!

comment

최근 적분 킬러는 단순히 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 알아보는 것이 아닌 식을 조작하여 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 '만들어' 내는 것을 요구하고 있다.

예제(11) 19년 10월 교육청 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^{x}\sin(\pi x)$

(나) $g(x+1)=\int_{0}^{x}\{f(t+1)e^{t}-f(t)e^{t}+g(t)\}dt$

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{10}{9}e+4$일 때, $\int_{1}^{10}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

1. 조건 (가)에서 모든 정수 n에 대하여 $g(n+1)-g(n)=0$이다.
   조건 (나)에서 $g(1)=0$이므로 모든 정수 n에 대하여 $g(n)=0$임을 쉽게 알 수 있다.

2. 조건 (가)의 양변을 x에 대해 미분하자.
   $g'(x+1)-g'(x)=-\pi(e+1)e^{x}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$이다.

   조건 (나)의 양변을 x에 대해 미분하면
   $g'(x+1)=f(x+1)e^{x}-f(x)e^{x}+g(x)$에서
   $g'(x+1)-g'(x)=f(x+1)e^{x}-f(x)e^{x}+g(x)-g'(x)$이다.
   $-\pi(e+1)e^{x}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)=e^{x}\{f(x+1)-f(x)+(g(x)-g'(x))e^{-x}\}$이므로
   $-\pi(e+1)(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)=f(x+1)-f(x)+\{g(x)-g'(x)\}e^{-x}$이다.

   ※ 왜 $g'(x+1)=f(x+1)e^{x}-f(x)e^{x}+g(x)$의 양변에 $g'(x)$를 뺄 생각을 했을까?
   조건 (가)에서 뽑아낸 $g'(x+1)-g'(x)=-\pi(e+1)e^{x}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$을 이용하려면
   $g'(x+1)-g'(x)$ 꼴이 필요하기 때문이다.

3. 이제 $-\pi(e+1)(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)=f(x+1)-f(x)+\{g(x)-g'(x)\}e^{-x}$의 양변을 x에 대해 적분하자. $\int(g'(x)-g(x))e^{-x}dx=g(x)e^{-x}+C$을 알아볼 수 있어야 한다.

$(e+1)(\cos\pi x-\pi\sin\pi x)+C=\int_{x}^{x+1}f(t)dt-g(x)e^{-x}$ 이다.

$x=0$을 대입하면 $e+1+C=\int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{10}{9}e+4$에서 $C=\frac{e}{9}+3$이다.

따라서 모든 정수 n에 대하여 $\int_{2n}^{2n+1}f(x)dx=e+1+C$, $\int_{2n+1}^{2n+2}f(x)dx=-(e+1)+C$ 이므로

$\int_{1}^{10}f(x)dx=-(e+1)+9C=26$이다.

답은 26!!

※ $\int(f(x)+f'(x))e^{x}dx=f(x)e^{x}+C$,

$\int(f'(x)-f(x))e^{-x}dx=f(x)e^{-x}+C$ 임을 꼭 짚고 넘어가자.

comment

최근 적분 킬러는 단순히 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 알아보는 것이 아닌 식을 조작하여 치환적분, 부분적분이 가능한 꼴을 '만들어' 내는 것을 요구하고 있다.

부분적분

부분적분은 치환적분과 달리 적용이 은근 힘들다. 익숙하지 않다면 이상한 꼴의 적분 식을 보면 쫄 수밖에 없다. **고등학교 교육 과정 내에 적분 가능 형태는** $\sin x, \cos x, e^x \cdots$등등 **기본적 함수 적분, 치환적분, 부분적분 밖에 없다. 따라서 이상한 적분 식을 봐도 쫄 필요가 전혀 없다.** 더 복잡할수록 더 많은 힌트를 주는 것이라고 생각하자. 적분이 약할수록 잘 썰리고 강할수록 시간 단축을 할 수 있어 더욱 중요한 파트이다.

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$은 부분적분하는 방법을 나타낸 것이다.
v'은 적분하기 쉬운 형태이고, u는 미분하기 쉬운 형태로 볼 수 있다.

