아드레날린 수학 II

이정민 지음

공부 잘하는 방법!

학원에서 조교를 하거나 과외를 하다 보면 많은 사람들이 공부 잘하는 방법을 물어보곤 합니다. 사실 공부를 잘하는 방법은 간단합니다. 고민을 많이 하면 됩니다.

그런데 그 고민은 뭘 말하는 건가요? 예를 들어, 뜨거운 물에 손가락을 넣어서 다쳤다고 해볼게요. 손가락을 다친 원인은 뜨거운 물에 손가락을 넣었기 때문이죠. 그러면 우리는 손가락을 다치지 않기 위해 생각을 합니다. '다시는 뜨거운 물에 손가락을 넣지 말아야겠다'라구요.

공부도 마찬가지입니다. 뜨거운 물에 손가락을 넣으면 다치는 것처럼, 공부를 할 때 사고과정이 올바르지 않다면 문제를 틀리게 됩니다. 대부분의 사람들은 틀린 문제를 단지 "실수"라고 여기며 대수롭지 않게 생각합니다. 그리고는 똑같은 문제를 또 틀리곤 하죠.

공부를 잘 하기 위해서는 태도를 바꿀 필요가 있습니다. 문제를 틀렸다면, 틀린 이유를 알아야 합니다. '내가 ~를 못 봐서 틀렸다, ~를 안 해서 틀렸다' 뭐 이런 식으로요.

틀린 이유를 아는 방법은 다양합니다. 문제를 풀릴 때까지 풀어서 알아낼 수도 있구요, 스스로 찾기 힘들다면 다른 사람의 도움을 받아 알아내는 방법도 있습니다. 가장 좋은 방법은 끊임없이 고민해서 스스로 알아내는 것이지만, 이것이 언제나 가장 효율적이라는 것을 의미하지는 않기 때문에 상황에 맞게 적절히 방법을 선택하면 됩니다.

틀린 이유를 알아냈다면 행동강령을 세워야 합니다. 행동강령이라는 것은 특정한 행동을 스스로에게 요구하는 것입니다. 아까 예시에서 '다시는 뜨거운 물에 손가락을 넣지 말아야겠다'라고 생각한 것이 행동강령이죠. 틀린 이유의 반대가 되는 행동을 요구하는 행동강령을 세우면 되겠죠?

행동강령을 세우는 방법도 스스로 고민해서 세우는 것과 다른 사람이 만든 행동강령을 모방하는 것이 있습니다. 이것도 마찬가지로 가장 좋은 방법은 스스로 만드는 것이지만, 언제나 가장 효율적이지는 않기 때문에 다른 사람의 도움을 받는 것이 더 효율적일 수도 있습니다. 제가 여러분들에게 해설과 행동강령은 제공해드리는 건 스스로 행동강령을 세우는 것이 어렵다면 저의 행동강령을 모방하는 것을 추천하는 거예요. 이 행동강령은 제가 실제로 수험생활을 하면서 틀린 이유를 분석해 만든 것이어서 다른 사람들에게도 잘 맞을 거라고 생각을 했거든요.

행동강령을 세웠다면 거기서 끝이 아니라 다른 문제에 새롭게 만든 행동강령을 적용해봐야 합니다. 적용하면서 피드백을 해야 해요. 내가 만든 행동강령이 잘 적용되고 있는지를 끊임없이 확인하고 고민해야 합니다. 잘 적용되고 있다면 다행이지만 잘 적용되고 있지 않다면 또다시 원인을 분석해서 또다른 행동강령을 만들어야 합니다.

방금 살펴봤듯이 공부를 잘하기 위해서는 고민을 많이 할 필요가 있습니다. 틀린 이유를 알아내는 것도 고민이 필요하고, 행동강령을 세우는 것도 고민이 필요합니다. 이는 개인의 노력 여하에 달려 있습니다. 스스로 얼마나 많이 고민했는지, 그 고민을 통해 얻어낸 결론, 즉 행동강령을 얼마나 잘 활용하는지가 중요한 것입니다.

한편, 누군가는 시험을 볼 때 시간이 부족하지만, 누군가는 시간이 남아 돌기도 합니다. 왜 그런 걸까요? 행동강령을 처음 세웠을 때는 행동할 때 시간이 걸립니다. '내가 ~라는 걸 행동강령으로 세웠었지. ~를 해야겠다.'이런 식으로요. 하지만 행동강령대로 행동하는 것을 반복하게 되면 점점 그것이 습관이 됩니다. '체화' 되는 것이죠. 의식적으로 했던 행동을 점점 무의식적으로 하게 되는 거에요. 이렇게 되면 행동하는데 걸리는 시간이 현저하게 줄어듭니다. 불필요한 행동은 줄고, 꼭 해야 할 행동을 빠르게 하게 되면서 시험을 볼 때 시간이 남게 되는 것이죠.

이러한 것들을 알게 되었다면 앞으로 문제를 틀렸다고 해서 절망할 필요 없습니다. 문제를 틀린 것은 사고과정이 올바르지 않다는 것을 뜻하지만 그건 그냥 행동강령을 세워서 고치면 됩니다. 오히려 기회이죠. 잘못된 사고과정을 고칠 기회인 거예요.

이렇게 어떤 고난과 역경이 오더라도 그것을 자신이 성장할 수 있는 기회라고 여기며 고민하고 노력하는 것을 끊임없이 반복하다 보면 공부를 잘하게 됩니다. 앞으로 공부하면서 위와 같은 과정을 기억하고 실천해보세요. 태도가 달라지면 점수도 달라집니다.

이 책은 그 행동강령을 제시할 것입니다. 제 행동강령과 설명이 여러분들의 사고과정과 어떻게 다른지를 파악해보 고 앞으로는 어떻게 행동할 것인지를 생각해보시길 바랍니다!

문제편의 하나의 작은 챕터는

내용 정리 - 예제 - 예제 해설 - (참고) - 문제 - (복습)

으로 구성되어있습니다. 괄호는 있는 챕터가 있고 없는 챕터가 있어요. 작은 챕터들이 모여서 큰 챕터를 구성합니다.

특징 중 하나는 개념이 적고 스스로 해석하는 방법을 제시한 점입니다. 큰 챕터별로 개념 정리 파트에서 개념들이 유기적으로 이어지도록 설명했지만 길고 자세하게 설명하지는 않았습니다. 행동강령 또한 짧게 설명하고 예제를 통해 체화가 가능하도록 구성하였습니다. 대신 스스로 문제를 해결하는 능력을 기를 수 있도록 조건들을 해석하는 방법을 제시하였습니다.

또한 효율적인 학습이 가능하도록 내용을 구성하였습니다. 저는 개인적으로 단원별로 공부하는 것은 효율이 좋지 않다고 생각합니다. 결국 수능에서는 어떤 단원 문제라고 말해주지 않으니까요. 어쩌다보니 단원별로 구성을 하게 되었지만 중간중간 복습 파트와 마지막 부분에 데일리 모의고사로 최대한 단원을 모르고도 어떤 개념을 사용해야 하는지 연습할 수 있도록 구성하였습니다.

