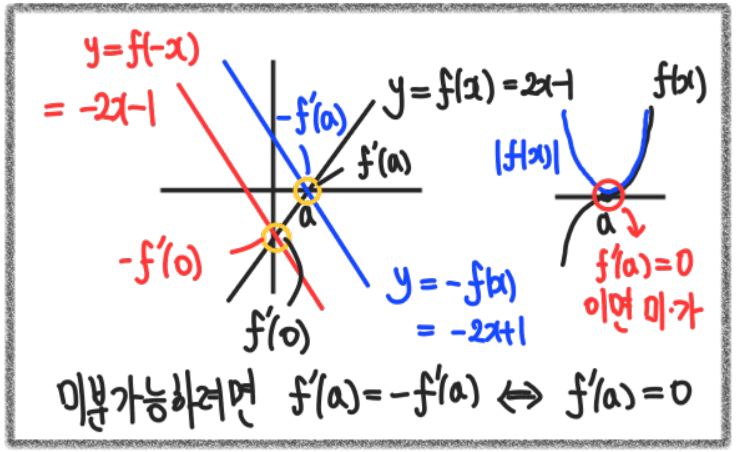
절댓값 함수의 미분가능성

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $\boxed{f'(x)=0}\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]



#Comment

① $y=|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성

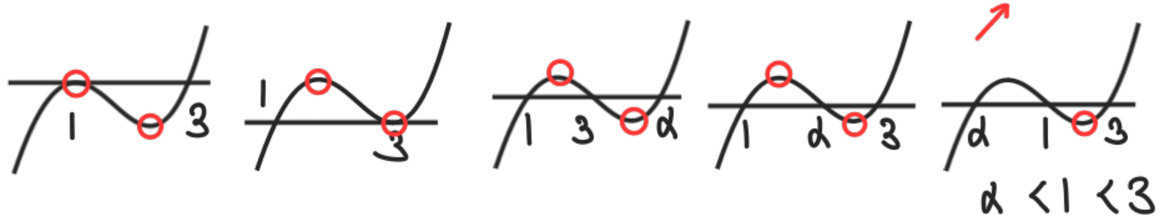
② 꺾이면 뾰족점이 생기므로

③ 접히는 경계 미분계수가 0이어야 미분가능

④ 다항함수라면 중근을 가져야함 ⇐ $f(a)=0,\ f'(a)=0.$

$f(x)=0$ 세 실근 $1, 3, \alpha$

이 경우만 (나) 만족



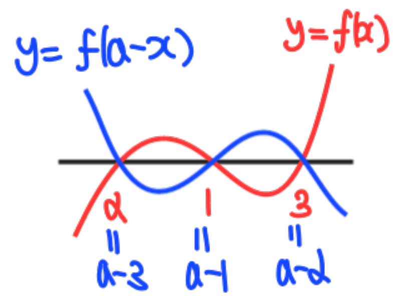
$f(x)f(a-x)=0$ 의 실근

$\alpha,\ 1,\ 3$

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$

$a-3,\ a-1,\ a-\alpha$ ← $\left(\begin{array}{l} a-x=\alpha, 1, 3 \\ a-3<a-1<a-\alpha \end{array}\right)$

(중근이어야 미분 가능) → $a=2,\ \alpha=-1$



$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\frac{g(4a)}{f(0)f(4a)}=\frac{|f(4a)f(-3a)|}{f(0)f(4a)}=\frac{|f(8)f(-6)|}{f(0)f(8)}=\frac{\cancel{k^2}\cdot 9\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{5}\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{\cancel{k^2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{5}}$$

$=105$

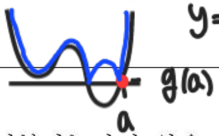
$\boxed{105}$

20200330(가)

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds = x^4+\sim,\ g(t)=0,\ g'(x)=f(x)$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. $y=|g(x)-g(a)|$ $y=g(x)$



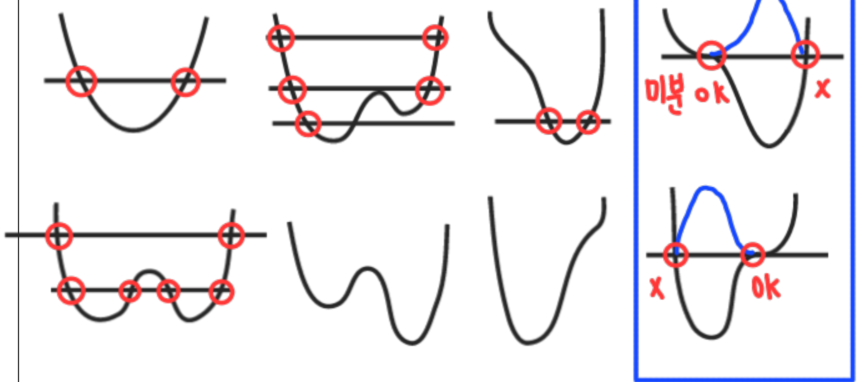
> (가) $f'(a)=0$
> (나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.
> $(a, g(a))$ 기준 접어 올리기

