2021 EBS 수능완성 선별 20 . 11 Ver.

제작 : 김기대 T

<안내사항>

1. EBS는 최근 체감연계율이 매우 높아졌기 때문에, 전문항 1회독 후 선별문항 2회독 이상 하길 추천합니다.

2. 본 파일은 EBS를 한 번도 보지 않은 학생들을 기준으로 선별되었습니다.
따라서 EBS를 전문항 1회독을 한 학생들은 별표 (중요도)가 3개 이상인 문제들만 보아도 좋습니다.

<중요도 관련 안내>

※ 문항의 절대적 난이도와 중요도는 상관관계가 없습니다.
3점짜리 쉬운 문제여도 신박한 표현이나 완성도 높은 문항은 上등급,
4점짜리 매우 어려운 문제여도 수능스럽지 않은 문항은 下등급을 부여했습니다.

※ 선별 기준 및 별표 등급 안내
선별 기준: 타 교재에서 흔히 볼 수 있고 쉬운 문제는 선별에서 제외, 흔한 문제지만 중요한 문제는 선별.

★등급, ★★등급)
수능 연계 가능성이 적거나 흔한 문제.

★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 약간 보이는 문항, 시중 퀄리티를 보이는 문항

★★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 꽤 높아보이는 문항

★★★★★등급)
자체적으로 완성형인 문제. (=탈 EBS 퀄리티 문항)
오히려 이 완결성 때문에 직접연계가 아닌 간접연계가 돼야하는 아이러니함을 가진 문제.

<주의사항>

1. 본 파일은 수작업한 파일이므로, 간단한 오타와 순서 뒤틀림 등이 있을 수 있습니다.
정오사항을 말씀해주시면 신속히 공지하겠습니다. (Comment에서의 문법적인 오타도 있지만, 작업량이 너무 많아 적당한 건 넘어갔습니다. 맏춥뻡이 아시운 브븐이 이써도 바주도록 하쟈.)

2. 문항을 제외한 *Comment에 대한 인용* 은 저자 외에 불허합니다.

<자료 활용법>

4 **수학 영역(가형)** 홀수형

7. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

> (가) $a+b+c+d=8$
> (나) a는 홀수이다.
> (다) $c \ge d$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

중요도	★★★★★	쪽번	028 001	문항코드	20009-0051

기대T Comment

전형적으로 '출제자'와 '해설자'가 달라서 생긴, 문제의 가치를 교재 스스로가 깎아버린 아쉬운 문제이다.
해설지대로 풀면 절대 1등급의 눈을 가졌다고 자부할 수 없다. 이번 10월 교육청에서도 나온, 대칭성을 적극적으로 활용할 수 있어야한다.

(가), (나)는 전제조건이라고 하자. $c > d$인 경우의 수와 $c < d$인 경우의 수는 같기 때문에, 전체 경우의 수에서 $c = d$인 경우의 수를 빼고 반띵을 하면 구할 수 있다. 따라서 전체 경우의 수를 m 이라 하고 $c = d$인 경우의 수를 n 이라고 하면, 정답은 $\frac{m-n}{2}+n=\frac{m+n}{2}$ 이다.

이것만큼은 반드시 이해하고 들어가자. 최근 3개년간 확통에서의 대칭성이 많이 쓰였다. (대부분 풀이들이 논리 없이 '이렇게 하면 정답 나오니까 알아둬라~'라고 푼 풀이들이라 수학전공자로써 안타깝ㅠㅠ)

이번 가형 10월 교육청 29번에서도 비슷한 논리가 쓰였는데, 다음 페이지 칼럼에서 대칭성 꽉 잡고 가기로 하자.