$f(x), g(x) \cdots$등등 일반식이 낄 때가 아닌 $\sin x, \cos x, e^x \cdots$등등 구체적 식이 들어간 부분적분부터 살펴보자. 이건 별로 어렵지 않다.
구체적인 식일 때, **로그함수, 다항함수, 삼각함수, 지수함수 순으로 미분하기 쉬운 형태이다. '로다삼지'로 외우면 편하다. 지수함수, 삼각함수, 다항함수, 로그함수 순으로 적분하기 쉬운 형태이다.**

$$\int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

$\ln x$ 부정적분은 이와 같이 부분적분을 이용하여야 한다.
특이한 점은 **$\ln x$를 $1 \times \ln x$으로 보고,**
1을 적분하기 쉬운 형태인 v'로 보고 $\ln x$를 미분하기 쉬운 형태인 u로 본다는 점이다.
$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ 정도는 자주 나오니 암기하고 있자.

※ Table 적분법
부분적분을 쉽게 할 수 있는 도구이다. 예시를 통해 사용법을 알려주겠다.
예를 들어 $\int (x^2+3x+2)e^{-x}dx$를 구한다고 하자.
x^2+3x+2는 미분하기 쉬운 형태이고 e^{-x}는 적분하기 쉬운 형태이다.

	미분 쉬운 꼴		적분 쉬운 꼴	
미분 ↓	x^2+3x+2	$+$	e^{-x}	↓ 적분
미분 ↓	$2x+3$	$-$	$-e^{-x}$	↓ 적분
미분 ↓	2	$+$	e^{-x}	↓ 적분
	0	$-$	$-e^{-x}$	

이를 식으로 표현하면 $-(x^2+3x+2)e^{-x} - (2x+3)e^{-x} - 2e^{-x} - \int 0 \times (-e^{-x})dx$이다.
따라서 $\int (x^2+3x+2)e^{-x}dx = -(x^2+5x+7)e^{-x} + C$이다.
부호가 워낙 헷갈리기에 주의해야 한다.

$f(x), g(x)\cdots$등등 일반식이 포함될 때의 부분적분에 대해 알아가기 전에
일반식이 포함된 유명한 부분적분 꼴 하나 보고 가자.

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$\int xf'(x)dx$을 보면 **바로 부분적분 써야겠다**는 생각이 들어야 한다.

이를 이용하면 식이 너무 깔끔히 정리되기 때문이다. $f'(x)$ **적분하면 깔끔하게** $f(x)$**가 나오기에 적분하기 쉬운 형태이고** x**는 미분하면** 1**이기에 미분하기 쉬운 형태**이다.

$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$처럼 $\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$도 암기하고 있자.

이제 $f(x), g(x)\cdots$등등 일반식이 포함될 때의 부분적분을 본격적으로 살펴보자. 학습이 잘 안 되어 있다면 마냥 어렵게만 느껴지는 파트이다. 하지만 기출에 수도 없이 나오기에 잘 학습이 되어야 한다.
17학년도 9월 평가원 21번을 잘 분석하면 일반식이 포함된 부분적분 문제들을 수월하게 풀 수 있다.
분석 전 꼭 고등학교 적분에는 기본적 함수 적분, 치환적분, 부분적분 셋 중 하나로 해결된다는 마인드를 지니고 시작하자.

예제(12) 17학년도 9월 평가원 21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$　② $\dfrac{6}{e^4}$　③ $\dfrac{20}{3e^4}$　④ $\dfrac{22}{3e^4}$　⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

1. 조건 (나)를 보면 **정적분으로 정의된 함수**이므로 반사적으로 우변 적분 구간 x**에** 1**을 대입하여** $g(1)=0$을 뽑아내고 **양변을 미분**하여 $g'(x)=\frac{4}{e^4}e^{x^2}f(x)$를 뽑아낸다.

2. 1에서 구한 $g'(x)=\frac{4}{e^4}e^{x^2}f(x)$는 구하고자 하는 것이 $f(2)-g(2)$이기에 딱히 쓸모가 없음이 예상된다. 하지만 문제를 완전히 다 풀 때까지 이건 모르는 것이다.

조건 (나)는 **기본적 함수 적분도 아니고 역시 치환적분 꼴은 아니다.**
남은 선택지는 부분적분뿐이다.
이 사고과정을 익숙하게 하자. 그래야 쫄지 않는다.