예제 해설 및 해설편

사후적인 해설이 아닙니다. 제가 수험생일 때 사후적인 해설을 진짜 극혐했었기 때문에 정말로 문제를 푸는 입장에서 서술했습니다. 여러분들도 저와 같은 사고를 하실 수 있도록 저의 사고의 흐름을 그대로 적었습니다.

1),2)와 같은 표시는 생각의 단위입니다. 이건 간단히 말해서 한번 생각할 때 이 정도를 생각한다는 거예요.
1),2) 옆에 있는 문구는 행동강령입니다. 제가 수험생일 당시 끊임없는 피드백을 통해 "이렇게 행동하면 되겠구나"라고 생각한 행동강령들을 문제들에 적용하는 거예요. 여러분들도 별다른 행동강령이 없다면 이런 행동강령대로 행동해보세요!

제가 설명해드리는 행동강령을 먼저 잘 숙지하신 후, 예제에 행동강령을 적용해보세요. 그리고 예제 해설을 보며 행동강령을 잘 적용했는지 확인해보세요. 잘 적용했다면 다행이지만 잘 적용하지 못했다면 왜 그런지, 그렇다면 다음에는 어떻게 행동할 것인지 고민해보세요. 그리고 문제들을 풀면서 행동강령을 체화해보세요. 끊임없이 피드백하는 건 잊지 마시구요.

예제가 어려울 수 있습니다. 너무 어려우면 일단 넘어간 후에 나중에 와서 풀어보세요.

목차

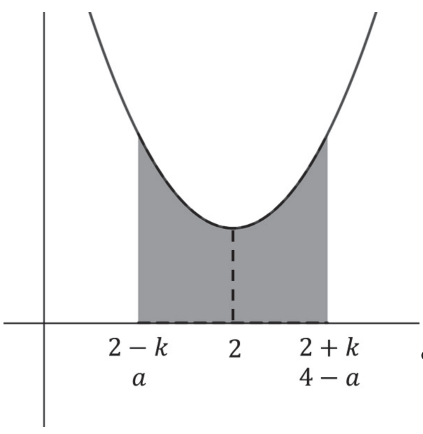
정적분할 때 도형이나 그래프를 잘 관찰해라

정적분 계산은 모두가 귀찮아요. 남들보다 조금이나마 앞서가는 방법은 어떻게든 편하고 간단하게 정적분하는 것이에요. 정적분 문제 중에는 의도적이건 의도적이지 않던 도형이나 그래프의 일부분의 넓이를 끼워 맞추면 계산이 깔끔해지는 문제가 많습니다.
대표적인 것이 대칭을 이용한 적분입니다. 축 대칭과 점 대칭 두 가지가 있어요.

축에 대하여 대칭인 경우를 먼저 볼게요. 대표적인 것이 우함수입니다. $f(x)=f(-x)$로 표현하죠. $x=0$ 축에 대하여 대칭인 우함수는 적분을 할 때에도 대칭을 이용하게 됩니다. 가장 큰 특징 중 하나는 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이죠. 축에 대하여 대칭이니까 $x=0$을 중심으로 오른쪽, 왼쪽의 모양이 완벽히 같습니다. 그러니까 0부터 a까지 적분하는 것은 $-a$부터 0까지 적분하는 것과 같죠. 따라서 $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$가 되는 거예요.

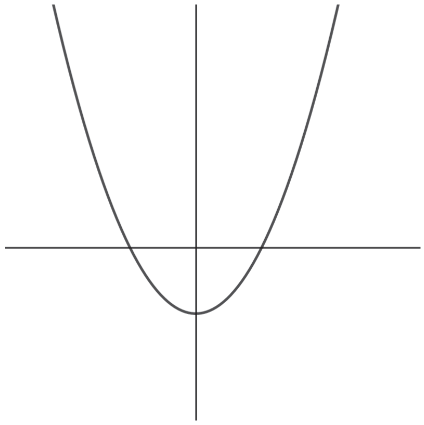
항상 $x=0$이 축이 아니어도 됩니다. $x=2$ 축에 대하여 대칭인 함수를 볼까요? 이 함수의 표현은 $f(2+x)=f(2-x)$ 혹은 $f(x)=f(4-x)$입니다. $f(2+x)=f(2-x)$는 2부터 x만큼 움직인 곳에서의 함숫값과 $-x$만큼 움직인 곳에서의 함숫값이 같다는 의미이죠. $f(x)=f(4-x)$는 x에서의 함숫값과 $4-x$에서의 함숫값이 같다는 거구요. x와 $4-x$는 $x=2$에 대하여 대칭인 관계잖아요? $2+x$와 $2-x$도 마찬가지이구요. $x=2$에 대하여 대칭이니까 $x=2$를 중심으로 오른쪽, 왼쪽의 모양이 완벽히 같겠죠?

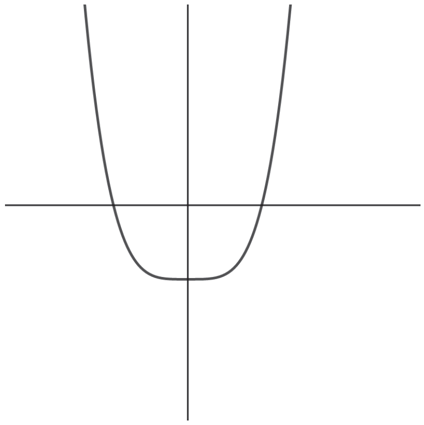
따라서 이 함수를 a부터 2까지 적분한 것은 2부터 $4-a$까지 적분한 것과 같게 됩니다. a와 $4-a$의 중점은 $\frac{a+4-a}{2}=2$이니까 a와 $4-a$는 2에 대하여 대칭이죠? 따라서 $\int_{a}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{4-a} f(x)dx$가 됩니다.
다르게 표현하면 $2-k$부터 2까지 적분한 것과 2부터 $2+k$까지 적분한 것도 같게 되죠.
$\int_{2-k}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{2+k} f(x)dx$가 되겠네요.

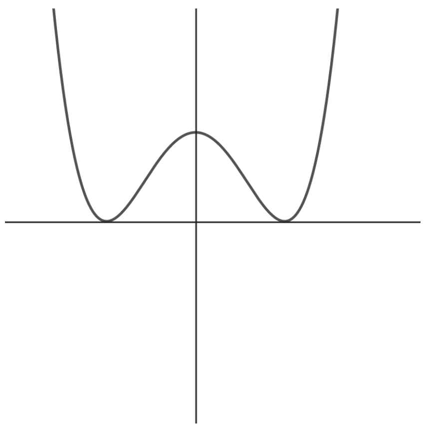


이렇게 되겠네요.

