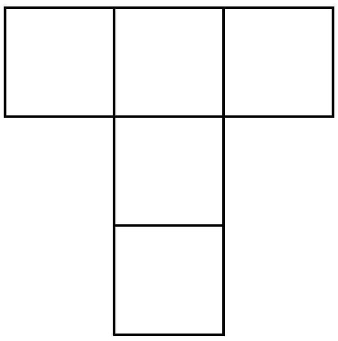
아드레날린 ex

공통

1. 그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은? 〔2022학년도 사관학교 08〕



① $2^{\frac{1}{3}}$　　② $2^{\frac{2}{3}}$　　③ 2　　④ $2^{\frac{4}{3}}$　　⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

1. 정답 ② 〔2022학년도 사관학교 08〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 문제해석

그림에 보이는 5개의 칸에 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$를 하나씩 적을 때 가로 3개와 세로 3개에 적힌 수의 합이 각각 15랍니다.

그러면 가로 3개와 세로 3개를 더하면 총 30이 된다는 말이죠? 그런데 가로와 세로에 겹쳐 있는 숫자 하나 빼고는 한 번씩만 들어가죠. 그러니까 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$를 다 더한 거에 겹쳐 있는 숫자 하나를 더하면 30이 되겠네요.

이때 $\log_a 4 = 2\log_a 2$, $\log_a 8 = 3\log_a 2$, $\log_a 32 = 5\log_a 2$, $\log_a 128 = 7\log_a 2$이니까 다 더하면 $18\log_a 2$입니다. 여기에 $\log_a 2$, $2\log_a 2$, $3\log_a 2$, $5\log_a 2$, $7\log_a 2$ 중 하나를 더한 것이 30이 되는 거예요.

그런데 생각해보세요. 더한 것이 $k\log_a 2$라고 해볼게요. 그러면 $(18+k)\log_a 2 = 30$이 되죠. 그리고 세로와 가로에 적힌 수의 합은 각각 $\frac{(18+k)}{2}\log_a 2$이어야 합니다. 여기서 k가 홀수라면? $\frac{(18+k)}{2}$가 자연수가 되지 않겠죠. 그런데 $\log_a 2$, $2\log_a 2$, $3\log_a 2$, $5\log_a 2$, $7\log_a 2$ 중에서 3개를 골라 더하면 무조건 자연수가 나오지 않나요? 따라서 k는 짝수여야 하고 $\frac{(18+k)}{2}$는 자연수여야 합니다.

마침 짝수인 k가 되는 건 $\log_a 4 = 2\log_a 2$만 가능하네요. 따라서 $k=2$이고 $20\log_a 2 = 30$입니다.

$\log_a 2 = \frac{3}{2}$이네요. $\frac{3}{2} = \log_a a^{\frac{3}{2}}$이니까 $2 = a^{\frac{3}{2}}$이고 $a = 2^{\frac{2}{3}}$입니다. 답은 ②번이네요.

2. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?
〔2022학년도 사관학교 10〕

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

2. 정답 ① 〔2022학년도 사관학교 10〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

$a>0$인데 $f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \geq a) \end{cases}$가 있답니다. 이때 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하라네요.

일단 대충 $x=a$를 넣어보면 $f(-x)$에서는 $x=-a$가 됩니다. $f(x)$는 $x=-a$에서는 x^2-5a로 일정하죠? $a>0$인데 $x<a$에서 $f(x)=x^2-5a$이니까요. 그런데 $x=a$에서는 함수가 바뀝니다. 이거는 확인을 해봐야겠네요.

일단 $f(-a)=a^2-5a$이니까 이건 고정시킵시다. 그러면 $f(-a)f(x)=\begin{cases} (a^2-5a)x^2-5a & (x<a) \\ -(a^2-5a)(2x-4) & (x \geq a) \end{cases}$입니다.

이 함수가 $x=a$에서 연속이어야 하니까 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 하겠죠? 따라서

$(a^2-5a)(a^2-5a)=-(a^2-5a)(2a-4)$이고 정리하면

$(a^2-5a)(a^2-3a-4)=a(a-5)(a-4)(a+1)=0$입니다. 이때 $a>0$이어야 하니까 $a=4,\ a=5$이네요. 합은 $4+5=9$입니다. 답은 ①번이네요.

3. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1 \le x \le 1) \\ x^2-4x+a & (1 < x \le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

〔2022학년도 사관학교 12〕

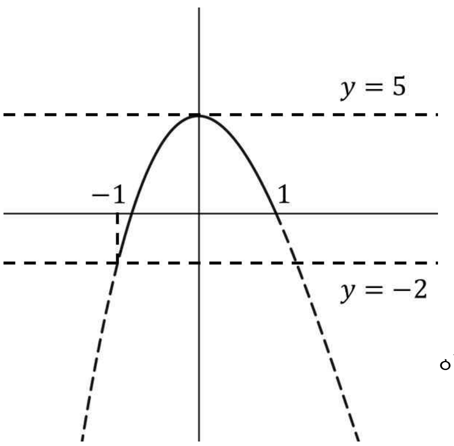
① -5　② $-\dfrac{9}{2}$　③ -4　④ $-\dfrac{7}{2}$　⑤ -3

3. 정답 ③ 〔2022학년도 사관학교 12〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

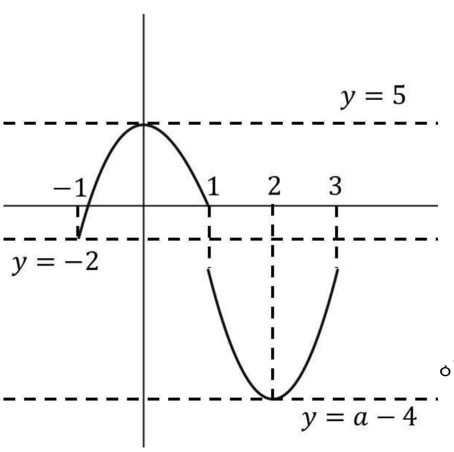
$-1 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1 \le x \le 1) \\ x^2-4x+a & (1 < x \le 3) \end{cases}$ 라고 합니다. 그런데 최댓값과 최솟값의 합이 0이라고 하네요. 이건 그래프를 그려봐야겠죠?

