제 2교시

2021학년도 대학수학능력시험 대비 秀 모의고사 3회

수학 영역 (가형)

성명	

수험 번호					-				

○ 자신이 선택한 유형(가형/ 나형)의 문제인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

넌 머지않아 예쁜 꽃이 될 테니까

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

메가스터디학원

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{\log_2 3 \times \log_3 256}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{x^2}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$\mathrm{P}(A^C \cap B) = 2\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은?

(단, A^C은 A의 여사건이고, $\mathrm{P}(A^C) \neq 0$이다.) [2점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{n^2+1}{2n^2} \right) = 2021$일 때, $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{1}{a_n} \right)$의 값은? [3점]

① 4 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

5. 연속확률변수 X가 가지는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$가 연속함수일 때, 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_{x}^{4} f(t)dt$라 하자. $F(1)=\frac{1}{2}$, $F(2)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(1 \le X < 2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

6. $\int_{e}^{e^9} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

7. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 함수

$x=\ln t$, $y=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2-9t$에서 $\frac{dy}{dx}$는 $t=a$에서 극값 b를 가질 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -24 ② -23 ③ -22
④ -21 ⑤ -20

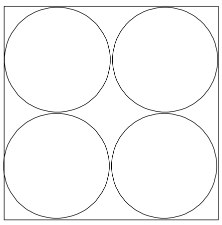
8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}{}^2 = a_n \times a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n-2}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 12 ④ 24 ⑤ 48

9. 그림과 같이 정사각형과 정사각형에 내접하면서 서로 접하고 크기가 같은 원 4개가 있다. 원의 내부 또는 정사각형의 내부에 만들어지는 13개의 영역에 서로 다른 13가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 모든 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① $\frac{13!}{6}$ ② $\frac{13!}{5}$ ③ $\frac{13!}{4}$ ④ $\frac{13!}{3}$ ⑤ $\frac{13!}{2}$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{3}{4-a_n},\ \sum_{k=1}^{n}a_k=na_n$$

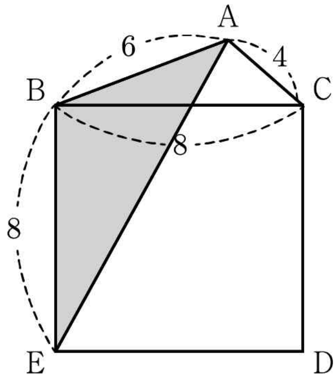
을 만족시킬 때, 서로 다른 모든 a_1의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 직선 $y=-\frac{4}{3}x+k$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는 실수 k의 값에 관계없이 항상 5이다. 곡선 $y=f(x)$가 x축, y축과 만나는 점을 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [3점]

① $\frac{163}{81}$ ② $\frac{164}{81}$ ③ $\frac{55}{27}$ ④ $\frac{166}{81}$ ⑤ $\frac{167}{81}$

12. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 사각형 BEDC가 정사각형이 되도록 두 점 D, E를 잡을 때, 삼각형 ABE의 넓이는?
[3점]



① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

13. 표준편차가 25인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36, 144, n인 표본을 임의추출한 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 각각 $a \le m \le b$, $b \le m \le c$, $a \le m \le c$이다. $n \times (c-a)$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [3점]

① 98 ② 196 ③ 294 ④ 392 ⑤ 490

14. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \ln\left(\frac{p}{\csc x + \cot x}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{g(x) - \frac{\pi}{3}} = q$이다.

두 상수 p, q의 곱 $p \times q$의 값은? [4점]

① e ② $\frac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\frac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

15. 1보다 큰 세 양의 실수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\log_a c$의 값은? [4점]

(가) $\log_a b+\log_b c+\log_c a=\dfrac{47}{10}$

(나) $\log_a c+\log_c b+\log_b a=\dfrac{59}{10}$

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

16. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1}=n^2a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3\cdots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{n+1} \qquad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}-\frac{k}{k+1}$이다.