이런 방식으로 축에 대하여 대칭인 함수를 처리할 수 있습니다. 축에 대하여 대칭이라고 하니까 이차함수와 특정 개형의 사차함수가 떠오르네요.





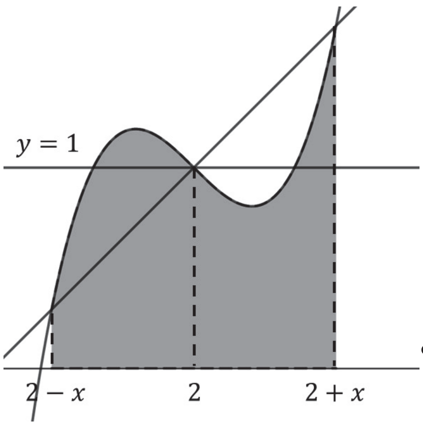


이 두 다항함수는 축에 대하여 대칭을 활용할 수 있는 함수입니다. 이걸 사용하면 계산이 절반으로 줄겠죠?
다음은 점 대칭입니다. 대표적인 것이 기함수죠. $-f(x)=f(-x)$로 표현되는 기함수는 점 $(0,\ 0)$에 대하여 대칭입니다. 기함수는 이를 이용하여 적분합니다. 가장 큰 특징은 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$입니다. 기함수는 원점 대칭 함수이므로 원점을 중심으로 함수가 대칭됩니다. $x>0$ 부분에서 $f(x)$가 x축 위에 있다면, $x<0$ 부분에서는 $f(x)$가 x축 아래로 가게 되는 거죠. 반대도 마찬가지구요. 적분은 음수가 가능하잖아요? 따라서

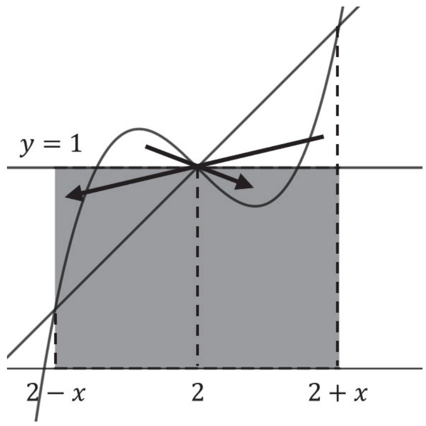
$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$가 됩니다.

위에서 한 것과 같이 이건 기함수에만 적용되는 건 아니에요. 점이 $(2,\ 1)$인 함수를 볼게요. 이 함수의 표현은 $f(2-x)+f(2+x)=2$입니다. $\dfrac{f(2-x)+f(2+x)}{2}=1$로 변형하면 2에서 x만큼 움직인 곳에서의 함숫값과

$-x$만큼 움직인 곳에서의 함숫값의 중점이 1가 되는 거죠. 항상 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이라는 말이에요. 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이니까 $x > 2$ 부분에서 $f(x)$가 $y = 1$보다 위에 있다면 $x < 2$ 부분에서는 $f(x)$는 $y = 1$보다 아래에 있게 됩니다. 이걸 적분하면



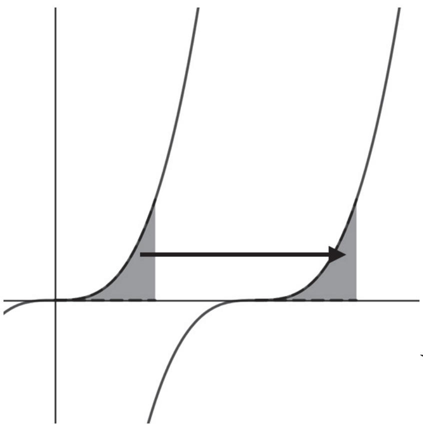
이런 그래프를



이렇게 적분할 수 있죠.

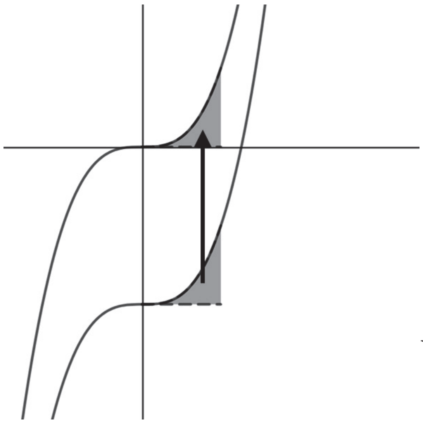
직사각형의 넓이를 구하면 되는 걸로 바뀌는 거예요.

또한 적분은 평행이동에도 적용할 수 있습니다. 평행이동되더라도 넓이는 같다는 점을 이용하는 거죠.



왼쪽의 그래프를 평행이동한 것이 오른쪽의 그래프입니다. 이 두 넓이는 다를까요? 단순히 옆으로 옮긴 것이라 다르지 않습니다.

위로 옮긴 함수도 마찬가지입니다.



넓이가 다르지 않아요. 이걸 이용하면 더욱 편하게 적분을 할 수 있습니다.

이러한 것들을 이용해서 정적분의 위끝과 아래끝을 0에 가까운 수로 바꾸면 계산이 매우 편해집니다. 숫자가 클수록 정적분 계산하기는 더 까다로워지겠죠? 0이면 너무 좋구요.

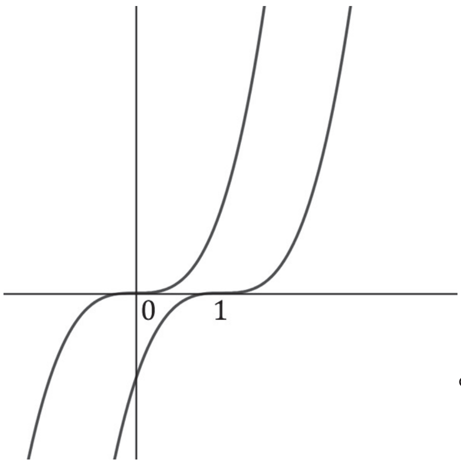
예제 1

$f(x) = x^3$일 때, $f(x)$와 $f(x-1)$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

해설

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

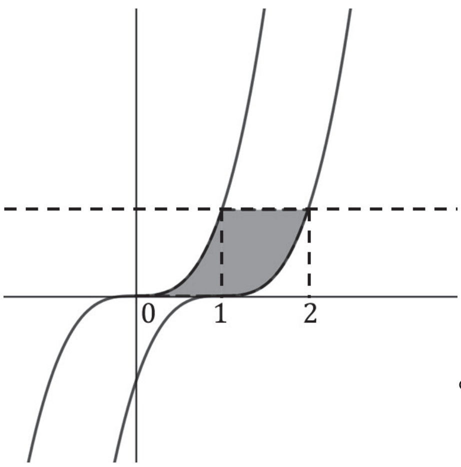
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 $x=0$에서 접하면서 방향 그대로 지나가는 함수이고 $f(x-1)$는 그런 $f(x)$를 x축 방향으로 1만큼 평행이동한 함수에요. 그래프를 그려보면



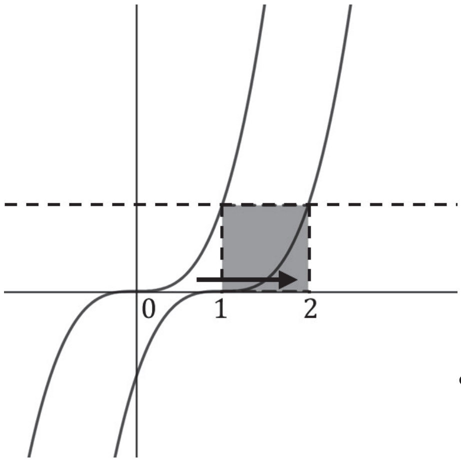
이렇게 그려지네요.

