작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

우리가 일상생활에서 겪는 대부분의 의사결정은

1. 가장 좋은 결과를 얻고 싶지만
2. 여러 가지 여건이 제약되어 있는 상황 하에서

이루어집니다. 예컨대, 누구나 가장 좋은 시험점수를 얻고 싶지만 시험공부를 할 수 있는 시간은 제한되어 있고요. 누구나 지각을 피하고 싶지만 그렇다고 등교시간이 한없이 늘어나지는 않습니다. 수학에서도 이런 상황은 빈번히 등장하는데요. 하나 예를 들어보자면

$x^2+y^2 \le 1$일 때, $x+y=k$의 최댓값과 최솟값은?

같은 문제가 있겠네요. 이 문제는 고등수학의 '도형의 방정식과 부등식의 영역'을 공부할 때 누구나 한번쯤은 풀어봤을 전형적인 문제이고, 다양한 풀이가 존재합니다. 하지만 이 문제의 구조를 근본적으로 생각해보면, 우리가 일상생활에서 겪는 수많은 의사결정의 상황과 다르지 않습니다.

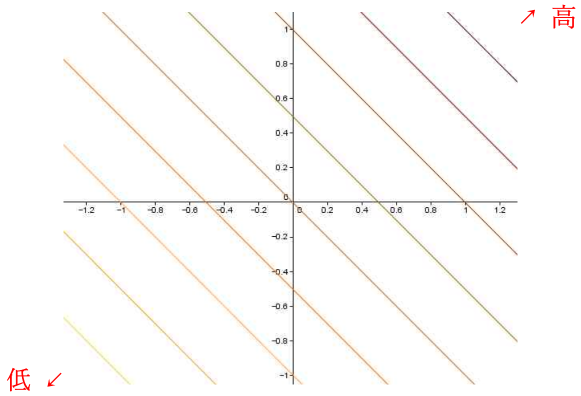
극대화/극소화하고 싶은 결과물	제약조건
시험성적	일정한 시간
최소이동거리	일정한 시간
$x+y=k$	$x^2+y^2 \le 1$

그럼 이제부터 우리가 고등학교 1학년 때 어떻게 이 문제를 풀이하였는지 되짚어보겠습니다.

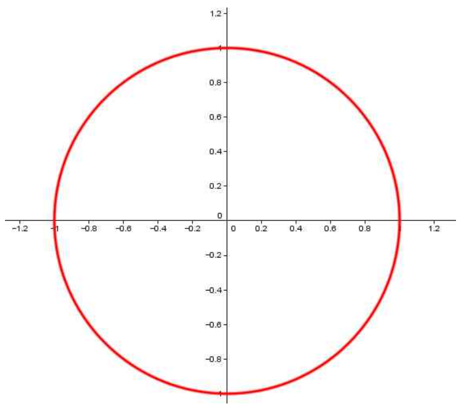
작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

[풀이]

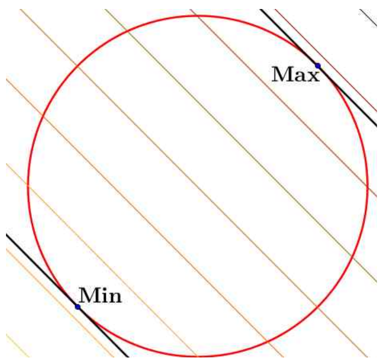
1. 좌표평면 위에 $x+y$가 일정한 점들을 연결합니다. 지도 위에 등고선을 그린다고 생각하면 쉽게 이해할 수 있습니다.



2. 제약조건 $x^2+y^2 \leq 1$을 평면 위에 도식화합니다.



3. 이제 두 지도를 포개어놓고, 어느 지점에서 고도가 가장 높고, 가장 낮은지 판단해봅니다.



작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

4. 이전 단계에서 확인했듯이 [등고선] $x+y=k$와 [영역의 경계선] $x^2+y^2=1$이 서로 접할 때 [최댓값]과 [최솟값]을 가짐은 매우 명백합니다. 이 점에 주목하여 식을 세우면 답을 얻을 수 있습니다. 즉, 직선 $x+y=k$에서 원점까지의 거리가 원의 반지름 $r=1$과 같을 때, 최댓값과 최솟값을 가집니다.

$$1=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$$

∴ 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다. □

위 풀이는 교과서에서 소개하고 있는 표준적인 풀이법[1)]입니다. 그런데 미분을 배우고 나면

접한다. ⇔ 접선을 공유한다. ⇔ 미분계수가 같다.

