제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

수학 영역 (B형)

성명		수험 번호					—				

- ○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- ○ 답안지의 필적확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

뿌리 깊은 나무는 난이도에 흔들리지 않는다.

- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형의 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.
- ○ 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

1. $2^{\log_3 2} \div 2^{\log_3 6}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

2. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2 + a_4 = 30$, $a_5 + a_7 = 810$일 때, $a_3 + a_5$의 값은? [2점]

① 45 ② 60 ③ 90
④ 120 ⑤ 270

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 그래프 G가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 모두 5로 같다. (나) 모든 변의 개수는 40이다.

그래프 G의 모든 꼭짓점의 개수는? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

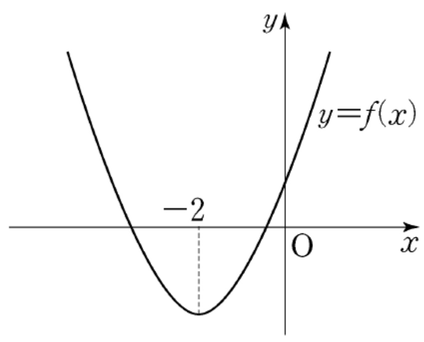
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3x+1}-1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

6. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

7. 대칭축이 $x=-2$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



방정식 $\sqrt{f(-x)+5}=f(-x)-1$의 모든 실근의 합은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 직선 $3x+6y-4=0$ 위의 모든 점이 한 점 $(b,\ c)$로 옮겨질 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

9. 화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다. 어떤 화재실의 초기 온도를 T_0(℃), 화재가 발생한 지 t분 후의 온도를 T(℃)라고 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$$T = T_0 + k\log(8t+1) \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

초기 온도가 20℃인 이 화재실에서 화재가 발생한 지 15분 후의 온도는 60℃이었고, 화재가 발생한 지 $\frac{5}{4}$분 후의 온도? [3점]

① 25 ② 30 ③ 35
④ 40 ⑤ 45

10. 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$$ad - bc = -1, \quad a + d = 0$$

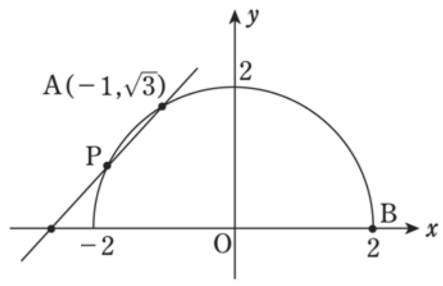
일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

〈보기〉

ㄱ. $A^{-1} = A$
ㄴ. 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. 행렬 $A+2E$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 반원 $x^2 + y^2 = 4$ $(y \geq 0)$ 위의 두 정점 $\mathrm{A}(-1, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(2, 0)$과 같은 반원 위의 동점 $\mathrm{P}(x, y)$가 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때 $\lim_{x \to -1} \sin\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ 1 ⑤ 존재하지 않는다.

[12~13] 좌표평면에서 직선 $y=2x$와 $x=s$, $x=t$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 5가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. (단, $0<s<t$)
12번과 13번의 물음에 답하시오.

12. 곡선 C 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{25}{12}$ ② $\frac{23}{12}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{19}{12}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

13. 곡선 C 위의 점 $(s,\ t)$에 대하여 $\lim_{s\to\infty}\frac{t}{s-2}=m$라 하자. 두 부등식 $(x-2)^2+y^2\le 4$, $y\ge m|x-2|$을 만족하는 영역 $(x,\ y)$의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{2}\pi$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$이고

$$a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)\ \ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[과정]

$a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$에서
$a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}=-\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$이므로
$a_{n+1}-(n+1)a_n=$ (가) $(n\ge 1)$
$b_n=\frac{a_n}{n!}$이라 하면,
$b_{n+1}=b_n+$ (나) $(n\ge 1)$이다.
따라서 $a_n=$ (다) $(n\ge 2)$이다.