2) 문제해석

$f(x)$와 $f(x-1)$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 부분을 색칠해보면



이렇게 색칠되네요. 그런데 $f(x-1)$는 $f(x)$를 x축 방향으로 1만큼 평행이동한 함수이므로



이렇게 옮길 수가 있어요. 따라서 그냥 한 변의 길이가 1인 정사각형 넓이 구하면 돼요. 따라서 $f(x)$와 $f(x-1)$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이$=1$이 되겠네요.

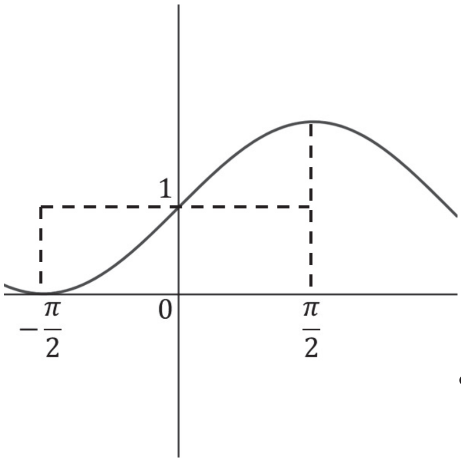
예제 2

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) + 1 dx$의 값을 구하시오.

해설

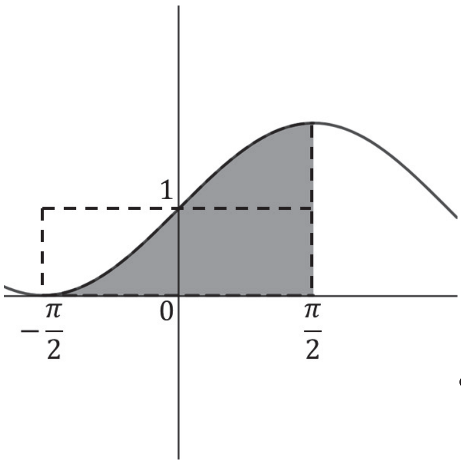
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $(\sin x)+1$부터 그려볼까요?

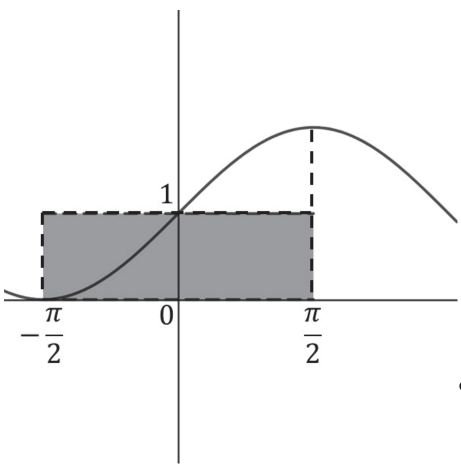


이렇게 그리면 되겠네요.

제 의도는 진짜로 적분을 하라는 게 아니에요. 함수의 특성을 이용하는 거죠. $\sin x$의 특징은 원점 대칭이죠? 그 함수를 y축 방향으로 $+1$만큼 올린 함수는 점 $(0,\ 1)$ 대칭이겠죠?



이 부분을 적분하는 거예요. 그런데 아까 $(\sin x)+1$는 점$(0,\ 1)$ 대칭이라고 했죠? 그렇다면



이렇게 넘길 수가 있죠? 그러면 그냥 한 변의 길이는 π, 다른 한 변의 길이는 1인 직사각형의 넓이를 구하면 되겠네요. 답은 π입니다.

예제 3

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 x좌표를 작은 순서대로
α, β라 하자. 일차함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는
서로 다른 세 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표를 a,
가장 큰 점의 x좌표를 b라 하면, $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을
만족시킨다.

(가) $\alpha+\beta=4=f(\alpha)+f(\beta)$
(나) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx=8$

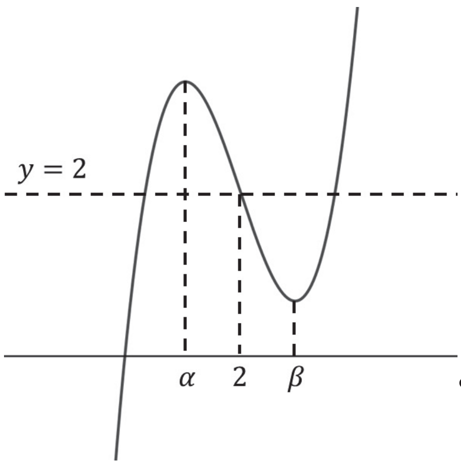
$f(5)-g(5)$의 값을 구하시오.

해설

1) 문제해석, 조건해석

일단 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있답니다. $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 x좌표를 작은 순서대로 α, β라 하자고 하네요. 일단 극점 두 개가 있고 그래프는 대략 예상이 가죠?

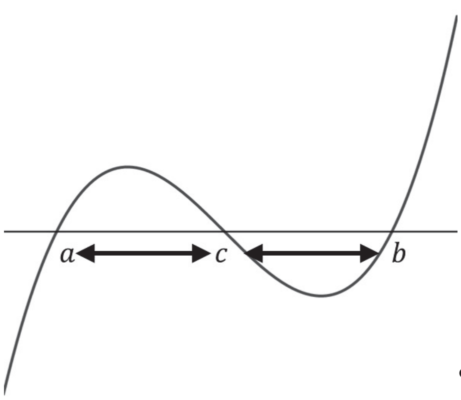
(가)조건 보이죠? $\alpha+\beta=4=f(\alpha)+f(\beta)$이라네요. 양변에 2를 나눠볼까요? $\frac{\alpha+\beta}{2}=2=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$가 되네요. $\frac{\alpha+\beta}{2}$는 극점의 x좌표들의 중점이죠? 그리고 $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$는 극점의 y좌표들의 중점이구요. 이게 모두 2라는 건 극점들의 중점이 $(2,\ 2)$라는 거네요? 다시 말해 변곡점이 $(2,\ 2)$라는 거네요. 대략적으로 그래프 좀 그려봅시다.



이렇게 그리면 되겠네요.