일단 $-1 \le x \le 1$에서는 $f(x)=x^3-6x^2+5$라고 하네요. 인수분해는.. 일단 $(x-1)\left(x^2-5x+5\right)$가 됩니다. 미분해보면 $3x^2-12x=3x(x-4)$입니다. $x=0$에서 극대네요. 극댓값은 5이구요. 경계인 $x=-1$에서의 함숫값은 -2, $x=1$에서의 함숫값은 0입니다. 그래프를 그리고 $-1 \le x \le 1$에서 짤라보면



이렇게 되겠네요.

그리고 $1 < x \le 3$에서는 $f(x)=x^2-4x+a$입니다. 미분하면 $2x-4$이니까 $x=2$에서 극소가 되죠? 극솟값은 $a-4$이구요. 경계인 $x=1$, $x=3$에서의 함숫값은 $a-3$입니다. 그려보면



이렇게 되겠어요.

최솟값과 최솟값이 보일 것 같기도 한데... 오른쪽의 $f(x)=x^2-4x+a$의 그래프는 아직 확정되지 않았어요. 위아래로 왔다갔다할 수 있거든요. 만약 $x=3$에서의 함숫값인 $a-3$이 5보다 커진다면 $x=3$에서 최대가

됩니다. 하지만 그렇게 되면 $x=2$에서의 함숫값인 $a-4$ 역시 0보다 커지게 되어서 $f(x)$의 최솟값은 -2가 되죠. 최댓값과 최솟값을 더하면 0이 될 수가 없겠네요. 따라서 최댓값은 5이고, 최솟값은 $a-4$입니다. 합이 0이어야 하니까 $a-4=-5$이고 $a=-1$이네요.

마지막으로 $\lim_{x \to 1+} f(x)$의 값을 구해봅시다. $x=1$보다 큰 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값이잖아요? $a-3$이니까 -4이네요. 답은 ③번입니다.

4. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^x,\ y=\left|a^{-x-1}-1\right|$$

이 있다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2022학년도 사관학교 13〕

<보 기>

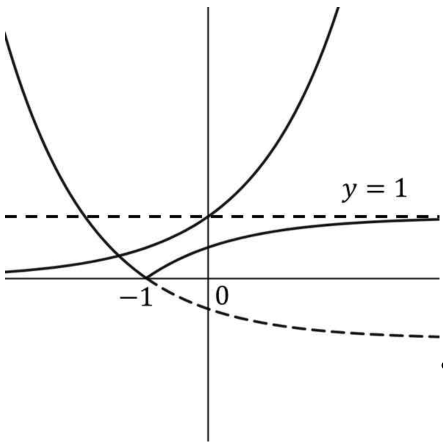
ㄱ. 곡선 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.
ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 정답 ② 〔2022학년도 사관학교 13〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$a>1$인데 $y=a^x$, $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$가 있답니다. 이거 대충 그래프 그려볼까요? $y=a^x$는 $(0,\ 1)$을 지나고 점근선이 $y=0$입니다. 그리고 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$을 확인해볼게요. $-x-1$이 0이 되는 $x=-1$을 넣으면 0이 되네요. $(-1,\ 0)$을 지납니다. 그리고 점근선은 $y=-1$인 함수인데 이걸 접어 올려야 하네요. 그려보면



이렇게 되겠어요. 아직 함수가 확정된 건 아니에요. a값에 따라 달라질 수 있어요.

ㄱ에서 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$가 $(-1,\ 0)$을 지나냐고 물어보네요. 아까 확인했었죠? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $a=4$이면 두 곡선의 모든 교점의 개수는 2냐고 물어보네요. 아까 그린 건 그냥 막 그린 거니까 이번엔 식으로 확인해봐야겠네요.

일단 $x<-1$에서 만나는 건 확실해요. 나머지 부분에서 만나는지 확인해봅시다. 만난다면 $x>-1$에서 $y=-4^{-x-1}+1$과 만나겠죠?

$4^x=-4^{-x-1}+1$이라 하면 $4^x+4^{-x-1}=1$입니다. 이미 $x<-1$에서 만나는 점이 하나 있으니까 결국 $4^x+4^{-x-1}=1$의 방정식의 서로 다른 실근이 하나만 나와야 해요. 혹은 둘이 나오더라도 한 실근은 $x>-1$에 있어야 합니다. $4^x=k$라 하면 $k+\dfrac{1}{4k}=1$입니다. $4k$를 곱해서 정리하면 $4k^2+1=4k$이고

$4k^2-4k+1=(2k-1)^2=0$이네요. $k=\dfrac{1}{2}$입니다. 중근이 나오는 걸 보면 접하나 보네요. 아무튼 서로 다른 실근이 하나입니다. ㄴ은 맞네요.

ㄷ에서 $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크냐고 물어봅니다. 아까랑 마찬가지로

접근하면 되겠죠?

방금 $a=4$일 때 $x>-1$에서 접하는 걸 확인했어요. 그러면 $a>4$일 때는 $x>-1$에서 두 점에서 만나게 되지 않을까요?

$x>-1$을 확인해볼게요. $y=a^x$와 $y=-a^{-x-1}+1$가 만나는 거니까 $a^x=-a^{-x-1}+1$이고 $a^x=k$라 하면 $k=-\dfrac{1}{ak}+1$입니다. $a>1$이고 $a^x=k>0$이니까 $ak\neq 0$이네요. 아무튼 ak를 곱해서 정리하면 $ak^2=-1+ak$이고 $ak^2-ak+1=0$입니다. 판별식으로 확인해보면 $a^2-4a=a(a-4)>0$이니까 서로 다른 두 개의 실근을 갖네요. 예상이 맞았어요.

두 실근을 각각 x_1, x_2라고 할게요. 그러면 $a^{x_1}=-a^{-x_1-1}+1$이고 $a^{x_2}=-a^{-x_2-1}+1$입니다. 아까 $a^x=k$라고 했었잖아요? 그리고 $ak^2-ak+1=0$이었구요. 그러면 근과 계수와의 관계에 의하여 $ak^2-ak+1=0$를 만족시키는 두 k값의 합은 1이고 곱은 $\dfrac{1}{a}=a^{-1}$입니다.

그런데 그 k값이 a^{x_1}, a^{x_2}잖아요? 따라서 $a^{x_1}+a^{x_2}=1$, $a^{x_1}\times a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=a^{-1}$입니다. $x_1+x_2=-1$이네요.