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(1)+12g(2)+h(4)$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

15. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을

$a_n =$ ($\log n$ 에 가장 가까운 정수) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

라 하자. 예를 들어 $a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=1,\ \cdots$ 이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$로 계산한다.) [4점]

〈보기〉

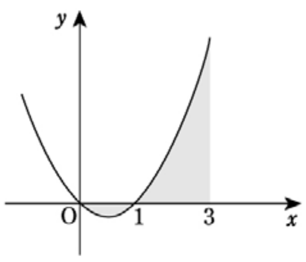
ㄱ. $a_{14}=2$

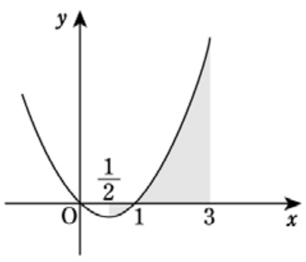
ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n = 17$

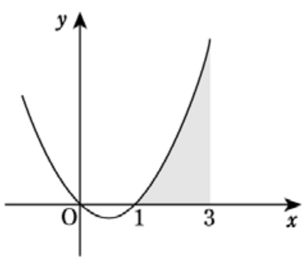
ㄷ. $a_n=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

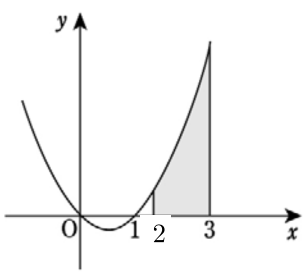
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

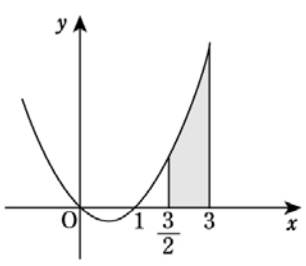
16. 다음 각 그래프는 함수 $y=x^2-x$의 그래프이다. 어두운 부분의 넓이가 무한급수 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{27k^2}{n^3}-\frac{9k}{n^2}\right)$의 값과 같은 것은?

①


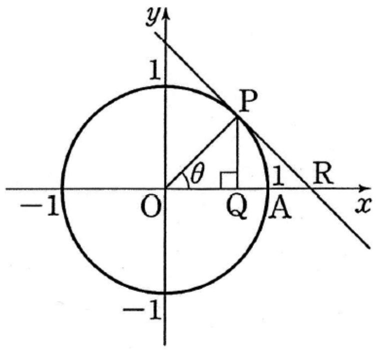
②


③


④


⑤


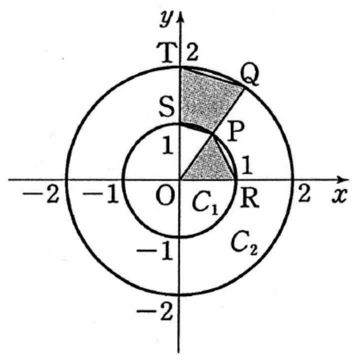
17. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P가 제1사분면 위에 있다. 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 원에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 점 $A(1,0)$과 원점 O에 대하여,



$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{AQ}\times\overline{AR}}{\theta^4}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

18. 그림과 같이 원점이 중심이고 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원점을 지나는 직선이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 C_1이 x축, y축의 양의 방향과 만나는 점을 각각 R, S, 원 C_2가 y축의 양의 방향과 만나는 점을 T라 하자. 이때, 삼각형 OPR와 사각형 $PQTS$의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

19. 점 P가 곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ $(x>0)$ 위를 움직일 때, 점 $A(2,\ 0)$에 대하여 선분 AP와 원 $(x-2)^2+y^2=1$의 교점 Q가 나타내는 도형의 길이는? [4점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π
④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

20. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 a_{n+1}은 방정식 $2x^3-3a_nx^2+2a_n-2=0$의 서로 다른 실근의 개수로 정의한다. $f_n(x)=2x^3-3a_nx^2+2a_n-2$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $a_2=2$
ㄴ. $f_2(x)$의 극값의 합은 -4이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{10} a_n=27$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=2x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=2x^2$의 그래프의 교점이다.
(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

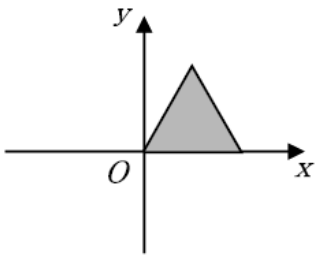
P_n의 x좌표를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}-a_{2n}}{n}$의 값을 구하면? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

단답형(22 ~ 30)

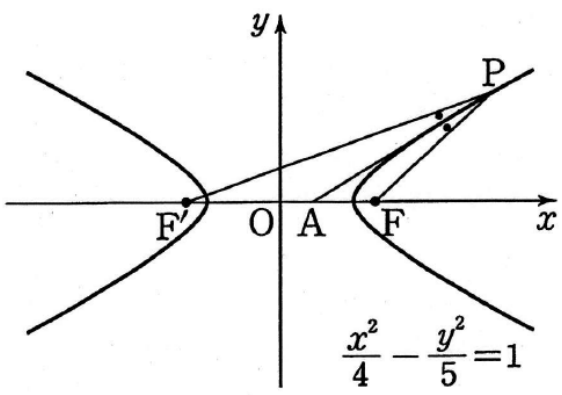
22. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$을 만족하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [3점]

23. 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 8인 정삼각형이다.