3. 하지만 위 문제처럼 구체적 식이 안 주어져 있다면 어떻게 할까?
조건 (가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$**를 힌트로 쓰면 된다.**
조건 (가)는 $\frac{f(x)}{x}$**가 미분하기 쉬운 형태임을 암시하는 것이다.**
따라서 $\frac{f(x)}{x}$는 $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$에서 u**에 해당한다.**

$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$를 (가) 조건을 쓸 수 있도록 변형하면

$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}dt$가 된다.

4. $2te^{t^2}$**는 치환적분이 쉬운 꼴임**을 바로 발견해야 한다.
$(e^{t^2})'=2te^{t^2}$로 가볍게 표현할 수 있으므로 $2te^{t^2}$**는 적분하기 쉬운 형태**이다.
$(e^{t^2})'$는 $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$에서 v'**에 해당한다.**
따라서 **치환적분에서 무작정 치환하는 게 아니라 "무엇을 미분하면 적분 기호 안에 있는 식이 나올까?" 부터 고민하는 자세를 지녀야 한다.**

5. $g(x)=\frac{2}{e^4}\int_1^x(e^{t^2})'\times\frac{f(t)}{t}dt=\frac{2}{e^4}\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\frac{2}{e^4}\int_1^x e^{t^2}\times t^2e^{-t^2}dt$

$=\frac{2}{e^4}\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\frac{2}{e^4}\int_1^x t^2dt$

$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right)$

$=f(2)-\frac{20}{3e^4}$

따라서 $f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$이다.

답은 ③!!

comment

앞으로 **일반식 $f(x), g(x)\cdots$ 등등이 등장하는 부분적분 관련 문제** 중 **17년 9월 평가원 21번 조건 (가)처럼 미분하기 쉬운 형태**를 조건에서 잘 찾아내서 조건 (가) 형태 꼴로 정리가 안 되어 있다면 **조건 (가) 형태 꼴로 정리**해 주자. 그 후 **나머지 부분이 적분하기 쉬운 형태**라는 걸 알아본다면 부분적분 CLEAR다.

예제(13) 11학년도 수능 28번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다.

모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\ (a>0,\ 0<k<1)$일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

1. $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 어디서 많이 보지 않았는가? 또 치환적분이다.

17년 9월 평가원 21번 조건 (가)처럼 정리하면 $f(2x)=(\{f(x)\}^2)'$

따라서 $\{f(x)\}^2$는 미분하기 쉬운 형태이다.

$f(a)=0$는 뭐 적분 상수 처리하려고 또 나오셨겠지.

2. $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$을 구해야 하는데 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$이 주어졌다.

기본적 함수 적분도 아니고 치환적분도 아니니 부분적분이다.

여기서 팁 하나는 주어진 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$에서 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx$를 변형하여 $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$ 꼴이 나오게 만들어내는 것보다 **구하려고 하는 $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$을 변형시켜 문제 조건에 있는 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx$ 꼴이 나오게 하는 것이 대체로 유리하다.** 이외의 부분적분 문제에서도 **구하고자 하는 식을 변형시켜 조건에 나온 식의 꼴이 나오게 하는 것이 훨씬 유리하다.**

3. $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$을 변형해보자.

$f(2x)=(\{f(x)\}^2)'$으로 **$\{f(x)\}^2$는 미분하기 쉬운 형태이고 $-\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)'$이므로 $\frac{1}{x^2}$은 적분하기 쉬운 형태**로 두면 되겠다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\left[-\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a}-\int_a^{2a}-\frac{1}{x}\times(\{f(x)\}^2)'dx$$

$$=\left[-\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a}+\int_a^{2a}\frac{1}{x}\times f(2x)dx$$

$\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$는 치환적분을 이용하면 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$꼴이 나올 것이다.

$$\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx=\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$$

$\left[-\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a}$ 처리를 위해서는 $f(2a)$, $f(a)$가 필요하다.

$f(a)=0$인데 $f(2a)$? 당황스럽다. 이럴 땐 머리 싸매지 말고 문제로 다시 돌아가자.

$f(2x)=2f(x)f'(x)$**도 나름 항등식이고 $x=a$ 대입하면 $f(2a)=0$이 나온다.**

따라서 $\left[-\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a}=0$이다.

결론적으로 $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=k$이다.

답은 ④!!