그리고 $x<-1$에서는 만나는 점의 x좌표가 -1보다 작은 걸 확인했죠? 따라서 모든 교점의 x좌표는 -2보다 작겠네요. 일단 두 교점의 합은 -1인데 나머지 하나가 -1보다 작으니까 전체를 더하면 -2보다 작아지겠죠. ㄷ은 아니네요. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번입니다.

5. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a\,(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.) 〔2022학년도 사관학교 14〕

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5. 정답 ④ 〔2022학년도 사관학교 14〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

$f(x) = x^3 - x$와 $a > -1$인 상수 a에 대하여 $g(x)$는 $(-1,\ f(-1))$과 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선이랍니다. 그럼 그냥 $\dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}(x+1)+f(-1)$이죠? 기울기가 $\dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}$이고 $(-1,\ f(-1))$ 혹은 $(a,\ f(a))$을 지나는 직선이니까요.

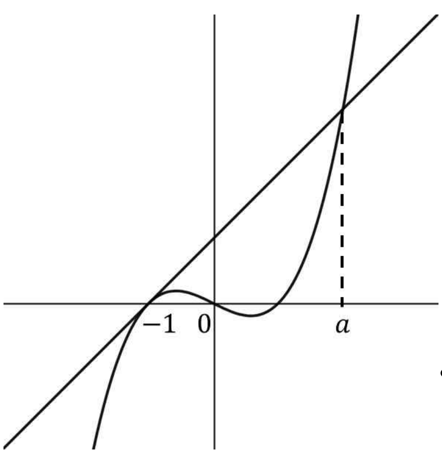
이때 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -1) \\ g(x) & (-1 \le x \le a) \\ f(x-m)+n & (x > a) \end{cases}$가 있어요. $f(x-m)+n$은 $f(x)$는 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 움직인 함수네요.

2) 조건해석, 미분가능은 연속 확인+미분계수 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이때 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 일대일대응이랍니다.

일단 미분가능이라고 했으니까 $x = -1$에서 $f(x)$의 접선의 기울기와 $g(x)$의 기울기는 같아야 해요. 미분해보면 $3x^2 - 1$이니까 접선의 기울기는 2입니다.

그런데 그래프를 그려보세요. 기울기가 2이면서, $(-1,\ f(-1))$에서는 $f(x)$와 접하고, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선은?



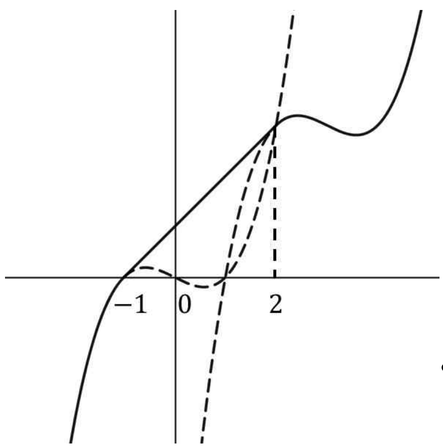
이런 모양이 되죠. $f(x)$는 홀수차항만 있는 기함수니까 변곡점이 $(0,\ 0)$이잖아요. 따라서 -1과 a의 $1:2$내분점은 0이 되어야 합니다. $\dfrac{a-2}{1+2} = 0$이고 $a = 2$입니다.

이때 $g(x)$는 직선이잖아요. 따라서 접선의 기울기는 계속 2에요. 다시 말해서 $x = a = 2$에서도 접선의 기울기는

2여야 한다는 거죠. $f(x-m)+n$의 $x=a=2$에서의 접선의 기울기도 2여야 합니다.

그런데 아까 확인했듯이 $f(x-m)+n$는 $f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 움직인 함수에요. 그러면 접선의 기울기가 2가 되는 점도 그냥 단순히 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 변화합니다. $f(x)$의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $3x^2-1=2$해서 $x=1$, -1이잖아요? 그러면 $f(x-m)+n$의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $x=m+1$, $m-1$입니다.

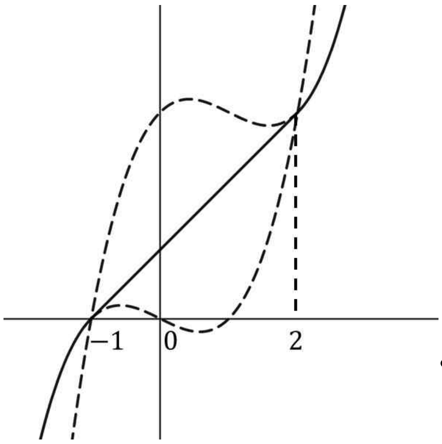
그러면 $a(=2)$의 값으로 뭘 선택해야 할까요? 우리는 그래프를 짤라야 하잖아요. 천천히 그래프를 그려보면 되죠. 만약 $x=m-1$을 선택하면



이렇게 되어야 합니다. 그런데 (나)조건에서 일대일 대응이어야 한다고 했었죠. 일대일 대응이 뭐였죠? 일대일 함수이어야 하고 공역과 치역이 같아야 하죠. 일대일 함수는 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이어야 한다는 거에요. 다시 말하면 x값이 다르면 y값도 달라야 한다는 거죠. x축에 평행하게 선을 그어서 두 점 이상 만나면 안 돼요. 반드시 한 점에서만 만나거나 아예 만나지 말아야 하는 거죠.

여기에 공역과 치역이 같아야 합니다. 공역은 아무 말이 없으면 y값 전체니까 치역도 y값 전체여야 합니다. 그러니까 정리하자면 x축에 평행하게 선을 그어서 반드시 한 점에서만 만나고, 모든 y값을 가져야 합니다. (x축에 평행하게 선을 그어서 아예 만나지 않는 건 안 돼요. 모든 y값을 가져야 하니까요.)

그런데 위의 그래프 확인해보세요. $x>2$에서는 두 개 이상의 점에서 만나는데요? 따라서 $x=m-1$는 선택할 수 없습니다. 따라서 $m+1=2$이어야 합니다. $m=1$이네요. 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 이러면 계속 증가하는 그래프니까 x축에 평행하게 선을 그어서 단 한 번만 만나고 모든 y값을 갖네요.

이제 n의 값을 구해봅시다. 그냥 단순히 $f(x-1)+n$가 $(2,\ f(2))$를 지나는 거예요. $f(2)=6$이니까 $f(1)+n=6$이어야 합니다. $f(1)=0$이므로 $n=6$이네요. 따라서 $m+n=7$입니다. 답은 ④번이네요.

6. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n} = a_3 \times a_n + 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - a_2$ 이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [2022학년도 사관학교 15]

① -53 ② -51 ③ -49 ④ -47 ⑤ -45

6. 정답 ① 〔2022학년도 사관학교 15〕

1) 정수, 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건해석

모든 항이 정수이고, 자연수 n에 대하여 $a_{2n} = a_3 \times a_n + 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - a_2$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 중에서 a_1의 최솟값을 m이라고 한답니다. 자연수와 정수가 보이니까 이거 숫자 넣어봐야겠죠?

$n = 1$을 넣으면 $a_2 = a_1 a_3 + 1$, $a_3 = 2a_1 - a_2$입니다. 이거 바로 관계식 쓸 수 있겠네요. 정리하면 $a_3 = 2a_1 - a_1 a_3 - 1$이고 $(a_1 + 1)(2 - a_3) = 3$이 나옵니다. 원래 이런 형태는 방정식을 풀 수 없지만, 우리는 정수라는 조건이 있죠. 정수가 보이면 무조건 숫자 넣을 준비를 하고 있어야 해요. 정수 두 개를 곱해서 3이 나오려면? 1×3, 3×1, -1×-3, -3×-1 중에 하나이죠. 각각 넣어봅시다. 그러면 (a_1, a_3)의 순서쌍이 $(0, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 5)$, $(-4, 3)$이 나옵니다. 최소는 -4가 아닐까요?

그래도 조금만 더 가봅시다. 혹시나 함정이 나올 수도 있으니까요. $n = 2$를 넣으면 $a_4 = a_2 a_3 + 1$, $a_5 = 2a_2 - a_2 = a_2$입니다. $n = 3$을 넣으면 $a_6 = {a_3}^2 + 1$, $a_7 = 2a_3 - a_2$입니다. 지금 보면 겹치는 숫자들이 없어서 관계식을 만들 수가 없네요. 함정은 딱히 없어 보입니다. 몇 개만 더 해볼게요.

$n = 4$를 넣으면 $a_8 = a_3 a_4 + 1$, $a_9 = 2a_4 - a_2$입니다. $n = 5$를 넣으면 $a_{10} = a_3 a_5 + 1$, $a_{11} = 2a_5 - a_2$입니다. 이정도 했으면 된 것 같아요. 그냥 바로 가죠. 최소는 $m = -4$입니다.

$a_1 = -4$이면 $a_3 = 3$입니다. 천천히 넣어서 a_9를 구해봅시다. 일단 $a_2 = -11$입니다. 그리고 $a_4 = -32$이구요. $a_9 = 2a_4 - a_2 = -53$이네요. 답은 ①번입니다.

7. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x < -a \text{ 또는 } x > a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 사관학교 20〕

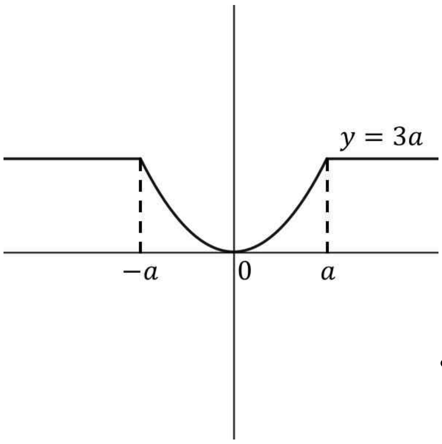
7. 정답 290 〔2022학년도 사관학교 20〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$a>0$인데 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$ 랍니다. 이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축,

$x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하라고 하네요.

일단 그래프부터 그려볼까요?



이렇게 됩니다.

이제 $y=f(x)$의 그래프와 x축, $x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 해요. 그런데 3은 a보다 큰가요? 아니면 작나요? 모르죠? 그러면 케이스를 나눠봐야겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a<3$일 때

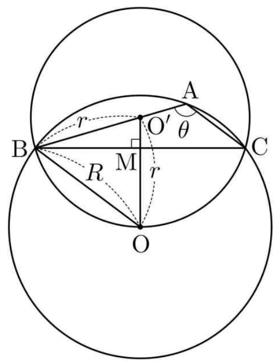
일단 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이에요. 그 말은 오른쪽만 넓이를 계산하고 그 넓이가 8의 절반인 4이면 되는 거죠. 그러면 넓이는 0부터 a까지 $\int_0^a \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a = a^2$이고 a부터 3까지는 직사각형의 넓이를 구하는 거니까 가로 $3-a$, 세로 $3a$해서 $3a(3-a)=-3a^2+9a$입니다. 총 $-2a^2+9a$인데 이게 4니까 $-2a^2+9a=4$이고 $2a^2-9a+4=(2a-1)(a-4)=0$입니다. $a<3$이니까 $a=\frac{1}{2}$이네요.

2-2) $a \ge 3$일 때

이번엔 0부터 3까지 $\int_0^3 \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3 = \frac{27}{a}$입니다. 이게 4니까 $\frac{27}{a}=4$이고 $a=\frac{27}{4}$이네요. $a \ge 3$이죠?

따라서 모든 a의 합은 $S=\frac{29}{4}$입니다. $40S=290$이네요.

8. $\angle\mathrm{BAC}=\theta\left(\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{3}{4}\pi\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB 위에 있을 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
>
> $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$
>
> 세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면
>
> $\overline{\mathrm{O'M}}=r-\overline{\mathrm{OM}}=r-|R\cos\theta|$
>
> 직각삼각형 O′BM에서
>
> $R=\boxed{\text{(가)}}\times r$
>
> 이므로
>
> $\sin(\angle\mathrm{O'BM})=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
>
> $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\boxed{\text{(다)}}$
>
> 
>

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2022학년도 사관학교 21〕

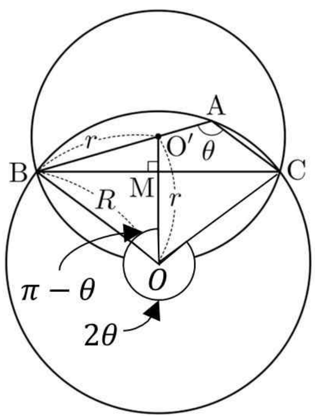
8. 정답 27 〔2022학년도 사관학교 21〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

$\angle \mathrm{BAC} = \theta \left(\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{3}{4}\pi\right)$인 삼각형ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 한답니다. 그리고 O′가 AB 위에 있다네요. 그림을 보면 다 표시되어 있죠? 계속 읽어봅시다.

ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 한다네요. 그러면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R$라고 합니다. 그리고 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자고 하네요. 그러면 O′O는 BC를 수직이등분합니다. 교점을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{O'M}} = r - \overline{\mathrm{OM}} = r - |R\cos\theta|$이랍니다. 왜 $\overline{\mathrm{OM}} = |R\cos\theta|$일까요?

일단 그림을 잘 관찰해봅시다. $\angle \mathrm{BAC} = \theta$이니까 원주각에 의하여 바깥쪽 $\angle \mathrm{BOC}$은 $\angle \mathrm{BOC} = 2\theta$입니다. 그러면 안쪽의 $\angle \mathrm{BOC}$은 $\angle \mathrm{BOC} = 2\pi - 2\theta$이겠죠? 따라서 $\angle \mathrm{BOO'} = \pi - \theta$입니다.



이렇게 되는 거죠.

그러면 $\overline{\mathrm{BM}} = R\sin(\pi - \theta) = R\sin\theta$이고, $\overline{\mathrm{OM}} = |R\cos\theta|$가 나옵니다. 물론 $\left(\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{3}{4}\pi\right)$이니까 $\cos\theta < 0$이라서 $\overline{\mathrm{OM}} = -R\cos\theta$이긴 합니다. 이후에 직각삼각형 O′BM에서 $R = \boxed{(가)} \times r$라고 하네요. 그러면 직각삼각형을 이용하라는 말이겠죠?

지금 직각삼각형 O′BM에서 $\overline{\mathrm{BM}} = R\sin\theta$이고 $\overline{\mathrm{O'M}} = r - |R\cos\theta| = r + R\cos\theta$이잖아요? 그러면 피타고라스를 이용할 수 있겠네요. 피타고라스의 정리에 의해 $R^2\sin^2\theta + (r + R\cos\theta)^2 = r^2$입니다. 정리하면

$R^2\sin^2\theta + r^2 + 2rR\cos\theta + R^2\cos^2\theta = r^2$이고

$R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + 2rR\cos\theta = R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2rR\cos\theta = R(R + 2r\cos\theta) = 0$입니다.

$R = -2r\cos\theta$이네요. 따라서 (가) $= -2\cos\theta$입니다.

그리고 $\sin(\angle \mathrm{O'BM})=$ $\boxed{(나)}$ 라네요. $\sin(\angle \mathrm{O'BM})=\dfrac{\overline{\mathrm{O'M}}}{r}=\dfrac{r+Rcos\theta}{r}=1-2\cos^2\theta=$ $\boxed{(나)}$ 입니다.

마지막으로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=$ $\boxed{(다)}$ 라네요. 지금 ABC를 보면 사인법칙을 통해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle O'BM)}$ 이잖아요? 정리하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}=$ $\boxed{(다)}$ 입니다.

이제 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 일 때 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\dfrac{q}{p}$ 를 구하랍니다. 일단

$f(\alpha)=-2\cos\theta=\dfrac{6}{5}$ 입니다. 그리고 $g(\beta)=1-2\cos^2\beta=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$ 입니다.

$h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sin\dfrac{2}{3}\pi}{1-2\cos^2\dfrac{2}{3}\pi}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 이니까 $\left\{h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=3$ 이네요. 모두 더하면 $\dfrac{22}{5}$ 입니다.

$p=5$, $q=22$ 이니까 $p+q=27$ 입니다.

9. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{0}^{x}(x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 사관학교 22〕

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

9. 정답 56 〔2022학년도 사관학교 22〕

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$가 일차함수인데 $g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$랍니다. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이 됩니다. $x=2$도 넣어보면 $g(2)=0$이네요.

이후엔 미분해야겠죠? 미분하는 변수가 s니까 $(x-2)$는 밖으로 빼고 $g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)ds$를 미분하면

$g'(x)=(x-2)f(x)+\int_0^x f(s)ds$입니다. $f(x)$가 일차함수니까 $g'(x)$는 이차함수겠네요. $g(x)$는 삼차함수겠죠?

이때 실수 t에 대하여 $(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선 $y=tx$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 한답니다. 이때 $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이라네요.

일단 $g(k)=0$이 되는 k는 2개가 있죠? 0과 2가 있어요. 그러면 $h(t)$는 $t=0,\ t=-2$에서 불연속이 되겠어요.

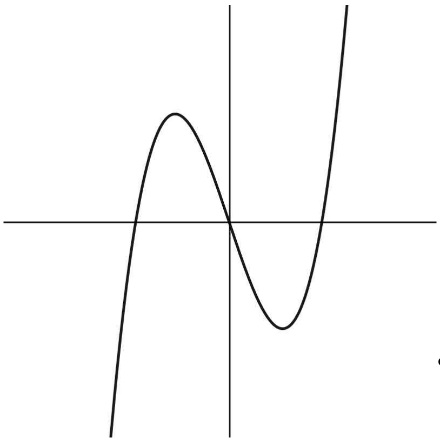
$h(t)$가 불연속이라는 건 어떤 의미일까요? $h(t)$는 $(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선 $y=tx$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수라고 했었어요. 그러면 기울기가 t에서 살짝만 바뀌어도 만나는 점의 개수가 변한다는 말이겠네요.

지금 $h(t)$는 $t=0,\ t=-2$에서 불연속이어야 하니까 기울기가 0일 때, -2일 때 각각 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변해야 합니다. 그러면 천천히 그래프를 그려서 확인해봅시다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

일단 $g(x)$는 $g(0)=g(2)=0$이에요. 그런데 $g(x)$는 삼차함수잖아요? 그러면 케이스가 두 가지가 있죠. x축과 세 점에서 만나거나 한 점에서 접하고 한 점에서 만나는 거예요.

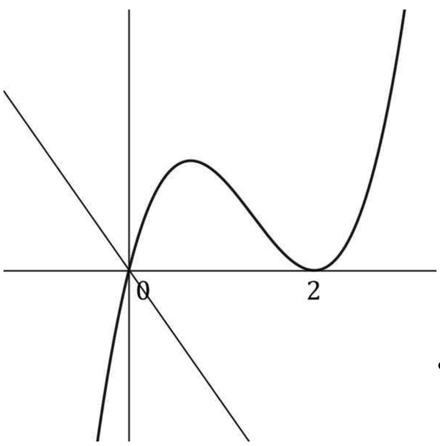
만약에 세 점에서 만난다고 해볼게요. 그냥 아무렇게나 그려보세요.