행렬 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환에 의한 삼각형의 상과 원래 삼각형이 겹치는 부분의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하자. 제 1사분면에 있는 쌍곡선 위의 한 점 P에서 $\angle FPF'$의 이등분선을 그으면 점 $A(1,0)$을 지난다. 두 선분 PF와 PF'의 길이의 합을 구하시오. [3점]



25. 함수 $f(x)=x^2(1-\ln x)$와 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=(-1)^n \cdot \frac{e}{n}$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하면? $\left(\text{단, } \lim_{x\to+0} f(x)=0\right)$

[4점]

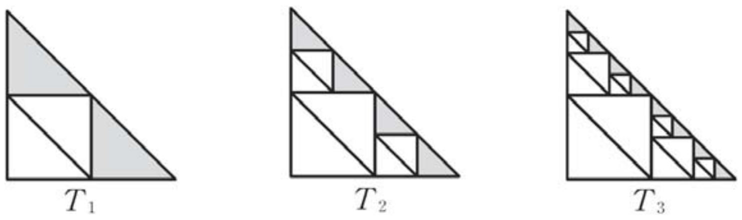
26. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)=\lvert x-1\rvert-1\ (0\le x\le 2)$
(나) $f(x+2)=\frac{1}{2}f(x)$

$S_n=\int_0^{2n} \lvert f(x)\rvert\,dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.

[4점]

27. 그림과 같이 검은색 직각이등변삼각형에 빗변과 한 점에서 만나도록 흰색 정사각형을 내접시킨 후 정사각형에 빗변과 평행한 대각선을 그은 도형을 T_1 이라 하자. 도형 T_1 의 각 검은색 삼각형에 빗변과 한 점에서 만나도록 흰색 정사각형을 내접시킨 후 모든 정사각형에 빗변과 평행한 대각선을 그은 도형을 T_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형 T_n 의 흰색 삼각형의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n+2}$ 의 값을 구하시오. [3점]



28. 방정식 $|k|+|l|+|m|=7$ 을 만족하는 0 이 아닌 정수 k, l, m에 대하여 순서쌍 $(k,\ l,\ m)$의 개수를 구하시오. [4점]

29. $\int_1^3 3^x\,dx + 3\int_1^9 (1+\log_3 x)\,dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x_k, y_k라 할 때, $(x_k, 0)$을 중심으로 하고 $y_k + \log 2$을 반지름으로 하는 원을 C_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1 \le m < n < 1000$
(나) 원 C_m과 원 C_n은 외접한다.

실전모의고사 (B형) 1회- 정답 및 해설

1	2	3	4	5
②	③	②	⑤	④
6	7	8	9	10
①	⑤	②	④	⑤
11	12	13	14	15
③	①	②	②	④
16	17	18	19	20
⑤	①	⑤	④	⑤
21	22	23	24	25
①	81	12	12	44
26	27	28	29	30
2	2	120	78	6

1) **정답** ②

풀이

$$2^{\log_3 2} \div 2^{\log_3 6} = 2^{\log_3 2 - \log_3 6} = 2^{\log_3 \frac{2}{6}} = 2^{\log_3 3^{-1}}$$
$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

2) **정답** ③

풀이

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$ar + ar^3 = ar(1+r^2) = 30$,

$ar^4 + ar^6 = ar^4(1+r^2) = 810$이므로

두 식을 나누면

$\dfrac{ar^4(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = r^3 = 3^3$에서 $r=3, a=1$

따라서 $a_3 + a_5 = 90$

3) **정답** ②

풀이

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1$$

4) **정답** ⑤

풀이

그래프 G의 꼭짓점의 개수를 n이라 하면 그래프의 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배와 같으므로

$5n = 2 \cdot 40 \quad \therefore n = 16$

5) **정답** ④

풀이

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3x+1} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{3x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{3} \right\}$$
$$= 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