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$y=g(x)=x^4+\sim.$

(나) 만족 Case

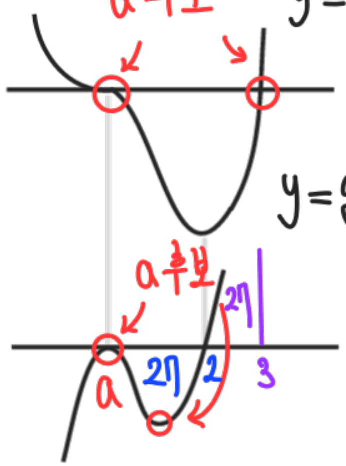


$$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds = -\int_a^t f(s)ds,\quad h'(t)=-f(t)$$

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$ → $\int_2^3 f(s)ds=27$

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$: 최댓값 → $h'(2)=0$, $f(2)=0$

Case 1



(가) $f'(a)=0$

$f(2)=0$, $\int_2^a=27$

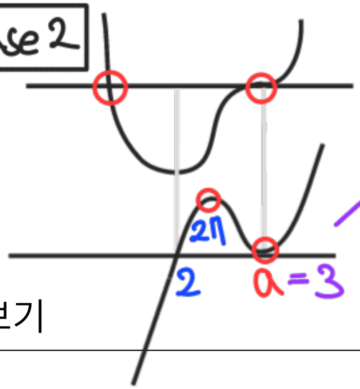
$\int_3^a=0$

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$$0=\int_3^a f(x)dx=\int_{3-a}^0 f(x+a)dx$$
$$=\int_{3-a}^0 4\cdot x^2(x+a-2)dx$$
$$=\left[x^4+\frac{4(a-2)}{3}x^3\right]_{3-a}^0$$
$$=(3-a)^3\frac{a+1}{3}=0,\quad a=-1$$