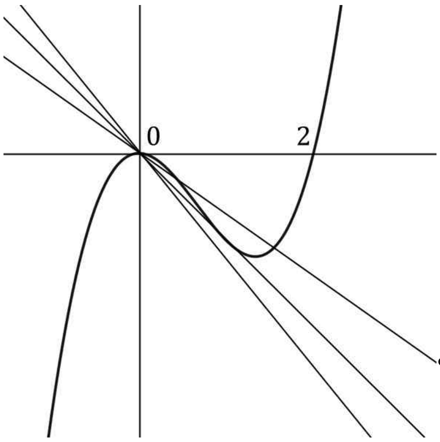
이렇게 됩니다. 이거 원점에서 기울기가 0인 직선 그어보세요. 기울기가 살짝 변하면 만나는 점의 개수가 변하나요? 변하지 않아요. x축과 세 점에서 만나게 그래프를 그리면 모두 안 됩니다.

결국 $x=0$, $x=2$ 둘 중에 하나에서 접하고, 나머지 하나에서 만나는 그래프가 되어야겠네요. 조심해야 할 건 $g(x)$의 최고차항의 계수를 알려주지 않았다는 거예요. 무의식적으로 최고차항의 계수가 양수인 경우만 하지 않도록 조심하세요!

일단 양수인 경우부터 가봅시다.



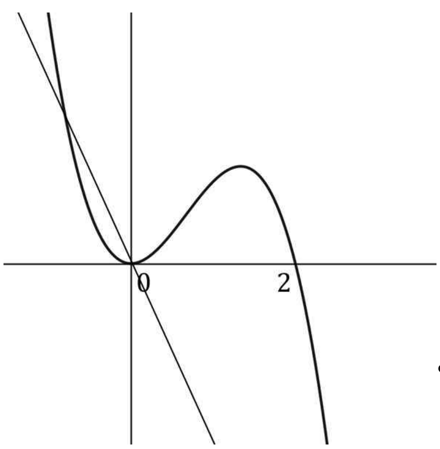
이렇게 그리면 기울기가 -2일 때 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변하나요? 변하지 않네요. 이건 안 됩니다.



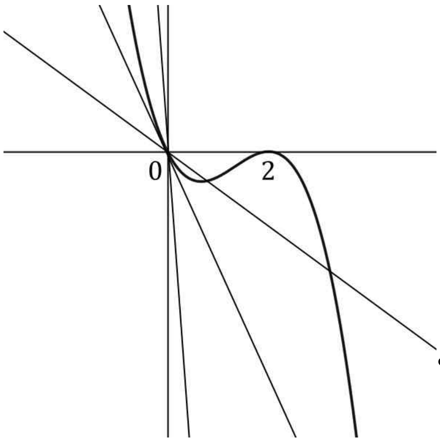
이렇게 그리면 가능합니다. 기울기가 -2인 직선이 접한다면 기울기가 살짝 작으면 1개, 접하면 2개, 살짝 커지면 3개의 점에서 만나니까 불연속이 되죠. 기울기가 0일 때에도 마찬가지입니다. 되네요!

그냥 아예 $g(4)$의 값을 구해버릴게요. 일단 최고차항의 계수를 k라 하면 $g(x)=kx^2(x-2)$이죠? 이 함수와 $-2x$가 $x=0$에서 그냥 만나고 한 점에서 접하니까 $kx^3-2kx^2=-2x$라 하면 $kx^3-2kx^2+2x=x(kx^2-2kx+2)=0$에서 $kx^2-2kx+2=0$은 중근을 가져야 합니다. 따라서 판별식이 0이어야 하므로 $k^2-2k=k(k-2)=0$입니다. k는 최고차항의 계수니까 0이 될 수 없으므로 $k=2$이네요. 따라서 $g(x)=2x^2(x-2)$이고 $g(4)=64$입니다.

계속 가봅시다. 이번엔 음수인 경우로 가볼게요.



이렇게 그리면 기울기가 -2일 때 기울기를 살짝 변화시켜도 만나는 점의 개수가 변하지 않습니다.



이렇게 $x=0$에서 접선의 기울기가 -2가 되도록 그리면 -2일 때 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변합니다. 기울기가 0일 때도 마찬가지이구요.

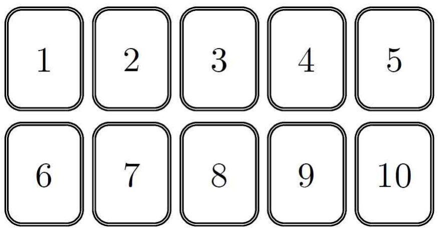
일단 최고차항의 계수를 k라 하면 $g(x)=kx(x-2)^2$입니다. $x=0$에서 접선의 기울기가 -2이어야 하니까 미분하고 집어 넣으면 $4k=-2$입니다. $k=-\frac{1}{2}$이네요. $g(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)^2$이고 $g(4)=-8$입니다. 모든 값의 합은 $64-8=56$입니다.

아드레날린 ex

확통

10. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드 중에서 임의로 선택한 서로 다른 3장의 카드에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은?
〔2022학년도 사관학교 확통 26〕

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



10. 정답 ④ 〔2022학년도 사관학교 확통 26〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1부터 10까지 있는데 이 중에서 3장을 골라서 곱했을 때 4의 배수가 될 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은 $\frac{\text{세 수 곱4의 배수}}{\text{3장 고르기}}$이죠?

분모부터 가봅시다. 그냥 10장 중에서 3장 고르는 거니까 ${}_{10}C_3 = 120$이네요.

분자를 구해봅시다. 일단 4의 배수이려면 2를 적어도 2개를 가지고 있어야 해요.

2-1) 여사건

"적어도"라는 표현이 있으니까 여사건으로 접근해도 되죠. 그러면 전체 경우의 수에서 2를 하나만 가지고 있거나 아예 2가 없는 경우를 빼면 되겠네요.

2를 하나만 가지는 경우를 해봅시다. 일단 보면 2가 없는 수는 1, 3, 5, 7, 9입니다. 2가 하나만 있는 수는 2, 6, 10이구요, 2개인 수는 4, 3개인 수는 8이에요. 그러면 일단 2가 하나만 있어야 하니까 먼저 2가 하나만 있는 2, 6, 10 중에서 하나를 고르구요$({}_3C_1 = 3)$, 이후에는 2가 없는 1, 3, 5, 7, 9 중에서 두 개를 고르면 되죠.$({}_5C_2 = 10)$ 총 $3 \times 10 = 30$입니다.