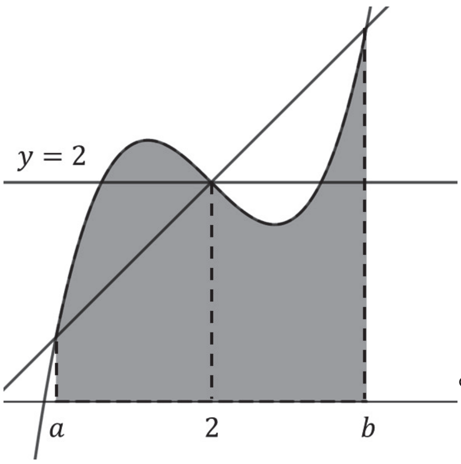
(나)조건을 보면 a부터 b까지 $f(x)$와 $g(x)$의 적분값이 같고 그 값이 8이네요. 아까 $g(x)$와 $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 가장 작은 점의 x좌표가 a, 가장 큰 점의 x좌표가 b라고 했었죠? 저 그림에다가 직선을 그어서 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 가장 작은 점의 x좌표가 a, 가장 큰 점의 x좌표가 b라고 하고 a부터 b까지 적분했는데 그 적분값이 같으려면 어떻게 직선을 그어야 할까요? 어려우면 이렇게 한 번 생각해볼까요?

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$여기서 우변을 왼쪽으로 넘겨봅시다. 그러면 $\int_a^b f(x)-g(x)dx=0$이 되죠? $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 서로 다른 점이 세 개라고 했으니까 그 세 점 중 x좌표가 두 번째로 큰 점의 x좌표를 c라고 해봅시다. $f(x)-g(x)$는 차함수에 의해 $(x-a)(x-c)(x-b)$라고 할 수 있겠죠? 이 함수를 a부터 b까지 적분한 값이 0이 되려면 c값을 어떻게 조정해야 할까요?

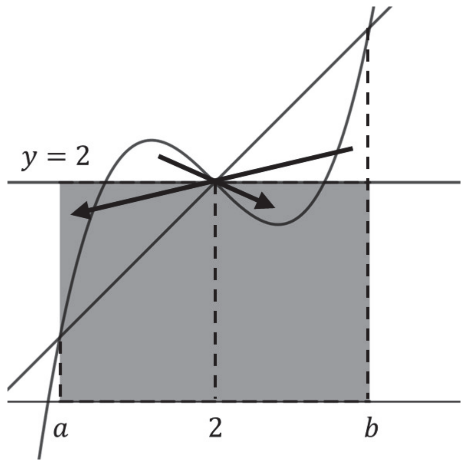


이렇게 c가 a와 b의 중점이 되도록 해야 하지 않을까요? 다시 말해 $g(x)$가

$f(x)$의 변곡점인 $(2,\ 2)$를 지나야 한다는 말이죠. 그런데 $g(x)$는 직선이니까 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점인 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ f(b))$도 역시 중점은 $(2,\ 2)$이죠? $f(x)$는 점 $(2,\ 2)$ 대칭이고 $g(x)$도 역시 점 $(2,\ 2)$ 대칭이니까요. 그렇다면 구하는 부분은



이건데 →



이렇게 바꿀 수 있겠죠? 그니까 $2(b-a)$가 되겠네요. 이게 8이니까 $b-a=4$입니다. 아까 a와 b의 중점이 2라고 했었죠? 따라서 $a+b=4$이니까 $a=0,\ b=4$가 됩니다. 어라? $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점의 x좌표가 $0,\ 2,\ 4$네요?

2) 함수 구하기 - 차함수

$f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점의 x좌표가 $0,\ 2,\ 4$이니까 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $h(x)$는 $x,\ (x-2),\ (x-4)$라는 인수를 적어도 하나 가지는데 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이니까

$f(x)-g(x)=h(x)=x(x-2)(x-4)$가 되네요. $f(5)-g(5)=h(5)=15$입니다.

참고 ! 평행이동과 적분!

그래프를 잘 관찰하면 적분의 양이 엄청나게 줄어드는 걸 잘 보여주는 예시가 바로 평행이동입니다. 잘 보세요. $\int_{a}^{b} f(x)dx$를 미적분의 기본정리로 바꾸면 $[F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$이 되죠? 만약 이때 $\int_{0}^{b-a} f(x+a)dx$를 구하라고 한다면 당황하지 말고 미적분의 기본정리를 사용해보세요. $[F(x+a)]_{0}^{b-a} = F(b) - F(a)$가 되죠. 똑같잖아요? 아 그러면 $\int_{0}^{b-a} f(x+a)dx$를 $\int_{a}^{b} f(x)dx$로 바꿔도 되겠구나! 하고 바꾸시면 됩니다. 이걸 일반화시켜보면 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{0}^{b-a} f(x+a)dx = \int_{a+b}^{2b} f(x-b)dx$등으로 다양하게 변형시킬 수 있어요. 이해 되죠? 예제 하나 풀어봅시다.

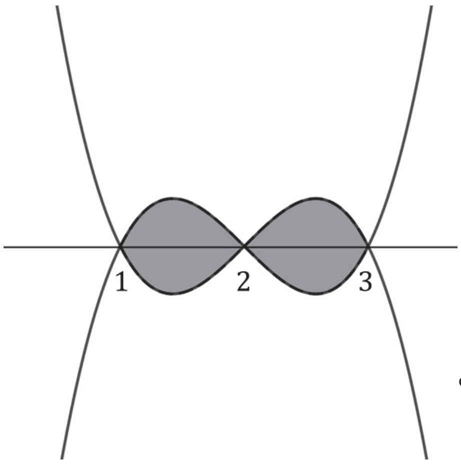
예제 1

함수 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$에 대하여 $f(x)$와 $f(4-x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

해설

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$가 있는데 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하랍니다. 그냥 $f(x)$에 x 대신 $4-x$를 넣어서 $f(4-x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$으로 만들어도 됩니다. 그런데 $f(x)$와 $f(4-x)$는 서로 $x=2$축 대칭 관계에 있잖아요? 그걸 이용해서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$를 먼저 그리고 대칭시켜서 $f(4-x)$를 그려도 됩니다. 뭐 아무튼 그려보면



이렇게 됩니다.

2) 정적분 관찰

저거 근데 잘 보면 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 사실상 $4\int_1^2 f(x)dx$와 같은 것 아닌가요? 왜냐면 $f(4-x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$는 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$에 $(-)$만 곱한 거니까 $f(x)$와 $f(4-x)$는 $x=2$축 대칭이기도 하지만 x축 대칭이기도 하잖아요. 거기에 $f(x)$는 x축과 만나는 점의 간격이 모두 같으니까 중점인 점 $(2,\ 0)$ 대칭이구요.