6) **정답** ①

풀이

$t = \ln x$라 하면 $dt = \dfrac{1}{x}dx$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

7) **정답** ⑤

풀이

$f(-x) = t$라고 하면

$\sqrt{t+5} = t-1$

양변을 제곱하면

$t+5 = t^2 - 2t + 1$, $t^2 - 3t - 4 = 0$

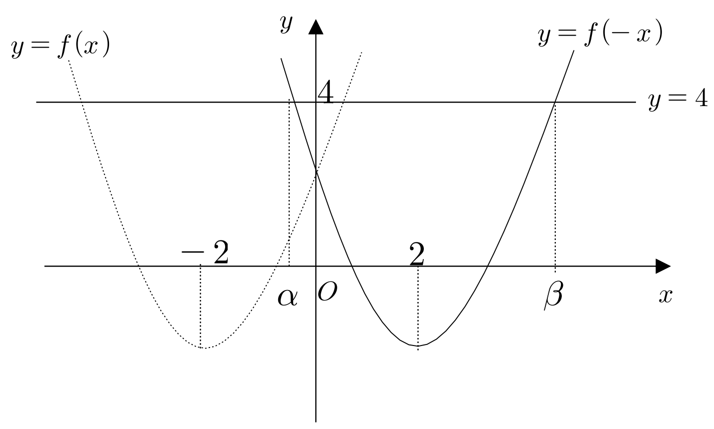
$(t-4)(t+1) = 0$

$\therefore\ t = -1$ 또는 $t = 4$

이때, $t = -1$은 무연근이므로

$t = f(-x) = 4 \cdots$㉠

따라서 $y = f(-x)$의 그래프와 직선 $y = 4$의 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 그림과 같다.



즉, ㉠을 만족하는 x의 값의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=2$ $\therefore$ $\alpha+\beta=4$

8) **정답** ②

풀이

직선 위의 모든 점이 일차변환 f에 의하여 한 점으로 옮겨지므로 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

즉, $4-2a=0$에서 $a=2$

또한, 일차변환 f에 의하여 직선 $3x+6y-4=0$ 위의 점 $(x,\ y)$가 점 $(b,\ c)$로 옮겨지므로

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $b=x+2y,\ c=2x+4y$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 점 $(x,\ y)$는 직선 $3x+6y-4=0$, 즉 $x+2y=\frac{4}{3}$ 위의 점이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{4}{3},\ c=\frac{8}{3}$

$\therefore$ $a+b+c=2+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=6$

9) **정답** ④

풀이

$T_0=20$이고 $t=15$일 때 $T=60$이므로

$60=20+k\log(8\times15+1)$

$\therefore$ $2k\log11=60-20=40$

또, $t=\frac{5}{4}$일 때,

$T=20+k\log11=40$

10) **정답** ⑤

풀이

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}\ (\because\ ad-bc=-1,\ a+d=0)$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A \text{ (참)}$$

ㄴ. $A+E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$에서

$(a+1)(d+1)-bc=ad+(a+d)+1-bc$

$=-1+0+1=0$

이므로 $A+E$의 역행렬은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $A^{-1}=A$이므로 $A^2=E$

$(A+2E)(A-2E)=A^2-4E=E-4E=-3E$

$\therefore$ $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$ (참)

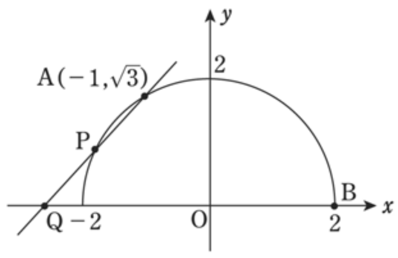
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11) **정답** ③

풀이

직선 AP가 x축과 만나는 점을 Q라 하고 $\angle\mathrm{AQB}=\alpha$라 하자. 점 $\mathrm{A}(-1,\ \sqrt{3})$이므로 $\angle\mathrm{AOQ}=\frac{\pi}{3}$에서

$\angle\mathrm{ABO}=\frac{\pi}{6}$이다.



$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\tan\alpha=\lim_{x\to-1}\frac{y-\sqrt{3}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 $x\to-1$일 때 $\alpha\to\frac{\pi}{6}$이고 $\theta\to\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta\to\frac{2\pi}{3}$이다.