$n=k+1$일 때,

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}-\frac{k}{k+1}+a_{k+1}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}-\frac{k}{k+1}+\boxed{\text{(가)}}\times a_k$$

이다.

$$\boxed{\text{(가)}}\times a_k=\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}\times\frac{(k-1)^2}{k(k+1)}\times\cdots\times\frac{1^2}{2\times3}\times a_1$$

이므로

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}-\frac{k}{k+1}+\boxed{\text{(나)}}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}-\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}-\boxed{\text{(다)}}$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i^2}-\frac{k+1}{k+2}$$

이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위에 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $f(2)+g(2)+h(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{2}{9}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{4}{9}$ ⑤ $\dfrac{5}{9}$

17. 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 네 수 중 어떤 세 수의 합이 3의 배수인 경우가 존재할 확률은? [4점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{43}{55}$ ③ $\frac{42}{55}$ ④ $\frac{41}{55}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 상수 a $(0 < a < \pi)$는 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a)+f(2a)+f(3a)$의 값은? [4점]

(가) 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 $f(x)=\sin x$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x+2a)=f'(x)$이다. (다) 실수 t의 값에 관계없이 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 모든 실근의 개수는 5이다.

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

19. 정육각형 ABCDEF의 꼭짓점 A에 점 P가 있다.
1부터 18까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 18장의 카드가 들어 있는 주머니에서 한 장의 카드를 꺼내어 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는다. 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 3의 배수이면 점 P가 나온 수만큼 꼭짓점을 따라 시계 방향으로 이동하고, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 3의 배수가 아니면 점 P는 이동하지 않는다. 이와 같은 시행을 n번 반복한 후 점 P가 점 A에 있을 확률을 p_n이라 하자. 수열 $\{p_n\}$이 $p_{n+1}=a\times p_n+b$를 만족시킬 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

20. 함수 $f(x)=e^{\cos x}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2\pi-x)$이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $g(n\pi)=ng(\pi)$이다.
ㄷ. $\int_\pi^{5\pi} xf(x)dx=\int_\pi^{5\pi} g(x)dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)=e^x+x^2-x-1$과 양의 실수 s에 대하여

함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x t\{f'(x-t)-s\}dt$라 하자.

$F'(x)$가 $x=a$에서 최소일 때, 실수 a의 값을 $g(s)$라 하자.
양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(s)$에 대하여
$\int_{f'(1)}^{f'(10)} \frac{3\{g(s)\}^2}{e^{g(s)}+2}\,ds$의 값은? [4점]

① 995 ② 996 ③ 997
④ 998 ⑤ 999

단답형

22. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\ln(5x-4)^x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_2(x-6)} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(x+6)}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

25. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

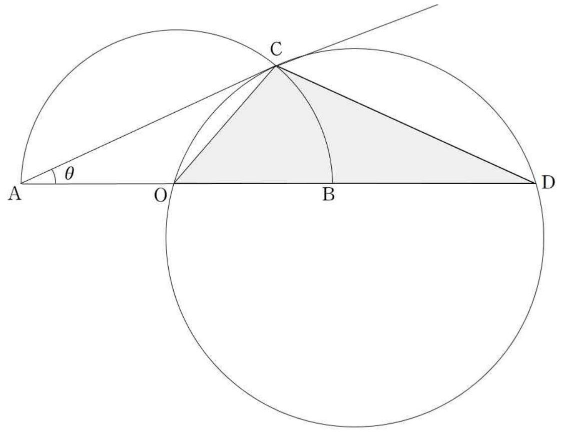
(가) $f(0)=0$, $f(1)=1$ (나) $0<x<1$인 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은 p일 때, $100p$의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 사람 A와 B가 각각 동전 한 개를 동시에 던지는 시행을 한다. 이 시행에서 앞면이 적어도 하나 나오면 A가 2점을 얻고, 그렇지 않으면 B가 3점을 얻는다. 이와 같은 시행을 16번 반복한 후 A가 얻는 점수를 X, B가 얻는 점수를 Y라 할 때, $\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(Y^2)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 자연수 n에 대하여 $m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 m의 값을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=1$이고 $a_3=2$일 때, $\sum_{k=1}^{420}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 $\angle\text{CAB}=\theta$가 되도록 잡는다. 점 O를 지나고 직선 AC와 점 C에서 접하는 원이 직선 AB와 만나는 점 중 점 O가 아닌 점을 D라 하자. 삼각형 OCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [4점]



29. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,7\}$로의 함수 $f:A\rightarrow B$ 중에서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=16$을 만족시키는 모든 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 6인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{\cos x} f(t)\,dt$$

라 하자. $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소이고, $a \geq 0$인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ a_3\cdots$ 라 할 때, 다음 조건이 성립한다.

(가) $a_6-a_2=\dfrac{3}{2}\pi$

(나) $f'(0)\leq 0$

$g(0)$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항 ※
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.