$$f(5)=4\cdot 6^2\cdot 3=\boxed{432}$$

Case 2



$\int_3^a f(x)dx=0$ 이려면 $a=3$

$f(x)=4(x-2)(x-3)^2$

$\int_2^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\neq 27$ 모순

#Comment

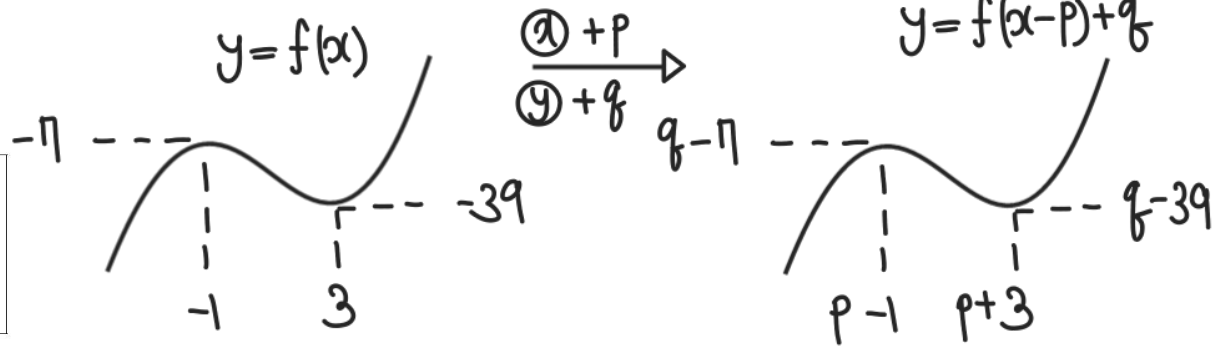
① |삼차 or 사차함수| 개형, 미분 불가 점 개수 관찰해보기

20220614

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

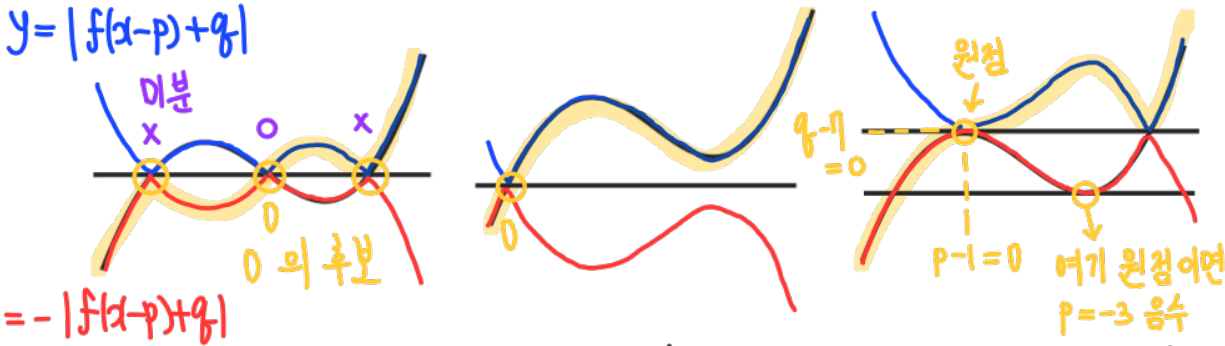


첫번째 접기

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & x\ge 0\\ -|f(x-p)+q| & x<0\end{cases}$$

두번째 접기

"x=0 기준 두 번 접으니 미분가능"



$g(0+)=|f(-p)+q|$

$=g(0-)=-|f(-p)+q|$

$\Rightarrow g(0)=0,\ f(-p)+q=0$

$f(x-p)+q=0$ 실근 서로 다른 3개, 실근 1개, 실근 1개, 중근 1개

→ $g(x)$ 미분 불가 2개 (0 제외) → $g(x)$ 미분불가 0개 → 극대점 원점, $p=1$, $q=17$

$\boxed{18}$

#Comment

① $y=\pm|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성

② $y=-|f(x)|$ 그래프는 두 번 접으면 제자리($f(x)<0$일 때)

③ $y=f(x-a)+b$ 그래프 그리는 연습($x=a$ 경계점 기준)

20211022

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

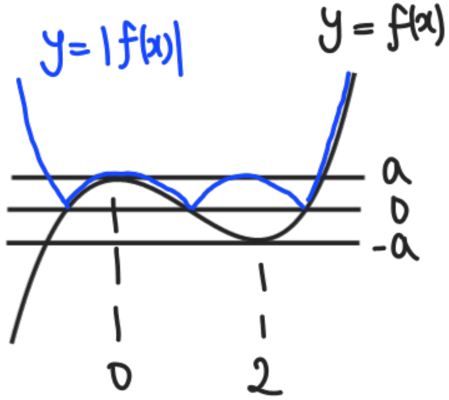
$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

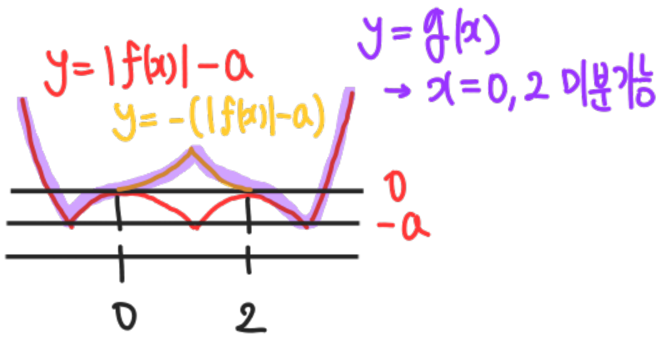
$$g(x)=\begin{cases}(|f(x)|-a) & x<0,\ x>2\\ -(|f(x)|-a) & 0\le x\le 2\end{cases}$$

"$x=0,2$ 경계로 접는데 미분 가능이라면 $x=0,2$ 에서 미분계수 0 이겠구나"

$g(0+)=g(0-)\Rightarrow g(0)=0,\ |f(0)|=a$

$g(2+)=g(2-)\Rightarrow g(2)=0,\ |f(2)|=a$





$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$

$f(0)=C=a$

$f(2)=C-4=-a$

$\rightarrow C=2,\ a=2$

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2$

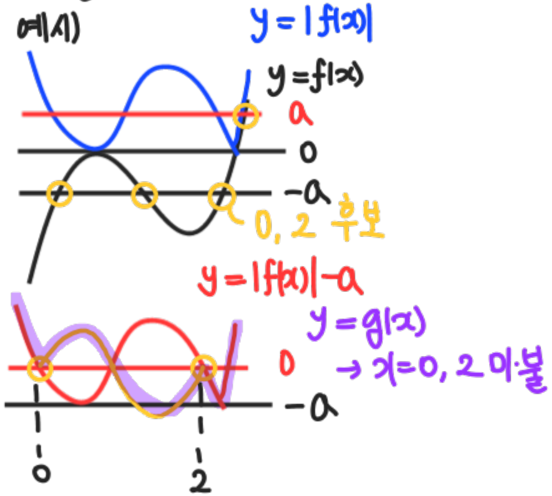
$=6^3-3\cdot6^2+2-2$

$=3\cdot6^2=108$

$\boxed{108}$

※ $f'(0)=f'(2)=0$ 으로 단정짓고 다른 개형 살펴보지 않은 게 불안 하다면 직접 확인해보기.