예제(14) 18학년도 사관 25번

도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(\pi)=0$
(다) $\int_0^{\pi} x^2 f'(x)\,dx=-8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)\,dx=k\pi$일 때, k의 값을 구하시오. [3점]

1. 조건 (다)를 보고 부분적분을 하고 싶어서 손이 근질근질해야 한다.

$\int_0^{\pi} x^2 f'(x)dx=\left[x^2 f(x)\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} xf(x)dx=-8\pi$이다.

$f(0)=0$, $f(\pi)=0$이므로 $\int_0^{\pi} xf(x)dx=4\pi$이다.

2. $\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)dx$의 **적분구간에 집중**하자. **대칭성에 의해 계산이 간편해질 수 있다.**

일단 $\cos x$는 우함수, $f(x)$는 기함수이므로 $\cos x\times f(x)$는 기함수이다.
마찬가지로 $y=x$와 $f(x)$는 기함수이므로 $xf(x)$는 우함수이다.

따라서 $\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x f(x)dx=2\int_0^{\pi} xf(x)dx+0=8\pi$

이다. $k=8$이므로 **답은 8!!**

예제(15) 15학년도 9월 평가원 30번

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.

(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.

(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **양의 실수 전체의 집합**에서 **감소**하고 **연속**인 함수 $f(x)$를 보고 그냥 넘어가면 안 된다.
꼭 표시하고 넘어가라! 미분가능성에 대한 언급은 없다는 걸 확인한다.

조건 (가)는 표시 정도만 하고 넘어간다.
조건 (나)는 삼각형 넓이를 한 번 구해야겠다. 구해주자!
조건 (다)는 또 적분상수 처리용이겠지, 뭐.

2. 조건 (나)에 있는 세 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 신발끈 공식을 이용하여
삼각형의 넓이를 구해보면 $\frac{1}{2}\,|\,tf(t+1)-(t+1)f(t)\,|$ 이다.

$$\frac{1}{2}\,|\,tf(t+1)-(t+1)f(t)\,|=\frac{t+1}{t}$$

구하려는 것을 고려하면 $\frac{f(x)}{x}$ **꼴이 필요**하기에 양변을 $t(t+1)$ 로 나누어주면

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}\right|=\frac{1}{t^2}$$ 이다.

이제 **절댓값을 풀어주고 싶은데……. 문제로 다시 돌아가면 $f(t)$ 는 감소함수이고 $f(t)>0$ 이라는 조건이 있다.**

따라서 $\frac{f(t)}{t}>\frac{f(t+1)}{t+1}$ 이고 $\therefore \frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$

※ 신발끈 공식
Chapter 1에서 삼각형 넓이 구하는 방법 중 하나로 나온다.
삼각형을 세 점의 이루는 세 점의 좌표가 (x_1, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_1)일 때 삼각형 넓이는 아래의 공식을 이용하여 구하면 된다.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

선으로 이어진 것끼리 곱하면 된다. **다만, \은 부호가 $+$이고 /은 부호가 $-$이다.** 맨 바깥의 $|\ \ |$는 절댓값이다. 따라서 넓이 $S=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_3y_2+x_2y_1)\right|$ 이다.

3. $\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$ 에서 $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$를 구하는데 필요한 $\frac{f(t)}{t}$도 보이고

$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2$도 있는데 뭘 해야 하지?

첫 번째 방법으로는 $\int_1^2\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}dt=\int_1^2\frac{2}{t^2}dt$ 을 씌우는 방법이 있다.

$\int_1^2\frac{f(t+1)}{t+1}dt$을 치환적분을 이용해 $\int_2^3\frac{f(x)}{x}dx$을 구하고

$\int_3^4\frac{f(x)}{x}dx$, $\int_4^5\frac{f(x)}{x}dx$, $\int_5^6\frac{f(x)}{x}dx$ $\cdots$을 구하는데 계산이 너무 많다.

4. 다른 방법이 있을까? 여기서 이제 기출 아이디어가 튀어나온다.

왜 항등식을 보면 상수 대입과 미분만 생각하는가? 적분도 가능하다.

$\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$ 을 $\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}+C$으로 바꿔 줄 수 있다,

$\frac{f(t)}{t}$와 $\frac{f(t+1)}{t+1}$꼴이 매우 유사하다는 점을 이용한 것이다.