임을 이해하게 됩니다. 그렇다면 음함수의 미분법을 이용하여 마지막 계산과정을 이렇게 대체할 수도 있겠네요.

[별해]

4'. 음함수 미분법을 이용하여, $x^2+y^2=1$위의 점 $P(x_0, y_0)$에서 접선의 기울기를 구하면

$$2x_0+2y_0\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y_0}{x_0}$$

이고, 직선 $x+y=k$의 기울기는 항상 -1이다. 즉, [등고선]과 [영역의 경계선]이 점 $P(x_0, y_0)$에서 접할 때,

$$-\frac{y_0}{x_0}=-1 \Rightarrow y_0=x_0$$

가 성립한다.

5. 점 $P(x_0, y_0)$는 $x^2+y^2=1$위의 점이므로, $x_0^2+x_0^2=1$이고 정리하면 $x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$를 얻는다.

즉, $x+y$의 최댓값은 $\sqrt{2}\left(=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이고, 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

□

1) 이 풀이의 아이디어를 더욱 일반화하여 발전시킨 것이 대학 미적분학 시간에 배우는 라그랑주 승수법입니다. 하지만 이 방법이 라그랑주 승수법을 암시하고 있기 때문에 교육과정을 벗어나고 따라서 학습해선 안 된다고 주장한다면 선뜻 동의하기가 쉽지 않습니다. 그럼 이 풀이를 소개하고 있는 교과서는 대체 뭐가 되나요?

작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

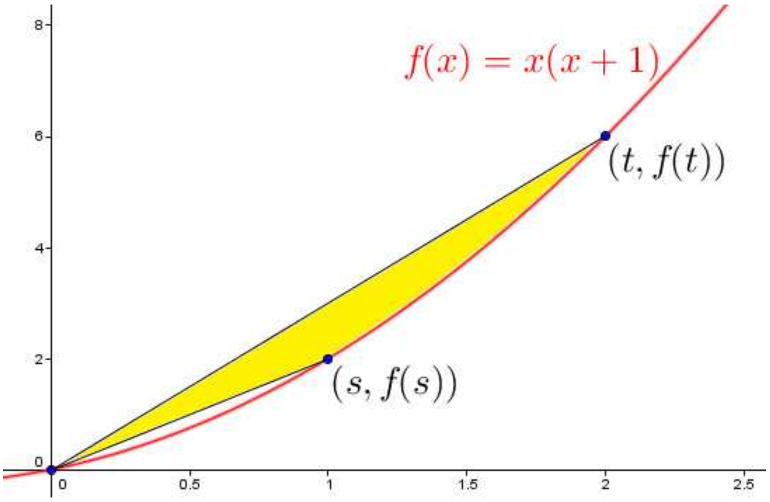
이제 모든 준비는 끝났습니다. 2013년 6월 수능 모의평가 수학B형 30번 문항으로 가봅시다!

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, $t(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s,t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C위의 점 중에서 점 $(1,0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[풀이]

1. 우선 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 그림으로 표현해보면 다음과 같습니다. 이제 이 영역을 식으로 표현해야 하는데요.



2. 복잡한 적분계산을 할 때 자주 미끄러지는 학생이라면

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

정도는 아예 공식으로 외우고 있길 권합니다. 수능수학영역은 시간싸움이기도 해요. 이 문제에서도 이 공식은 대단히 유용하게 사용되는데요.

$$\begin{array}{rlr} & \text{곡선과 선분 } OB\text{로 둘러싸인 부분의 넓이} & =\frac{1}{6}(t-0)^3 \\ -\,) & \text{곡선과 선분 } OA\text{로 둘러싸인 부분의 넓이} & =\frac{1}{6}(s-0)^3 \\ \hline & k & =\frac{1}{6}(t^3-s^3) \end{array}$$

하고, 단숨에 식을 얻을 수 있기 때문입니다. 이제 s를 x좌표, t를 y좌표로 보고, 식을 정리하면 곡선 C의 방정식을 얻을 수 있습니다.