예시)



#Comment

① 복잡해보여도 결국 $x=0,\ x=2$ 경계로 $\pm(|f(x)|-a)$

② 접히는 경계에서 미분계수 0

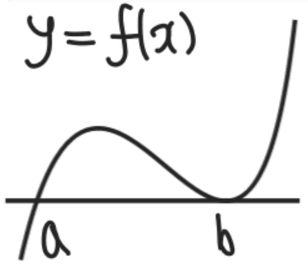
20211128(가)

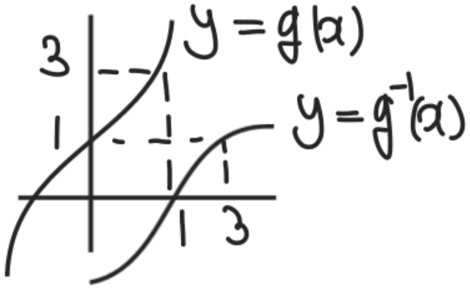
28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$





$$p(x)=(x-1)|h(x)|=\begin{cases}(x-1)h(x) & h(x)\ge 0\\ -(x-1)h(x) & h(x)<0\end{cases}$$

$p(k)=0$ 이면 $p'(k)=0$ 이다.

$$p(x)=(x-1)|(g^{-1}(x)-a)(g^{-1}(x)-b)^2|$$

$=0$ 의 해 k_2 $\quad$ $=0$ 의 해 $k_1 \Rightarrow p'(k_1)=0$ (제곱인수)

같은 해를 가져야 $p'(k_2)=0$, $\therefore g^{-1}(1)=a$, $a=0$

$g^{-1}(x)=Q(x)$ 라 쓰자, $h'(x)=f'(Q(x))Q'(x)$.

$$h'(3)=f'(g^{-1}(3))Q'(3)=f'(1)\cdot\frac{1}{g'(1)}=\frac{f'(1)}{4}=2$$

$f'(1)=8$.

$f(x)=x(x-b)^2=x^3-2bx^2+b^2x$

$f'(x)=3x^2-4bx+b^2$, $f'(1)=b^2-4b+3=8$

$(b-5)(b+1)=0$, $b=5$ 또는 $\cancel{b=-1}$ $(a<b)$

$f(8)=8\times 3^2=72$

$\boxed{72}$

#Comment
① $y=f(x)|g(x)|$ 꼴의 미분가능성

20211130(나)

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$x=1$ 연속 $\pm(f(1)-g(1))=f(1)+g(1)$

$\Rightarrow f(1)=0$ 또는 $g(1)=0$

$x=1$ 미가 $\pm(f'(1)-g'(1))=f'(1)+g'(1)$

$\Rightarrow f'(1)=0$ 또는 $\cancel{g'(1)=0}$

↳ $g'(1)=0$ 이면 $g(x)$는 $y=k$ 꼴 일차함수 아니다.

$h(0)=0=|f(0)-g(0)|$, $f(0)=g(0)$

$x=0$ 미가 $f'(0)-g'(0)=0$, $f'(0)=g'(0)$

$f(x)-g(x)=x^2(x-a)$, $g(x)=bx+c$

$f(x)=x^3-ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 2a-b=3$ — ㉠

$h(2)=f(2)+g(2)=5$

$4(2-a)+2(2b+c)=5$

$4a-4b-2c=3$ — ㉡

㉠ & ㉡ : $b=2a-3$, $c=-2a+\frac{9}{2}$

$g(1)=0$ 이라면 $b+c=(2a-3)+(-2a+\frac{9}{2})=\frac{3}{2}=0$ 모순

$f(1)=0$ 이다. $1-a+b+c=-a+\frac{5}{2}=0$,

$a=\frac{5}{2}$, $b=2$, $c=-\frac{1}{2}$

$\boxed{39}$

$h(4)=16(4-a)+2(4b+c)=64-40+16-1=39$