$\therefore$ $\lim_{x\to-1}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

12) **정답** ①

풀이

$t^2-s^2=5$이므로 $C:\ y^2-x^2=5$

$2yy'-2x=0$에서 $y'=\frac{x}{y}$이므로 점 $(2,\ 3)$에서 접선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다. 따라서 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}(x-2)+3=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

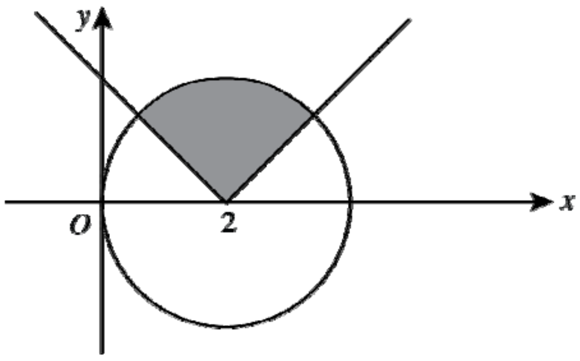
x축과의 교점 $A\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$, y축과의 교점 $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$이다.

13) **정답** ②

풀이

$m=\lim_{s\to\infty}\frac{t}{s-2}=\lim_{s\to\infty}\frac{\sqrt{s^2+5}}{s-2}=1$이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot 2^2\times\frac{1}{4}=\pi$이다.



14) **정답** ②

풀이

$a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$에서

$a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}=-\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$이므로

수열 $\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 -1인 등비수열이므로

$a_{n+1}-(n+1)a_n=1\cdot(-1)^{n-1}\ (n\geq 1)$이다.

양변을 $(n+1)!$로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$가 되어

$b_n=\frac{a_n}{n!}$이라 하면,

$b_{n+1}=b_n+\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\ (n\geq 1)$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!}$

$=0+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n!}\right)$

$a_n=n!\times b_n$이므로

$a_n=n!\times\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n!}\right)\ (n\geq 2)$이다.

따라서 $f(1)+12g(2)+h(4)=1-2+9=8$이다.

15) **정답** ④

풀이

$\sqrt{10}=3.162$에서 $\log 3.162=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}=0.5$이다.

ㄱ. $\log 10<\log 14<\log 31.62$에서 $1<\log 14<1.5$이므로 $a_{14}=1$

ㄴ. $\log 3<\log\sqrt{10}<\log 4$이므로

$\log 3<0.5,\ \log 4>0.5$

또, $\log 10<\log 20<\log 31.62$이므로

$1<\log 20<1.5$

즉, $a_1=a_2=a_3=0,\ a_4=a_5=a_6=\cdots=a_{20}=1$이므로

$\sum_{n=1}^{20}a_n=0+0+0+1+1+\cdots+1=17$

ㄷ. $a_n=2$이려면 $1.5<\log n<2.5$이어야 한다.

그런데 $\log 10\sqrt{10}=\log 31.62=1.5$,

$\log 100\sqrt{10}=\log 316.2=2.5$이므로

$31.62\leq n<316.2\quad\therefore 32\leq n\leq 316$

즉, $a_n=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

16) **정답** ①

풀이

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{27k^2}{n^3}-\frac{9k}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{3k}{n}\right)^2-\left(\frac{3k}{n}\right)\right\}\cdot\frac{3}{n}$

$=\int_0^3(x^2-x)dx$

17) **정답** ①

풀이

$\overline{OQ}=\cos\theta,\ \overline{OR}=\frac{1}{\cos\theta}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{OA}-\overline{OQ}=1-\cos\theta$

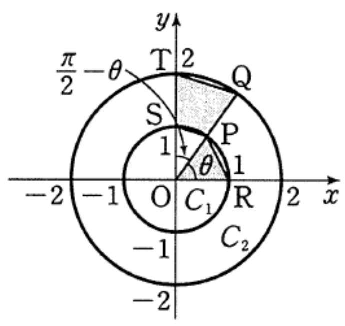
$\overline{AR}=\overline{OR}-\overline{OA}=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{AQ}\times\overline{AR}}{\theta^4}=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4\cos\theta}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^4\theta}{\theta^4\cos\theta(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{4}$

18) **정답** ⑤

풀이



오른쪽 그림과 같이 $\angle POR=\theta$로 놓으면

$\triangle OPR=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta$

또한, $\angle POS=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\square PQTS=\triangle OQT-\triangle OPS$

$$=\frac{1}{2}\times 2^2\times \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=2\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}\cos\theta$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OPR}+\square\mathrm{PQTS}=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

따라서 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때, 삼각형 OPR와 사각형 PQTS의 넓이의 합이 최대이다.