작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

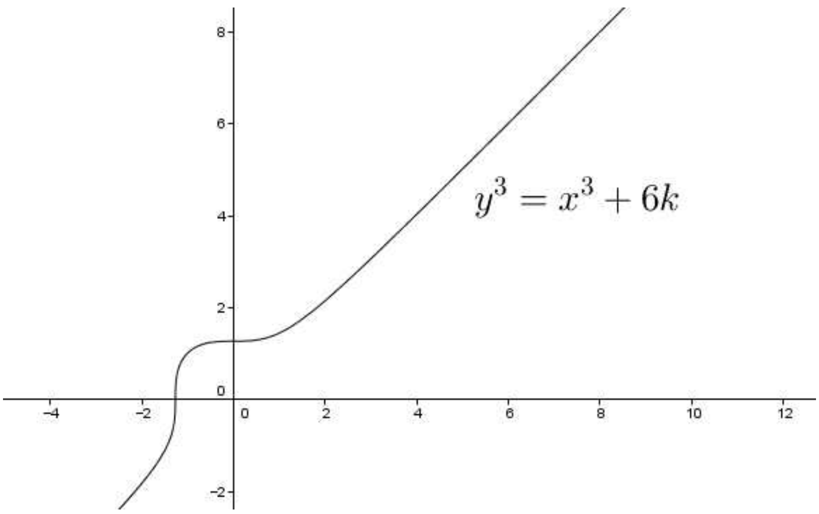
곡선 C : $y^3 = x^3 + 6k$ 또는 $y = \sqrt[3]{x^3 + 6k}$

여기까지 오면 대부분의 학생들이 멘붕할 겁니다. 곡선 C가 대단히 낯설기 때문이죠. 주어진 곡선의 그래프를 정확하게 그려야 한다는 강박관념을 가질 필요는 없습니다. 일단은 대략적으로 그리고 만약 필요하다면 그 때 가서 필요한 부분만 자세히 그리면 됩니다.

3. 곡선 $y = \sqrt[3]{x^3 + 6k}$에서 $6k$는 그 값을 정확히 모를 뿐 고정된 값입니다.
또한 $y = x^3$나 $y = \sqrt[3]{x}$ 모두 단조증가함수니까 이 둘을 합성한 $y = \sqrt[3]{x^3 + 6k}$ 또한 증가함수이고요.

만약 $6k = 0$이라면, $y = \sqrt[3]{x^3} = x$입니다. 즉, 곡선 C는 항등함수 $y = x$가 되고요. $6k \neq 0$이라 하더라도 $x \to \infty$일 때, $x^3 + 6k \simeq x^3$로 근사시킬 수 있습니다. 즉, x가 충분히 커지면 곡선 $y = \sqrt[3]{x^3 + 6k}$는 $y = x$와 대단히 비슷하겠네요.

정리하면 함수 $y = \sqrt[3]{x^3 + 6k}$는 $(0, 6k)$를 지나면서 마치 $y = x$처럼 단조증가하는 함수입니다. $k > 0$이라 가정하고, 곡선 C의 그래프를 대략적으로 그려보면 다음과 같습니다.

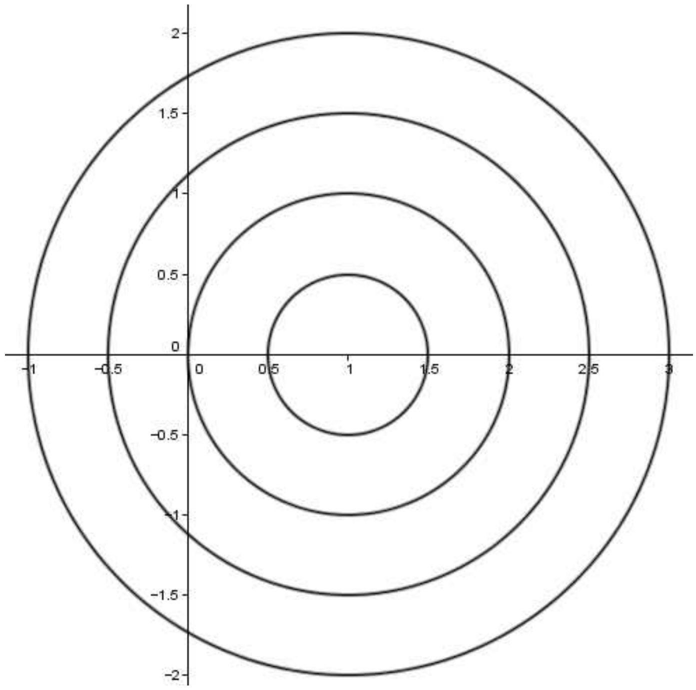


작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

4. 이제 방향을 바꾸어 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소라는 부분에 주목해봅시다. 다시 말해 이 문제에서 극소화하고 싶은 것은 점 $(1,0)$과의 거리입니다. 즉, 지도($\mathbb{R}^2$) 위에 등고선을

$$(x-1)^2+y^2=r^2$$

형태로 그려나가라는 뜻입니다.