<확률과 통계 칼럼 - 대칭성>

본 칼럼은 내년에 출판될 기대T의 실전개념서에 들어가는 내용으로, 함부로 훔쳐 쓰면 큰일나요 ^-^

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a < b < c \le 20$
> (나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

위 문제는 이번 10월 교육청 가형 29번에 있는 문제이다.
나형에는 다른 문제가 대체되어 나왔으므로 문과 친구들은 읽기 전에 풀어보도록 하고, 이 문제를 풀어본 이과 친구들 역시 다시 한 번 풀어보도록 하자. 내 생각엔 10명 중 8명은 비효율적인 방법으로 풀었을 것이라 생각하고, 효율적인 방법을 찾은 나머지 2명 마저도 이 중 1명은 논리가 빈약할 것이라 생각한다.

자, 그럼 풀이 스타트!

(가)에 의하여 a, b, c는 20이하의 자연수이다.
또한 (가), (나)에 의하여 $a < b < c < a+b$ 이다. (삼각형의 결정조건 물론 $a < b+c$, $b < c+a$ 도 만족시켜야하지만, (가)의 조건식 때문에 쉽게 만족시킴을 알 수 있다.)

여기서 주목할 식은 $c < a+b$이다. 이 식을 포함하여, 비슷한 식 3개를 써 보겠다.
① $a < b < c$ 이면서 $c < a+b$
② $a < b < c$ 이면서 $c > a+b$
③ $a < b < c$ 이면서 $c = a+b$

우오오오오오오! ①, ②가 부등식 방향만 다르니까 대칭적이에오오오오오!

... 그렇다. 그렇게 하면 정답은 나온다.
근데, 이렇게 풀면 논리부족이다. 왜냐면 ①~③ 의 조건 말고도 $a < b < c$의 조건이 있기 때문이다.

직관적으로 생각해보면, c보다 작은 a, b를 더한 $a+b$란 값은 c보다 클 확률보다는 작을 확률이 좀 더 높아보이는게 일반적인 직관이다. (아니면 그 반대거나.)

적어도 $a+b < c$인 경우와 $a+b > c$인 경우가 정확히 같을 것이라고 손목을 걸만한 직관을 가진 사람은 없을거라 생각한다.

1. 1쪽에 보통 2문제씩 문제들이 있고, 하단에 해당 문제에 대한 Comment가 있습니다.
위 문항을 직접 푼 후 읽는 것이 좋습니다.

2. 우측단에 있는 내용처럼 문항에 관련된 칼럼이나 자작문제가 실릴 때가 있습니다.
해당 칼럼/자작문제 역시 EBS 본문항을 푼 후 보시는걸 추천드립니다.

3. 배점표시 ([2점] [3점] [4점])는 무시해주시면 됩니다.

제 2 교시 수능완성 가형 수학1 모음 홀수형

5지선다형

1. $2^{a-1}=3, 6^{b+1}=96$일 때, 2^{ab}의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

중요도	★★	쪽	009	문항코드	20050-0007
		번	007		

기대T Comment
단순해보이지만 당황할 수 있는 문제.   한 식만 계속 바라보지 말고, 두 식을 계속 왔다갔다하며 볼 필요가 있다.

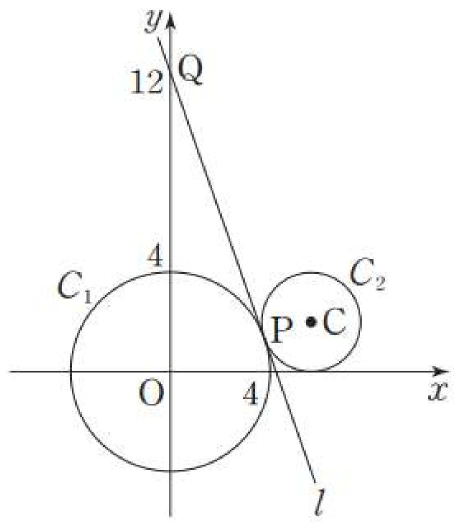
2. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^x$과 원 $C: x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{73}{36}$이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B가 원 C의 지름의 양 끝점일 때, a의 값은? [3점]

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

중요도	★★★★	쪽	013	문항코드	20050-0021
		번	021		

기대T Comment
좋은 문제. 재작년 수능기출문제가 떠오르는 문제다.

3. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2+y^2=16$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선 l과 y축이 만나는 점 Q의 y좌표는 12이다. 원 C_1과 점 P에서 접하고 x축에 동시에 접하는 원을 C_2라 하고, 원 C_2의 중심을 C라 하자.
$\tan^2(\angle CQP)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

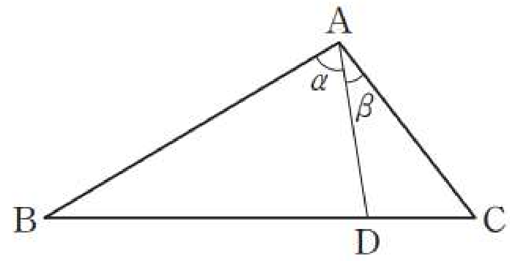


중요도	★★★★	쪽 번	025 011	문항코드	20050-0049

기대T Comment
원에 접선이 나왔을 때 해야할 행동들(원의 중심과 접점 잇고 수직표시)을 하고나서 관찰하자.

4. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle DAB=\alpha, \angle CAD=\beta$라 하자.

$\sin\beta=\frac{8}{15}\sin\alpha$일 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{q}{p}$이다. p+q의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



중요도	★★★★★	쪽 번	029 021	문항코드	20050-0072

기대T Comment
각 ADB와 각 ADC의 sin값이 같음을 주목하자. 출제 매우 유력 소재!

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

자세한 수업시간은 아래 QR코드로 확인 가능합니다.

1주차 (Basic, 한양, 건국, 동국, 과기대)	2주차 (연세, 광운+세종,중앙,이대,아주,에리카)	3주차 (인하대)

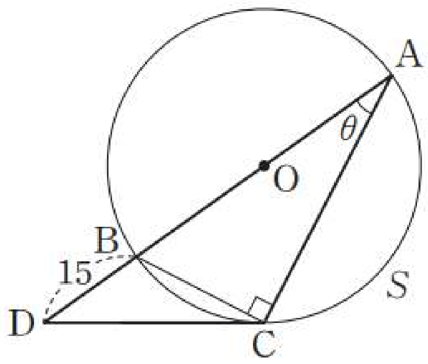
개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

5. 그림과 같이 $\angle ACB=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 빗변 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원을 S라 하고, $\angle CAB=\theta$라 하자. 원 S 위의 점 C에서의 접선이 반직선 AB와 만나는 점을 D라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

(가)	$\overline{DB}=15$
(나)	$\overline{AB}\times 5\sin^2\theta=21$

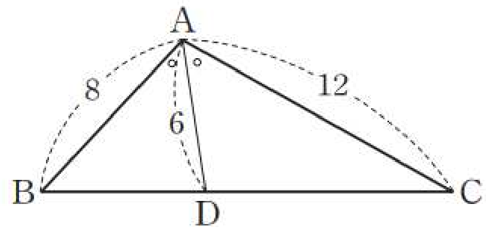


선분 DC의 길이를 구하시오.

중요도	★★★★	쪽 번	032 036	문항코드	20050-0074

기대T Comment
접현각 BCD의 존재를 잊지마시게나,,

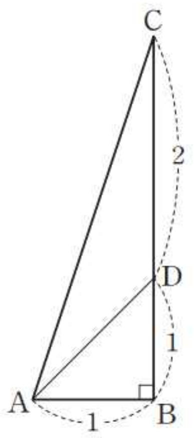
6. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=8, \overline{AC}=12, \overline{AD}=6$일 때, 선분 BC의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. [4점]



중요도	★★★★	쪽 번	032 037	문항코드	20050-0075

기대T Comment
각의 이등분선 정리 이후 두 각 ADB, ADC의 코사인값이 똑같음을 이용하여 푸는 문제. 사실, 스튜와트정리라는 유명한 공식이 있지만, 수능이 얼마 남지 않았으므로 우선 Pass