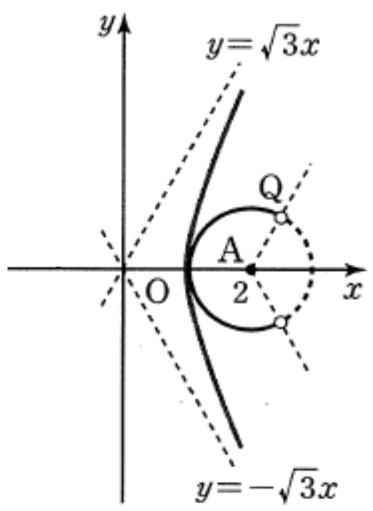
이때, 점 P의 x좌표는 $\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

19) **정답** ④

풀이

$x>0$인 부분에서 점 P는 쌍곡선의 위를 움직이므로 직선과 원의 교점 Q가 나타내는 도형은 $A(2,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 일부(진한 실선)를 그림과 같이 움직인다.



이때 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\sqrt{3}x$이므로 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 Q가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$

20) **정답** ⑤

풀이

ㄱ. $a_1=1$이므로 $f_1(x)=2x^3-3x^2=x^2(2x-3)$이므로 $a_2=2$ (참)

ㄴ. $f_2(x)=2x^3-6x^2+2$이므로 $f_2{}'(x)=6x(x-2)$

따라서 극값의 합은 $f_2(0)+f_2(2)=2+(-6)=-4$ (참)

ㄷ. ㄴ.에서 $f_2(x)$의 극값의 부호가 다르므로 $f_2(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. $\therefore\ a_3=3$

또한, $f_3(x)=2x^3-9x^2+4$

$f_3{}'(x)=6x(x-3)$

$f_3(0)\cdot f_3(3)=4\times(-23)<0$이므로 $a_4=3$

따라서 $a_1=1$, $a_2=2$이고 $n\geq 3$일 때, $a_n=3$이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=27\ (\text{참})$$

21) **정답** ①

풀이

점 P_n을 $(a_n,\ 2a_n^2)$이라고 하면 (단, $a_0=0$, $a_1=1$)

P_nP_{n+1}의 기울기는 $\dfrac{2a_{n+1}^2-2a_n^2}{a_{n+1}-a_n}=2(a_{n+1}+a_n)$이다.

그런데 P_0P_1의 기울기는 2,

P_1P_2의 기울기는 $-\frac{1}{2}$,

P_2P_3의 기울기는 2,

…

$P_{2n-1}P_{2n}$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$,

$P_{2n}P_{2n+1}$의 기울기는 2,

$P_{2n+1}P_{2n}$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

$P_{2n+1}P_{2n+2}$의 기울기=$2(a_{2n+2}+a_{2n+1})=-\frac{1}{2}\cdots$①

$P_{2n}P_{2n+1}$의 기울기=$2(a_{2n+1}+a_{2n})=2\cdots$②

$P_{2n-1}P_{2n}$의 기울기=$2(a_{2n-1}+a_{2n})=-\frac{1}{2}\cdots$③

①−②에서 $a_{2n+2}-a_{2n}=-\frac{5}{4}$, $a_0=0$

$$\therefore\ a_{2n}=a_0+(n-0)\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$=-\frac{5}{4}n$$

②−③에서 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=\frac{5}{4}$, $a_1=1$

$$\therefore\ a_{2n-1}=a_1+(n-1)\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5}{4}n-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}-a_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2}n-\frac{1}{4}}{n}$$

$$=\frac{5}{2}$$

22) **정답** 81

풀이

집합 A 의 원소의 개수가 n 일 때 집합 B 의 원소의 개수는 $4-n$ 이하이므로

$$\sum_{n=0}^{4} {}_4C_n \cdot 2^{4-n} = \sum_{n=0}^{4} {}_4C_n \cdot 1^n \cdot 2^{4-n}$$
$$= (1+2)^4 = 81$$

23) **정답** 12

풀이

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 주어진 변환은 30도 회전하고 $\frac{1}{2}$배하는 변환이다

따라서 겹치는 부분의 넓이 S는 $2\sqrt{3}$ 이다

24) **정답** 12

풀이

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표를

$F(c,0)$, $F'(-c,0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=4+5=9$

$\therefore$ $c=3$

$\therefore$ $F(3,0)$, $F'(-3,0)$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$ $\cdots$ ㉠