그런데 $\int_1^2\{(x-1)(x-2)(x-3)\}dx$는 사실상 $\int_{-1}^0\{x(x-1)(x+1)\}dx$와 같습니다.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이니까 $f(x+2)=x(x-1)(x+1)$이죠? $\int_1^2 f(x)dx=[F(x)]_1^2=F(2)-F(1)$인데 $\int_{-1}^0 f(x+2)dx=[F(x+2)]_{-1}^0=F(2)-F(1)$로 같잖아요.

그리고 $\int_{-1}^0\{x(x-1)(x+1)\}dx$는 $-\int_0^1\{x(x-1)(x+1)\}dx$와 같습니다. $x(x-1)(x+1)=x^3-x$는 기함수니까요. 그래프 그려서 확인해보세요. 계산해보면 $-\int_0^1(x^3-x)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$입니다. 여기에 4를 곱하면 $f(x)$와 $f(4-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이네요.

01 2014학년도 예비 26

함수 $y=4x^3-12x^2+8x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

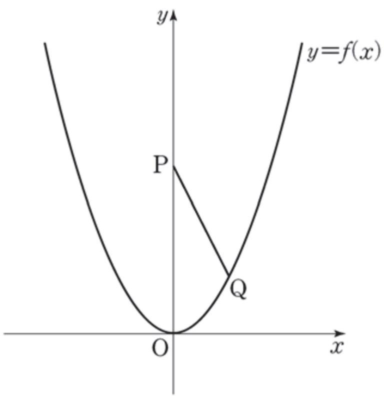
02 2014학년도 수능 08

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ 11 ⑤ $\frac{34}{3}$

03 2016학년도 수능 13

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자.



$n=1$일 때, 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{19}{12}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

04 2020학년도 수능 26

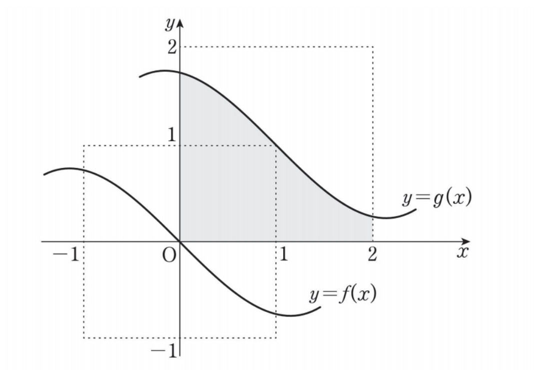
두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\quad g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

05 2019년 10월 13

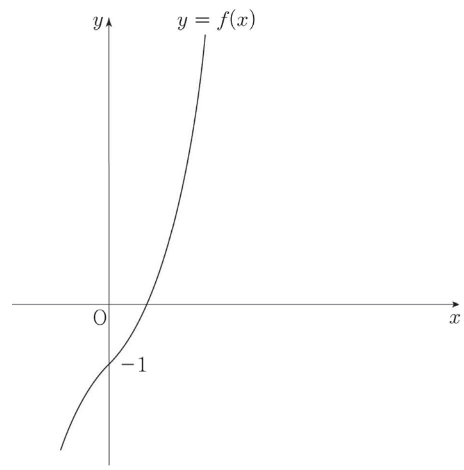
그림은 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 인 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수 $y=g(x)$ 의 그래프이다. $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은?



① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

06 2012년 7월 21

함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{1}^{9} g(x)dx$의 값은?



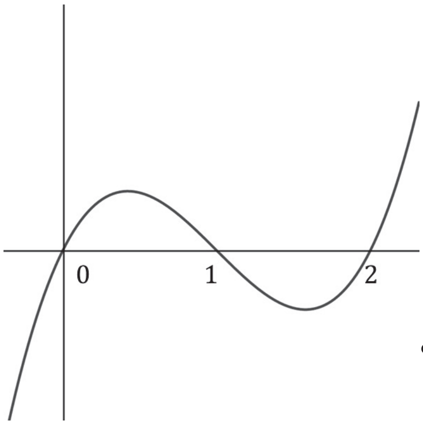
① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$ ④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

정적분 관찰

01 정답 2

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 저거 함수 좀 그려볼까요? 인수분해는 $4x(x-1)(x-2)$이니까 x축과 $x=0,\ 1,\ 2$에서 그냥 만나네요. 대충



이렇게 됩니다. 저 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)dx+\int_1^2(-4x^3+12x^2-8x)dx$ 이죠?

그런데 이거 다 계산해야 하나요? 잘 생각해보세요. 저 그래프 지금 변곡점이 $(1,\ 0)$아닌가요? 그러니까 점 $(1,\ 0)$대칭이라는 거예요. 그러면 $\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)dx=\int_1^2(-4x^3+12x^2-8x)dx$ 이잖아요. 0부터 1까지 적분한 거랑 1부터 2까지 적분한 거랑 부호만 다르지 절댓값은 같잖아요. 따라서 우리가 구하는 건 $2\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)dx$ 입니다. 계산해볼게요.

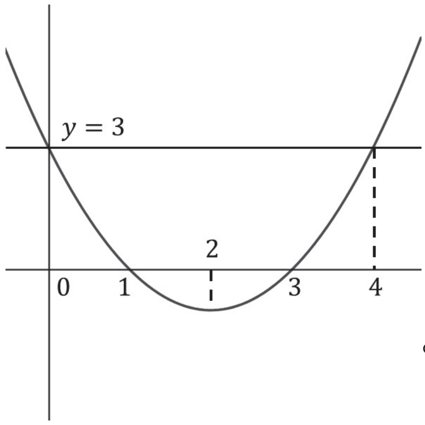
$2\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)dx=2\left[x^4-4x^3+4x^2\right]_0^1=2$이네요.

02 정답 ③

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$y=x^2-4x+3$와 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하랍니다. 일단 그래프부터 그려보죠. 인수분해는 $(x-1)(x-3)$이니까 x축과 $x=1,\ 3$에서 그냥 만납니다. 축은 $x=2$이네요.

$y=3$과 만나는 점도 찾아봅시다. $x^2-4x+3=3$라 하면 $x^2-4x=x(x-4)$이니까 $y=3$과 $x=0,\ 4$에서 그냥 만납니다.



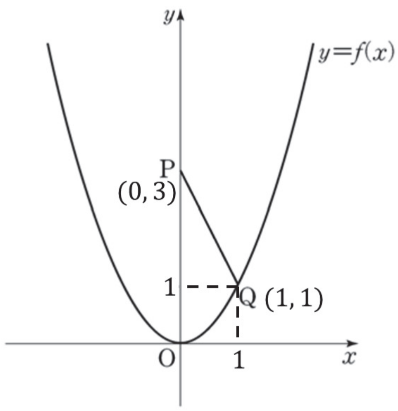
이렇게 됩니다. 둘러싸인 부분 보이시죠?