5. 무척 긴 여정이었습니다. 정리해보면 이 문제의 구조는 다음과 같습니다.

극소화하고 싶은 결과물	제약조건
$(x-1)^2+y^2=r^2$	$y^3=x^3+6k$

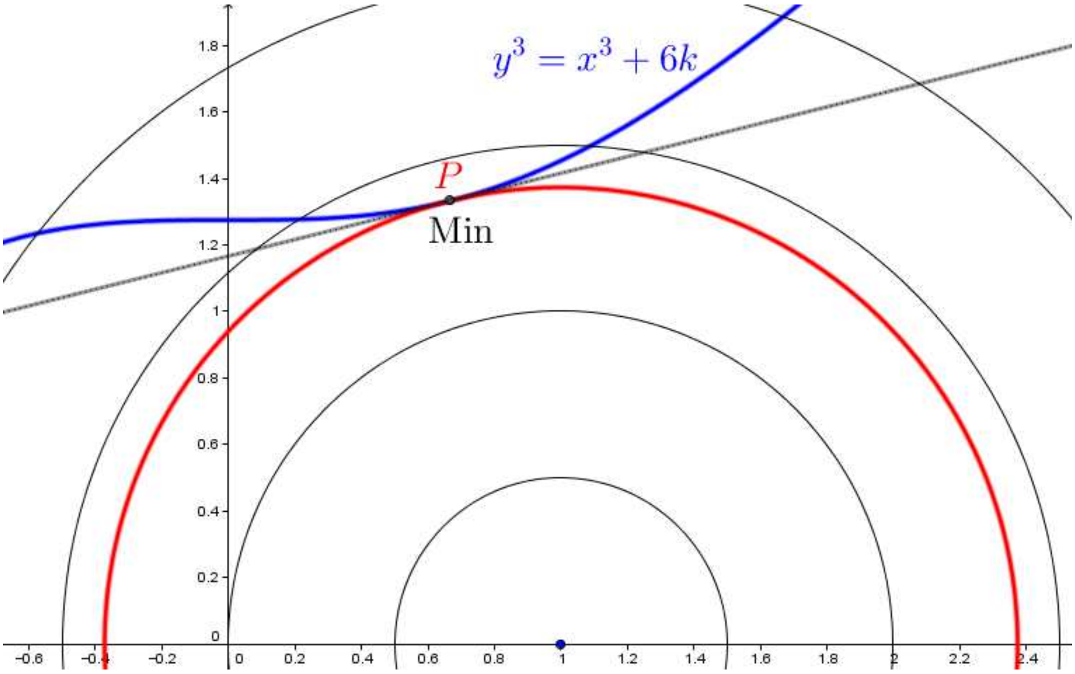
앞서 리뷰하였듯이 이제 지도 두 개를 포개어놓았을 때,

[등고선] $(x-1)^2+y^2=r^2$과 [제약조건] $y^3=x^3+6k$이 서로 접할 때

[최댓값] 또는 [최솟값]을 가집니다. 즉, 점 P에서 최솟값을 가진다고 하면

점 P에서 [등고선]과 [제약조건]이 접한다.
$\Leftrightarrow$ 점 P에서 [등고선]과 [제약조건]이 접선을 공유한다.
$\Leftrightarrow$ 점 P에서 등고선의 기울기와 곡선 C의 기울기가 같다.

가 성립합니다. 이제 남은 것은 계산뿐입니다!



6. 우선 곡선 $y^3 = x^3 + 6k$ 위의 점 $P(x_0,\ y_0)$에서 접선의 기울기를 구하면

$$3y_0^2\frac{dy}{dx} = 3x_0^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x_0^2}{y_0^2}$$

입니다. 같은 방식으로 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$위에서 접선의 기울기를 구하면

$$2(x_0 - 1) + 2y_0\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x_0 - 1}{y_0}$$