한편, 선분 PA가 $\angle FPF'$의 이등분선이므로

$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{AF'} : \overline{AF} = 4 : 2 = 2 : 1$

$\therefore$ $\overline{PF'}=2\overline{PF}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=4$

$\therefore$ $\overline{PF}+\overline{PF'}=12$

25) **정답** 44

풀이

$f(x)=x^2(1-\ln x)$

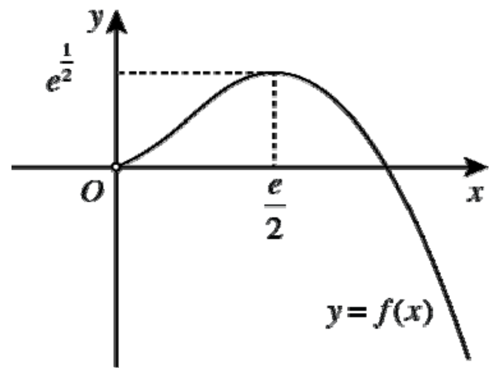
$f'(x)=x-2x\ln x=x(1-2\ln x)=0$

에서 $x=e^{\frac{1}{2}}(\because x>0)$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$

$\lim_{x\to+0} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)=(-1)^n\cdot\frac{e}{n}$의 서로 다른 실근의 개수는

$y=f(x)$와 $y=(-1)^n\frac{e}{n}$의 교점의 개수와 같으므로

(1) n이 홀수일 때

$(-1)^n=-1$이므로 방정식 $f(x)=-\frac{e}{n}$의 실근의 개수는 1 이다. $\therefore$ $a_n=1$

(2) n이 짝수일 때

$(-1)^n=1$이므로 방정식 $f(x)=\frac{e}{n}$의 실근의 개수는 다음과 같다. $\therefore$ $a_n=\begin{cases}1 & (n=2)\\ 2 & (n=4,6,8,10,\ \cdots,\ 30)\end{cases}$

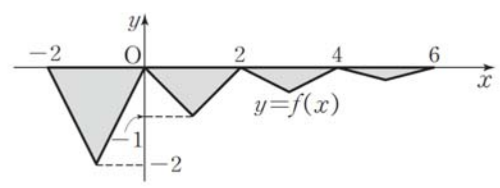
(1)과 (2)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{n=1}^{15} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{15} a_{2n}$$
$$=15+1+2\times 14=44$$

26) **정답** 2

풀이

주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

27) **정답** 2

풀이

각 도형에서 흰색 직각이등변삼각형의 개수 a_n은

$a_1=2$, $a_2=2(1+2)$, $a_3=2(1+2+4)$, $\ldots$이므로

$a_n=2(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$

$$=2\times\frac{2^n-1}{2-1}=2\cdot 2^n-2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-2}{2^n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=2$$

28) **정답** 120

풀이

$|k|=k'$, $|l|=l'$, $|m|=m'$이라 하면 k', l', m'은 자연수이므로 방정식 $k'+l'+m'=7$을 만족시키는 순서쌍 (k', l', m')의 개수는 k', l', m'에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

한편, k', l', m'의 값에 대하여 k, l, m은 각각 양수, 음수의 2가지가 있으므로 구하는 순서쌍의 개수는

$15\times2\times2\times2=120$

29) **정답** 78

풀이

$$\int_1^3 3^x\,dx+3\int_1^9(1+\log_3 x)\,dx$$
$$=3\left(\int_1^3 3^{x-1}dx+\int_1^9(1+\log_3 x)\,dx\right)$$

$y=3^{x-1}$ 과 $y=\log_3 x+1$은 서로 역함수이므로

구하는 값은 $3(3\times9-1)=78$이다

30) **정답** 6

풀이

(1) $x_m=0$, $x_n=1$일 때

$(\log m+\log 2)+(\log n-1+\log 2)=1$에서 $mn=25$

$(m, n)=(1, 25)$

(2) $x_m=1$, $x_n=2$일 때

$(\log m-1+\log 2)+(\log n-2+\log 2)=1$에서

$mn=2500=2^2\times5^4$

$(m, n)=(10, 250), (20, 125), (25, 100)$

(3) $x_m=0$, $x_n=2$일 때

$(\log m+\log 2)+(\log n-2+\log 2)=2$에서

$mn=2500=2^2\times5^4$

$(m, n)=(4, 625), (5, 500)$