$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2$을 이용하면 $\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}+C$의 적분 상수 $C=0$.

5. $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$으로 분리시킨 후

$\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}$에서 $t=\frac{7}{2}$를 대입하면 $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{4}{7}$이고

$t=\frac{9}{2}$를 대입하면 $\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{4}{9}$이다. 따라서 $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{64}{63}$

답은 127!!

comment

$f(t+1)-f(t)$를 적분하여 $\int_t^{t+1}f(x)dx+C$로 표현할 수 있음을 반드시 기억하자.

이제 19학년도 6월 평가원 30번을 물리치러 가자.

예제(16) 19학년도 6월 평가원 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여 $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$이고, $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오.

[4점]

1. **'실수 전체'**의 집합에서 **'미분가능'**한 함수 $f(x)$에 표시하고 지나간다.

연속함수, 미분가능한 함수 항상 말하지만 매우 중요한 조건들이다. 킬러에서 더욱 힘을 발휘한다.

$g(t)$는 접선의 y절편이므로 $y=f(t)$의 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$이다.

뭐 여기까지진 할 만하다. **킬러는 이렇게 한 줄씩 차례대로 접근하는 것이다.**

2. $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$ 이걸 보면……. 흠…….

치환적분이 적당 수준으로 고이게 되면 $g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$**으로 바꿔준다.**

왜냐? $\dfrac{2t}{1+t^2}$**이 '**$\ln(1+t^2)+C$**으로 치환적분해주세요.'**라고 애원하고 있다.

물론 아직 문제를 끝까지 읽지 않았기 때문에 $\dfrac{g(t+1)-g(t)}{t+1-t}=\dfrac{2t}{1+t^2}$**처럼 평균값 정리 꼴도 배제할 수 없는 가능성**이다.

3. 다음 줄을 읽어보겠다. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\dfrac{\ln 17}{8}$가 나왔다.

가볍게 **적분 상수처리를 위해 나온 애들**이구나 생각하고 넘어가자.

4. $2\{f(4)+f(-4)\}-\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)dx$을 구하란다. 이로써 확실해졌다. $\dfrac{g(t+1)-g(t)}{t+1-t}=\dfrac{2t}{1+t^2}$의 가능성은 배제한다. 평균값 정리는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 꼴인데 c가 특정될 수 없기에 이 문제에서는 그리 쓸모 있을 것 같지 않다.

$g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$의 꼴을 적분을 이용해 바꿔보자.

$\dfrac{2t}{1+t^2}$이 치환적분에 대한 단서이므로 위 항등식의 양변에 t에 대해 적분하면 될 듯하다.

$g(t+1)-g(t)$를 어떻게 깔끔하게 적분형태로 만들까?

15학년도 9월 평가원 30번 아이디어를 활용한다.

$g(t+1)-g(t)$를 적분하여 $\displaystyle\int_t^{t+1} g(x)dx+C$로 바꿔주자.

따라서 $g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$으로부터 $\displaystyle\int_t^{t+1} g(x)dx=\ln(1+t^2)+C$를 만들었다.

5. 구하려는 식이 $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$이기에 우리는 $g(x)$가 아닌 $f(x)$에 관련된 식이 필요하다. 이제 $g(x)=-xf'(x)+f(x)$를 $\int_{t}^{t+1} g(x)dx=\ln(1+x^2)+\mathrm{C}$에 대입해주자.

그러면 $\int_{t}^{t+1} -xf'(x)+f(x)dx=\ln(1+x^2)+\mathrm{C}$이 나온다.

모두 기뻐하자! **익숙한 부분적분 꼴**이 등장했다.

$\int_{t}^{t+1} -xf'(x)dx$는 제일 유명하고 대표적인 부분적분 꼴이다.

$f'(x)$는 적분하기 쉬운 형태이고 x는 미분하기 쉬운 형태이므로

부분적분을 하면 $\int_{t}^{t+1} -xf'(x)dx=[-xf(x)]_{t}^{t+1}-\int_{t}^{t+1} -f(x)dx$

위의 결과를 이용해 좌변을 정리하면

$\int_{t}^{t+1} -xf'(x)+f(x)dx=2\int_{t}^{t+1} f(x)dx-[xf(x)]_{t}^{t+1}$

최종적으로 $2\int_{t}^{t+1} f(x)dx-[xf(x)]_{t}^{t+1}=\ln(1+x^2)+\mathrm{C}$.