이걸 어떻게 구해야 할까요? 잘 생각해보세요. $y=x^2-4x+3$과 $y=3$가 둘러싸인 부분은 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 부분과 같지 않나요? 저 그래프에서 $y=x^2-4x+3$와 $y=3$모두 3만큼 아래로 내려보세요. 평행이동해도 넓이는 변하지 않잖아요. 그럼 공식 쓸 수 있겠네요. $\frac{1}{6}\times(4-0)^3=\frac{32}{3}$입니다. 답은 ③번이네요.

03 정답 ③

1) 그림 있으면 그림 보면서

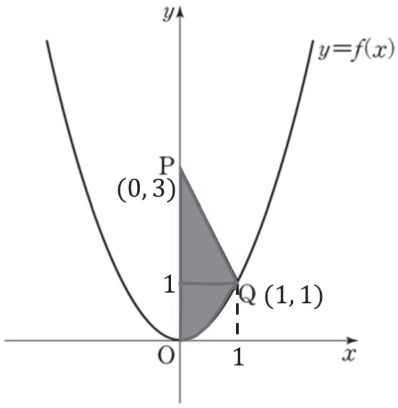
그림에다가 다 표시해봅시다. $n=1$이니까 $f(x)=x^2$이고 $\mathrm{P}(0,\ 3)$이죠? 그리고 y좌표가 1인 Q의 x좌표는 $x^2=1$해서 $x=1$이구요. $\mathrm{Q}(1,\ 1)$입니다. 다 표시해볼게요.



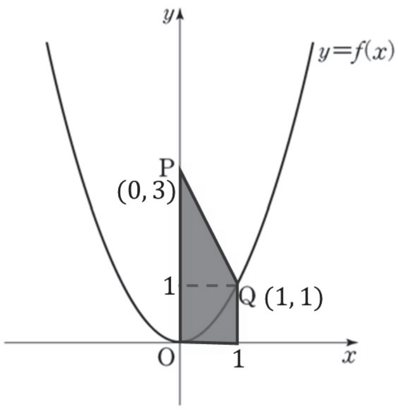
이렇게 되네요.

2) 정적분 관찰

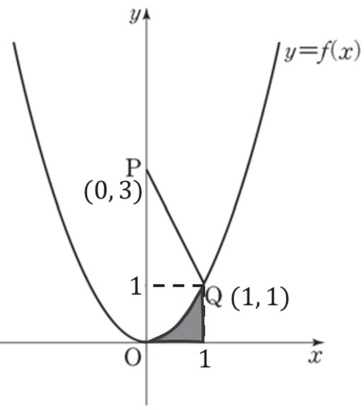
그리고는 선분 PQ와 $y=f(x)$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라고 합니다.



요 부분이죠? 저 파란색의 도형은 결국



요 사다리꼴에서



이 부분을 뺀

거잖아요. 일단 사다리꼴부터 구해봅시다. $\frac{1}{2}\times(3(\text{밑변})+1(\text{윗변}))\times 1(\text{높이})=2$이네요.

오른쪽 그림의 저 부분을 구해봅시다. 저 부분은 $f(x)$를 0부터 1까지 적분한 부분이네요. 따라서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$입니다. 구하는 부분은 $2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$이고 답은 ③번입니다.

04 정답 14

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

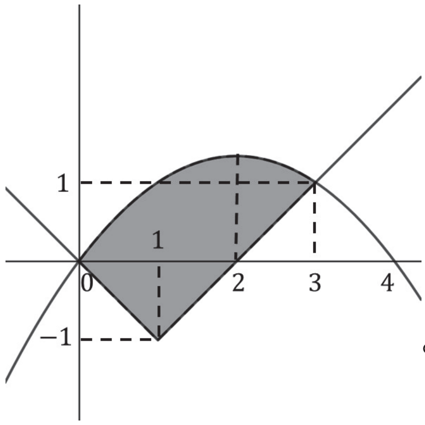
$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$와 $g(x)=|x-1|-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라고 합니다. 어... 이건 그려봐야

알겠는데요? 일단 $f(x)$는 x축과 0, 4에서 만나고 축은 $x=2$입니다. $g(x)$는 절댓값을 벗기면

$g(x)=\begin{cases}-x & (x<1)\\ x-2 & (x\geq 1)\end{cases}$입니다. $(1,\ -1)$를 기준으로 V자가 되는 그래프네요.

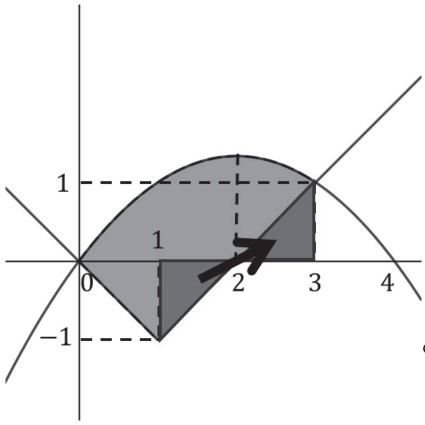
두 그래프가 만나는 점도 구해봅시다. $x=0$에서 만나구요, 그리고 $x\geq 1$에서 $\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$하면

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$이고 $x=3$입니다. $(3,\ 1)$에서 만나는군요.



이렇게 됩니다. 저 보라색 부분을 구하면 되겠네요.

2) 정적분 관찰



이렇게 옮기면 우리가 구하는 건 $\int_{0}^{3} f(x)dx$에 아래쪽에 남은 정삼각형 하나를 더한 게 되겠네요. $\int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{0}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)dx = \left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2\right]_0^3 = 3$이구요. 정삼각형은 한 변의 길이가 1이니까 $\frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$이네요. 더해서 $3+\frac{1}{2} = \frac{7}{2} = S$입니다.

아니면 이렇게 해도 돼요. 저 아래에 정삼각형 두 개는 냅두고 $\int_{0}^{4} f(x)dx$에서 저 그림의 정삼각형 하나와 $\int_{3}^{4} f(x)dx$를 빼는 거죠. 그런데 지금 $\int_{0}^{4} f(x)dx$는 공식을 써도 되잖아요? $f(x) = \frac{1}{3}x(4-x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이니까요. 따라서 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times(4-0)^3 = \frac{32}{9}$입니다.

그리고 아래에 보라색 정삼각형 두 개를 합친 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 1 = 1$이네요. 파란색 정삼각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$이구요.

이제 마지막 $\int_{3}^{4} f(x)dx$이에요. 그런데 굳이 3부터 4까지 적분해야 할까요? 잘 보세요. $f(x)$는 $x=2$축에 대하여 대칭이에요. 그 말은 $\int_{3}^{4} f(x)dx$와 $\int_{0}^{1} f(x)dx$가 같다는 말이죠. 축에 대하여 대칭시킨 부분이잖아요. 따라서 $\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)dx = \left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{9}$입니다. 구하는 부분은

$1-\frac{1}{2}+\frac{32}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7}{2}=S$이네요. $4S=14$입니다.