이고요. 이제 두 곡선이 점 P에서 접선을 공유하므로

$$\frac{x_0^2}{y_0^2} = -\frac{x_0 - 1}{y_0}$$

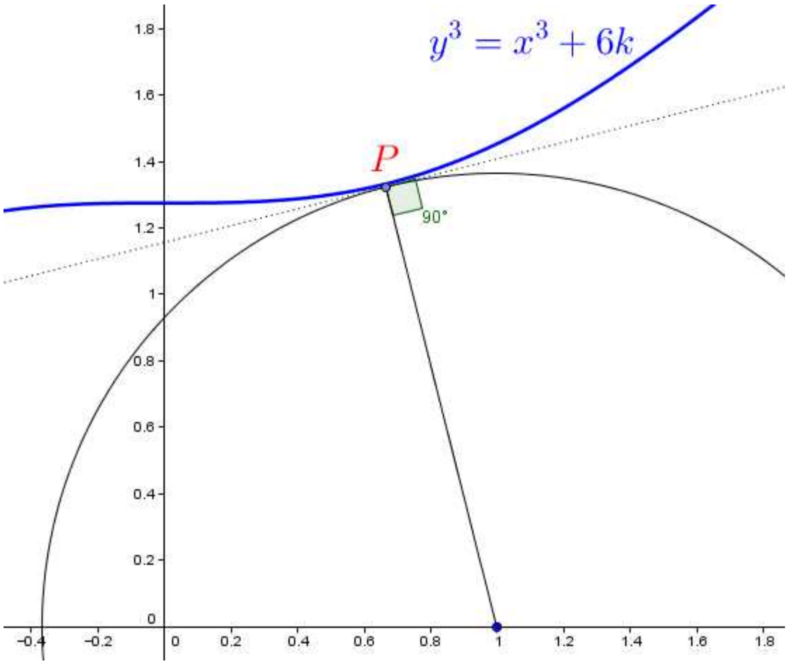
이고, 문제의 조건에 따르면 P의 x좌표는 $\frac{2}{3}$입니다. 즉, $x_0 = \frac{2}{3}$를 대입하여 정리하면 $y_0 = \frac{4}{3}$입니다. 마지막으로 $y^3 = x^3 + 6k$에 $(x,\ y) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$를 대입하여 계산하면 $k = \frac{28}{81}$를 얻을 수 있습니다. 긴 여정이 비로소 끝났습니다!

$\square$

작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

[별해]
위의 풀이에서 6번 계산은 주어진 곡선 중 하나가 원이라는 특징에 주목하여 다음과 같이 접근할 수도 있습니다.

6'. 수많은 임의의 곡선들 중에서 원은 가장 완벽한 대칭성을 가지고 있습니다. 이 곡선이 가진 고유한 특징 중 하나는 [접점과 원의 중심을 지나는 직선]이 [접선]과 항상 수직이라는 것입니다. 두 곡선의 접선을 각각 구하는 과정에서 원의 접선을 구하기 위해 굳이 음함수 미분법을 사용할 필요 없고,



[$(1,0)$과 점 P를 지나는 직선]이 P에서의 접선과 수직

임을 이용할 수도 있습니다. 다시 말해 접선의 기울기를 m이라 할 때,

$$\frac{y_0}{x_0-1}\cdot m = -1 \Rightarrow m = -\frac{x_0-1}{y_0}$$

가 성립합니다.

□

작성자 김우섭 (sodong212@gmail.com)

솔직히 고백하자면 제가 이 문제의 해설을 쓰기로 결심하게 된 계기는 바로 별해 6' 부분 때문이었습니다. 이 부분에서 풀이의 키를 다소 오해하는 경우가 있어서, 어느 정도 혼란이 있었다고 뒤늦게 들었거든요. 강조하지만 이 문제를 해결하는 가장 핵심적인 키는

법선[normal line]을 사용한다가 아니라

최대/최소일 때 두 곡선이 서로 접한다. 다시 말해 접선[tangent line]을 공유한다.

입니다. 그래서 이 문제는 고등수학에서 다루었던 [부등식의 영역과 최대-최소]와 수학2에서 다룬 [음함수의 미분법]을 통합시킨 신유형입니다. 일부에서 주장하는 것처럼 법선을 떠올려야만 하므로 지나치게 천재적인 풀이라거나 교육과정을 벗어난다거나 출제자의 의도는 결코 이것이 될 수 없다거나 하지는 않습니다. 단지 통합단원적일 뿐입니다.

이번 6월 B형 30번 문항을 우직하게 한 문자에 대하여 정리하고, 직접 미분하여 정답을 맞추신 분들을 저는 존경합니다. 정확하게 step을 밟아나가면 이 방법을 통해서도 분명 답이 나올 것이란 점은 잘 압니다만, 저는 계산집중력이 떨어지는 아둔한 사람인지라 그렇게 풀다보면 십중팔구 미끄러지거든요. 무척 긴 글이 되었네요. 끝까지 인내심을 가지고 읽어주셔서 감사합니다.

사족.
다음 문제는 올해 EBS 수능완성에 수록되어 있는 문제입니다. 이번 30번 문항이 어떻게 탄생하게 되었는지 짐작할 수 있는 문제인 것 같습니다.