6. 이제 쓸 조건이 $\int_{0}^{1} f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$이 남았으니

$2\int_{t}^{t+1} f(x)dx-[xf(x)]_{t}^{t+1}=\ln(1+t^2)+\mathrm{C}$에 $t=0$을 대입해 C를 구해보자.

$2\int_{0}^{1} f(x)dx-f(1)=-4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2}=\mathrm{C}$ 평가원, 미쳤습니까?

하지만 생각이 있어 이렇게 낸 거겠지. 뭐. 평가원에 순응하는 자세를 갖자.

7. $\int_{-4}^{4} f(x)dx$이 필요하니 $2\int_{t}^{t+1} f(x)dx-[xf(x)]_{t}^{t+1}=\ln(1+t^2)+\mathrm{C}$에

$t=-4, t=-3, t=-2, t=-1, t=0, t=1, t=2, t=3$ **을 대입해야할 것 같은** 불길한 예감이 들지만 맞다. 넣어야 한다. 수고해라.

$$2\int_{-4}^{-3} f(x)dx+3f(-3)-4f(-4)=\ln 17+C$$

$$2\int_{-3}^{-2} f(x)dx+2f(-2)-3f(-3)=\ln 10+C$$

$$2\int_{-2}^{-1} f(x)dx+f(-1)-2f(-2)=\ln 5+C$$

$$2\int_{-1}^{0} f(x)dx-f(-1)=\ln 2+C$$

$$2\int_{0}^{1} f(x)dx-f(1)=C$$

$$2\int_{1}^{2} f(x)dx-2f(2)+f(1)=\ln 2+C$$

$$2\int_{2}^{3} f(x)dx-3f(3)-2f(2)=\ln 5+C$$

$$2\int_{3}^{4} f(x)dx-4f(4)+3f(3)=\ln 10+C$$

대입하면 이처럼 나오고 신기하게 **좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 다 더하면 다음과 같이 깔끔하게 정리된 식**이 나온다.

$$2\int_{-4}^{4} f(x)dx-4f(4)-4f(-4)=2\ln 2+2\ln 5+2\ln 10+\ln 17+8C$$

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx-2f(4)-2f(-4)=\ln 2+\ln 5+\ln 10+\frac{1}{2}\ln 17+4C$$

$$2f(4)+2f(-4)-\int_{-4}^{4} f(x)dx=-\ln 2-\ln 5-\ln 10-\frac{1}{2}\ln 17-4C$$

드디어 $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$ 꼴이 등장했다!!!

$C=-4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2}$을 대입하면 $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx=16$

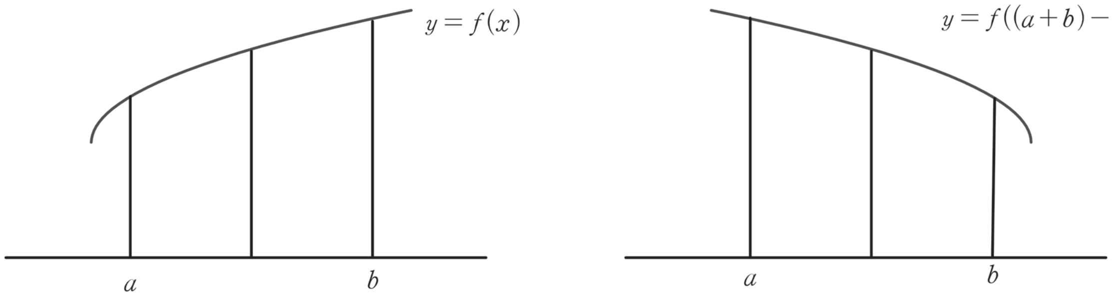
답은 16!!

comment

기존의 기출, 치환적분, 부분적분을 아름답게 버무린 문제였다. 요즘 평가원 문제가 더 어렵게 느껴지는 이유는 **이전 기출의 킬러 아이디어들을 2개 이상 이용**하기 때문이다.