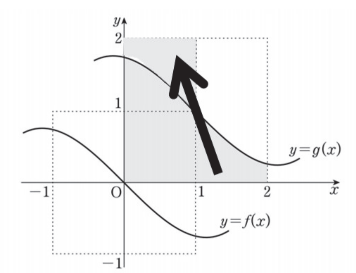
05 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서, 문제해석

$f(-x)=-f(x)$인 연속함수 $f(x)$가 있어요. 이거 기함수죠? 원점 대칭이고 $f(0)=0$입니다. 이걸 x축 방향으로 1만큼 y축 방향으로 1만큼 평행이동시켜서 그림과 같은 $\int_0^2 g(x)dx$를 구하랍니다.

방금 전에 뭐라고 했었죠? $f(x)$는 $(0,\ 0)$에 대하여 대칭이라고 했어요. 함수를 평행이동하면 대칭점이 사라지나요? 그대로 움직여요. 그러니까 $g(x)$는 $(1,\ 1)$대칭이라는 거죠.
그게 무슨 상관이죠? 적분은 대칭과 굉장히 많은 연관성이 있어요. 그림을 잘 보세요.

2) 정적분 관찰

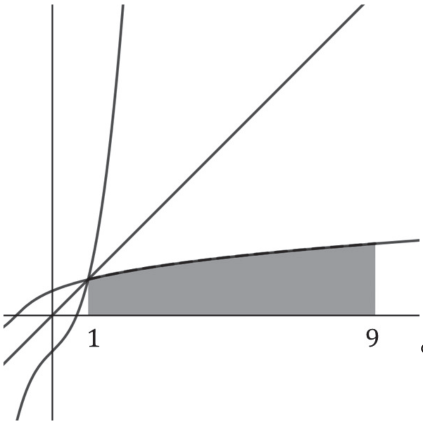


이거 이렇게 옮기면 직사각형이 되잖아요. 점 $(1,\ 1)$에 대하여 대칭이니까 대칭되는 부분에 있는 정적분값은 서로 바꿀 수가 있어요. 따라서 $\int_0^2 g(x)dx$는 직사각형의 넓이 $2\times1=2$입니다. 답은 ②번이네요.

06 정답 ③

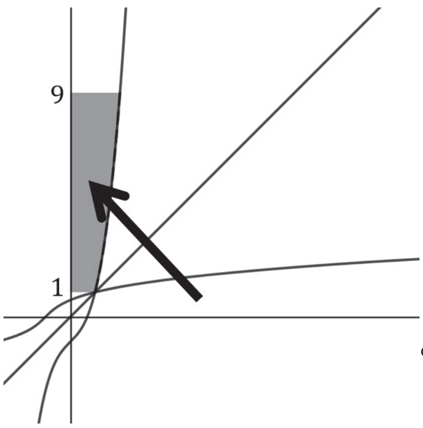
1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

뭐 별 내용 없네요. $f(x)=x^3+x-1$의 역함수가 $g(x)$인데 $\int_1^9 g(x)dx$를 구하래요. 어? 역함수를 적분하라구요? 역함수 적분하는 거 안 배웠는데... 뭐 일단 함수가 있으니까 그려봅시다. $f(x)$는 그려져 있고, $y=x$를 그린 다음에 대칭 시키면



이렇게 됩니다. $\int_1^9 g(x)dx$는 저 색칠한 부분의 넓이네요.

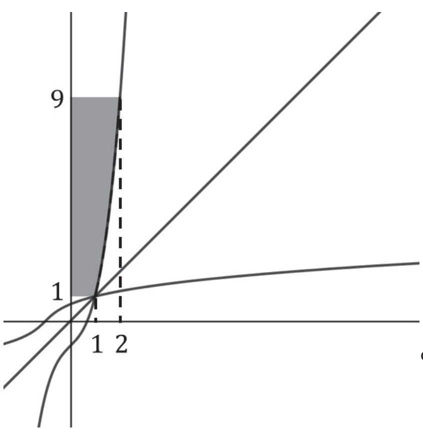
아니 근데 저걸 어떻게 구해요? 식도 모르는데. 역함수를 적분하라고 제가 문제를 가져왔을까요?
잘 생각해보세요. $g(x)$는 $f(x)$를 $y=x$대칭한 함수라니까요? 그러면 그대로 대칭한 곳을 적분해도 값이 같아지겠죠!



이렇게 이동할 수 있어요. 이러면 저 부분을 구할 수 있어요.

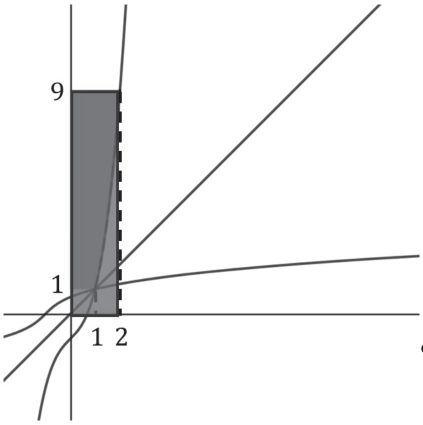
일단 $y=9$와 $y=x^3+x-1$가 만나는 점부터 구해봅시다. $x^3+x-1=9$이고
$x^3+x-10=(x-2)\left(x^2+2x+5\right)=0$이니까 $x=2$이네요.

그리고 $y=1$과도 만나는 점을 구해볼게요. $x^3+x-1=1$이고 $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$이니까
$x=1$입니다. 그래프는



이렇게 됩니다.

이렇게 되면 우리가 구하는 부분은



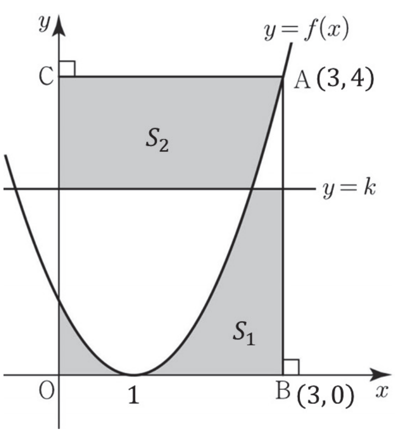
이 직사각형에서 $\int_1^2 f(x)dx$를 빼고 한 변의 길이가 1인 정사각형을 빼면 되겠네요.

직사각형의 넓이는 $2\times9=18$입니다. 그리고 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이구요. 그리고 $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^3+x-1)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = \frac{17}{4}$ 입니다. 그러면 우리가 구하는 부분의 넓이는 $18-1-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$ 이네요. 답은 ③번입니다.

07 정답 ③

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림에 거의 다 표시되어 있네요. 나머지 조건을 다 표시해봅시다.



이 정도 표시하면 될 것 같아요. $S_1=S_2$인데 k를 구하라고 합니다.

그림에 표시되어 있듯이 S_1과 S_2가 있는데 이 둘의 값이 같다구요? 음...

S_1과 S_2가 같다고 했죠? 그러면 S_1과 S_2각각에 똑같은 영역을 추가해도 둘이 같은 건 변하지 않겠네요? 그러니까