2가 없는 경우는 그냥 1, 3, 5, 7, 9 중에서 세 개를 고르면 됩니다. ${}_5C_3 = 10$이에요. 따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 30 - 10 = 80$이네요. 구하는 확률은 $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$입니다. 답은 ④번이네요.

2-2) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

2를 적어도 두 개를 가지고 있어야 하잖아요? 방금 봤듯이 2가 없는 수는 1, 3, 5, 7, 9이고, 2가 하나만 있는 수는 2, 6, 10이구요, 2개인 수는 4, 3개인 수는 8이에요.

일단 먼저 8을 고른 경우에는 나머지 모든 숫자를 골라도 됩니다. 어차피 8 하나만으로 4의 배수가 되거든요. 따라서 ${}_9C_2 = 36$입니다.

4를 고른 경우도 마찬가지이죠. 다만 8을 같이 고른 경우는 아까 했으니까 8을 제외한 8개 중에서 고르면 됩니다. ${}_8C_2 = 28$입니다.

2, 6, 10 중에서 2개 혹은 3개를 고른 경우도 확인해봐야죠. 2개를 고른 경우, 일단 ${}_3C_2=3$을 해놓고 4와 8을 제외한 나머지 1, 3, 5, 7, 9 중에서 1개를 고르면 됩니다. ${}_5C_1=5$이네요. 총 $3\times5=15$입니다.

3개를 고른 경우 ${}_3C_3=1$입니다. 그리고 끝이네요. 총 $36+28+15+1=80$으로 구하는 확률은 $\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$입니다. 답은 ④번이네요.

11. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f\ :\ X \rightarrow\ Y$의 개수는? 〔2022학년도 사관학교 확통 28〕

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다. (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x)=1$이다.

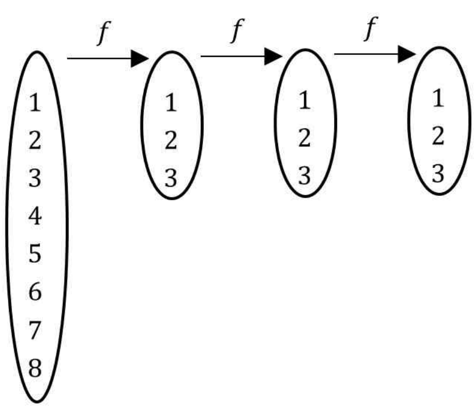
① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

11. 정답 ② 〔2022학년도 사관학교 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$가 있는데 (가)조건에서 집합 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이고, (나)조건에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x)=1$인 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하랍니다.

일단 (나)조건을 보면 f를 세 번 합성했어요. 일단 세 번 합성하게 되면 $X \to Y \to Y \to Y$와 같은 형태가 됩니다. 첫 번째 f에서 고를 수 있는 건 1, 2, 3 뿐인데 이 1, 2, 3에서 다시 1, 2, 3으로 가잖아요. 그게 다시 1, 2, 3으로 가구요.



이렇게 되는 거죠.

이때 이 함수의 최종 목적지는 1이어야 합니다. 어디로 가든 $(f \circ f \circ f)(x)$의 마지막은 항상 1로 가야 한다는 거죠.

하지만 (가)조건에 의해 x값이 크다면 함숫값은 크거나 같아야 합니다. x값이 큰데 함숫값은 작은 경우는 있으면 안 된다는 거죠.

여기서 생각 좀 해볼게요. 일단 중요한 건 1, 2, 3이 어디로 가는지에요. 왜냐하면 첫 번째 f에서 얘네들이 어디로 가는지에 따라 나머지 f에서도 동일하게 가게 될 거거든요.

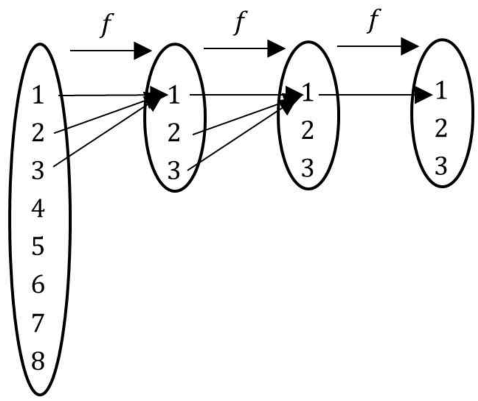
만약에 2가 2로 간다면? 그럼 2의 최종 목적지는 2가 될 거에요. 그럼 안 되잖아요? 2가 3으로 간다면? 그러면 3도 3으로 가야 해요. x값이 크다면 함숫값도 크거나 같아야 하는데 최대가 3이니까요. 이래도 안 됩니다. 따라서 2는 1로 가야 하고, 2보다 작은 1 역시 1로 가야 합니다.

이때 3은 3으로만 안 가면 돼요. 3으로 가면 최종 목적지가 3이 될 테니까요. 그러면 1로 가도 되고, 2로 가도

됩니다. 케이스가 나뉘네요.

2-1) 3 → 1일 때

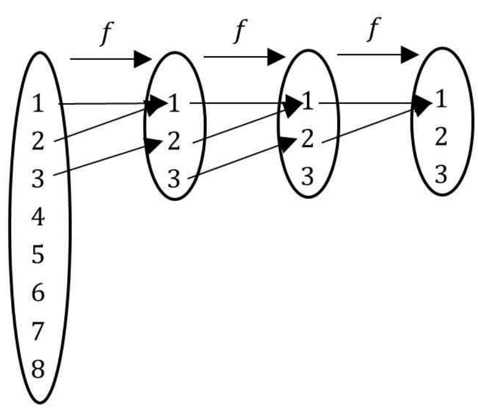
4부터 8까지는 1과 3 중에서 아무거나 골라도 됩니다. 어차피 어느 걸 골라도 최종 목적지는 1이 되니까요.



이때 겹치는 건 가능합니다. 따라서 총 5가지 숫자가 중복을 허용하여 3개를 고르는 거니까 선택종류 3가지에 선택횟수 5번으로 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$입니다.

2-2) 3 → 2일 때

이러면 4부터 8까지는 2와 3 중에서 아무거나 골라도 됩니다. 이것도 마찬가지로 어느 걸 골라도 최종 목적지는 1이 됩니다.