[번외] 대칭 정적분

그리 비중 있지는 않고 평가원 및 수능에서는 치환적분을 이용해도 꼴이 잘 보이기에 몰라도 되는 풀이이긴 하나 혹시 좀 더 편하게 정적분하길 바라는 마음에서 추가한다.
대칭 정적분의 개념은 이렇다.



위 그림을 보면 $f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 정적분이

$f(x)$를 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대하여 대칭시킨 $f(a+b-x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 정적분과

같다는 점을 시각적으로 확인할 수 있다. 따라서 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$이다.

$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx$ **꼴로 바꾸는 것의 장점**은 **적분 구간을 유지**시킬 수 있다는 점이다.

※ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ 수식적인 증명은 치환적분으로 할 수 있다.

$a+b-x=t$로 치환을 하면 $-dx=dt$이므로 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx=-\int_b^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$를 계산해보자. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$로 바꾼 다음 적분할 수 있지만

대칭 정적분을 이용하면 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$이다.

$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ 라고 한다면 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$ 역시 A이므로

$2A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x+\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$로 $A=\dfrac{\pi}{4}$이다.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 계산을 해보자. 애석하게도 치환적분, 부분적분 적용하기 힘들다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 라고 한다면 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 역시 B이다.

$2B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$로 $B=\frac{\pi}{4}$이다.

주의. 기출에서 절대 메인이 되는 풀이가 아니다. 이 풀이에 절대 집착하면 안 된다. 기본적 함수 적분, 치환적분, 부분적분 이 세 가지가 메인이고 이를 최우선적으로 생각해야 한다.

예제(17) 16년 3월 교육청 28번

함수 $f(x)=\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\qquad b=\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$

일 때, $a+\frac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오. [4점]

1. a부터 구해보면…….

$$f(\pi-x)=\frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}=\frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}=\frac{1}{e^{\cos x}+1}$$ (분자와 분모에 $e^{\cos x}$ 곱함.)

$$a=f(\pi-x)+f(x)=\frac{1}{1+e^{\cos x}}+\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$$

2. b를 구해야 하는데 곤란하다. $\int_0^{\pi}\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}dx$의 형태는 기본적 함수 적분, 치환적분, 부분적분 셋 다 아니다. 여기에서 a를 어떻게 구했는지가 b를 구하는 힌트이다.

$f(\pi-x)+f(x)=1$인 성질을 잘 이용해야 하지 않을까?

3. $\int_0^{\pi}f(\pi-x)+f(x)\,dx=\int_0^{\pi}1dx=\pi$인데 $\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$에서 $\pi-x=t$로 치환하면

$-dx=dt$이므로 $\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx=\int_0^{\pi}f(t)dt=b$이다.

$2b=\int_0^{\pi}f(\pi-x)+f(x)\,dx=\pi$로 $b=\frac{\pi}{2}$이다. $a+\frac{100}{\pi}b=51$**이다.**

답은 51!!

comment

사실 치환적분을 유도한 문제인 듯한데 대칭 정적분을 바로 이용해

$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$을 먼저 쓰고 시작하면 너무 유리한 문제이다.

다만 이런 문제는 기출 중 이것밖에 없으니 절대 대칭 정적분이 우선순위가 되면 안 된다.

물론 고난도 내신에서는 많이 나오는 유형이다.

예제(18) 10학년도 수능 29번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 대칭 정적분을 이용하든 치환적분을 이용하든 밑과 같이 나온다.

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}=k$$

따라서 $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$이므로 선지 (ㄱ)은 참.

2. $\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx+\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}=2k$

왠지 곱의 미분 꼴이 보이지 않는가? 치환적분을 잘 공부했다면 바로 보일 거다.

$\{f(x)g(1-x)\}'=f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)$과

$\{f(1-x)g(x)\}'=-f'(1-x)g(x)+f(1-x)g'(x)$ 꼴 말이다.

이에 맞게 위의 식을 잘 정리해 밑의 식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(1-x)f(x)\}dx+\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(x)f(1-x)\}=2k$$

$$[f(x)g(1-x)]_0^1-[f(1-x)g(x)]_0^1=2f(1)g(0)-2f(0)g(1)=2k$$

3. $f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$를 이용하면 선지 (ㄴ)은 참.

선지 (ㄷ)은 $f(0)=0, g(0)=0$이기에 $k=0$으로 참이라는 것을 알 수 있다.

답은 ⑤!!