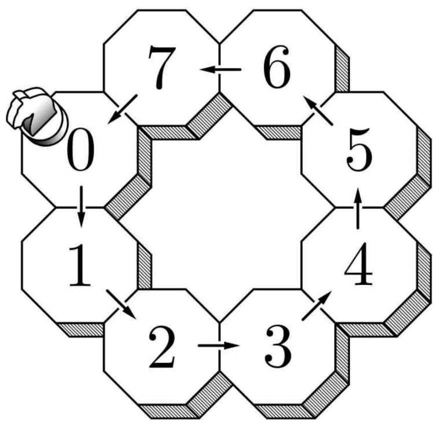
선택종류 2가지에 선택횟수 5번으로 ${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $21 + 6 = 27$입니다. 답은 ②번이네요.

12. 그림과 같이 8개의 칸에 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 말판이 있고, 숫자 0이 적혀 있는 칸에 말이 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 3 이상이면 말을 화살표 방향으로 한 칸 이동시키고, 나오는 눈의 수가 3보다 작으면 말을 화살표 반대 방향으로 한 칸 이동시킨다.

위의 시행을 4회 반복한 후 말이 도착한 칸에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(36X)$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 사관학교 확통 29〕



12. 정답 80 〔2021년 사관학교 확통 29〕

1) 조건해석

그림과 같이 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적혀 있는데 0에서 시작해서 주사위를 던져서 3, 4, 5, 6이면 화살표 방향으로 한 칸, 1, 2이면 화살표 반대 방향으로 한 칸 이동시킨답니다. 그래서 도착한 칸에 적힌 수를 확률변수 X라고 한다네요. 화살표로 갈 확률은 $\dfrac{2}{3}$이고 화살표 반대 방향으로 갈 확률은 $\dfrac{1}{3}$이네요. 일단 확률변수가 뭐뭐 나올 수 있는지부터 확인합시다.

최대 4칸 이동 가능해요. 그러면 나올 수 있는 경우는 화살표, 화살표 반대 순서대로

40 $\rightarrow$ 4

31 $\rightarrow$ 2

22 $\rightarrow$ 0

13 $\rightarrow$ 6

04 $\rightarrow$ 4

이렇게 가능하죠? 그래서 표로 만들어보면

X	0	2	4	6	
$P(X=x)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_4C_2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3\times{}_4C_3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times{}_4C_1$	1

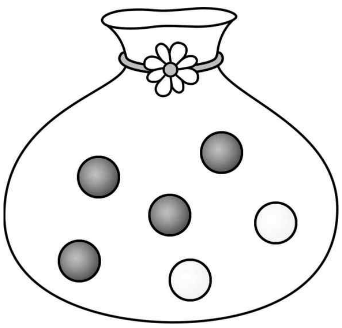
이렇게 되겠네요. 따라서 $E(X)=0\times\dfrac{24}{81}+2\times\dfrac{64}{81}+4\times\dfrac{17}{81}+6\times\dfrac{8}{81}=\dfrac{180}{81}=\dfrac{20}{9}$입니다.

$E(36X)=36E(X)=80$이네요.

13. 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니에 대하여 다음 시행을 2회 반복한다.

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 후, 꺼낸 공 중에서 흰 공은 다시 주머니에 넣고 검은 공은 다시 넣지 않는다.

두 번째 시행의 결과 주머니에 흰 공만 2개 들어 있을 때, 첫 번째 시행의 결과 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)〔2022학년도 사관학교 확통 30〕



13. 정답 41 〔2021년 사관학교 확통 30〕

1) 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의 수}}{A\text{일 경우의 수}}$

그림과 같이 주머니에 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는데 이 중에서 3개를 동시에 꺼낸 후 흰 공은 다시 넣고 검은 공은 다시 넣지 않는 시행을 2번 반복한답니다. 이 결과로 주머니에 흰 공만 2개 들어 있을 때, 첫 번째 시행의 결과 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률을 구하라네요. 일단 구하는 확률은

$\dfrac{1\text{번째 검은 공 2개 그리고 2번째 흰 공만 2개}}{2\text{번째 흰 공만 2개}}$ 이죠?

일단 2번째에 흰 공만 2개가 남아 있다는 건 2번의 시행으로 검은 공 4개를 모두 꺼냈다는 거예요. 그러면 첫 번째와 두 번째에 각각 몇 개를 꺼냈는지를 확인해야겠네요.

일단 첫 번째에는 무조건 검은 공 꺼내야 해요. 3개를 고르는데 흰 공은 2개밖에 없으니까 검은 공 1개는 무조건 나오죠. 이때 검은 공은 1, 2, 3개가 나올 수 있습니다.

그러면 두 번째까지 고려해서 13, 22, 31이 가능하겠네요. 그러면 결국 구하는 확률은 $\dfrac{22}{13+22+31}$ 이죠?
(안에 있는 숫자는 숫자가 아니라 첫 번째에 꺼낸 검은 공의 수, 두 번째에 꺼낸 검은 공의 수예요!)

일단 13의 경우부터 해봅시다. 첫 번째에 검은 공 1개, 흰 공 2개를 골라야 합니다. 확률은
$\dfrac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{5}$ 이네요. 두 번째에는 5개의 공 중에서 검은 공 3개를 골라야 합니다. 확률은 $\dfrac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\dfrac{1}{10}$ 이네요.

따라서 $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{50}$ 입니다.

22의 경우 첫 번째에 검은 공 2개, 흰 공 1개를 골라야 합니다. 확률은 $\dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{3}{5}$ 입니다. 두 번째에는 4개의 공 중에서 검은 공 2개, 흰 공 1개를 골라야 합니다. 확률은 $\dfrac{{}_2C_2\times{}_2C_1}{{}_4C_3}=\dfrac{1}{2}$ 입니다. 따라서

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$ 이네요.

31의 경우 첫 번째에 검은 공 3개를 골라야 합니다. 확률은 $\dfrac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{5}$ 입니다. 두 번째에는 3개의 공 중에서 검은 공 1개, 흰 공 2개를 골라야 합니다. 이건 전체를 고르는 거니까 확률은 무조건 1이네요. 따라서

$\frac{1}{5}$ 입니다.

구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{1}{50}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{5}} = \dfrac{15}{26}$ 이네요. $p = 26$, $q = 15$ 이므로 $p + q = 41$ 입니다.