7. 그림과 같이 $B=90^\circ$ 이고, $\overline{AB}=1, \overline{BC}=3$인 직각삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자. cos(∠CAD)의 값은? [4점]



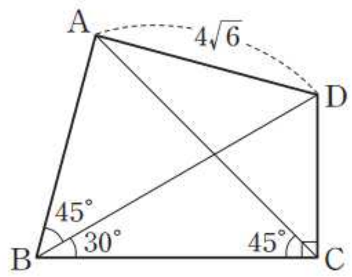
① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

중요도	★★★	쪽 번	034 041	문항코드	20050-0079

기대T Comment
코사인법칙을 쓸 것인가, 탄젠트 공식을 쓸 것인가. 그것은 묻는 것이 정한다. cos값을 묻고 있으므로, 전자의 전략을 취하자.

8. 그림과 같이 $C=90^\circ$, $AD\acute{} = 4\sqrt{6}$인 사각형 ABCD에서

$\angle ABD=45^\circ$, $\angle DBC=30^\circ$, $\angle BCA=45^\circ$ 때, 선분 BC의 길이는? [4점]



① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

중요도	★★★★	쪽 번	035 046	문항코드	20050-0084

기대T Comment
75도는 45도와 30도로 나뉠 수 있음을 항상 인지할 필요가 있다.

9. X [3점]

10. 첫째항이 20인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{10}=S_{11}$일 때, $S_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 21 ⑤ 22

중요도	★★★★	쪽 번	042 011	문항코드	20050-0101

기대T Comment
$S_{10}=S_{11}$이기 위한 조건인 $a_{11}=0$을 바로 캐치할 수 있어야겠다.

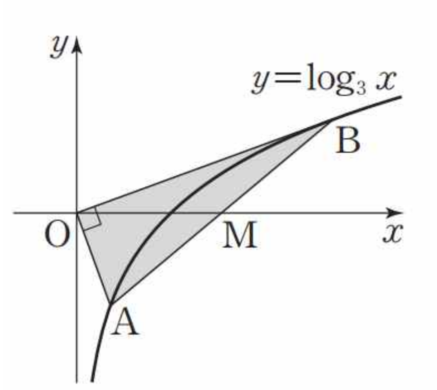
11. X [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

12. 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점 M은 x축 위에 있다.
(나) 두 직선 OA, OB는 서로 수직이다.

삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{11}{6}$ ④ 2 ⑤ $\frac{13}{6}$

중요도	★★★★★	쪽 번	148 012	문항코드	20050-0386

기대T Comment
좋은 문제. 작년 6평 15번 문제가 생각난다면 당신은 기.마 (기출마스터라는 뜻)

13. 모든 항이 음이 아닌 정수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 0또는 짝수인 경우})\\ \frac{1}{2}(a_n-1) & (a_n\text{이 0 홀수인 경우})\end{cases}$$

가 성립한다.

(나) 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n \neq 0$을 만족시키는 항의 개수는 5이다.

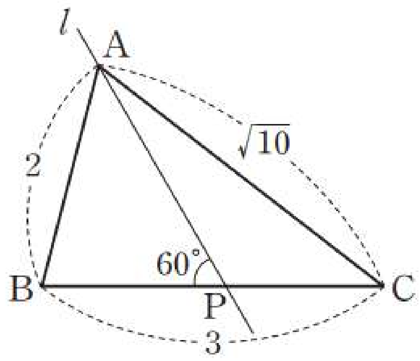
$\sum_{k=1}^{10} a_k = 47$일 때, a_1+a_5의 값은? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

중요도	★★★★	쪽 번	150 019	문항코드	20050-0393

기대T Comment
수열의 귀납적 정의의 해법은, 노가다를 여러번 해보는 것이 다비드비야.

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2, \overline{BC}=3, \overline{AC}=\sqrt{10}$이고, 점 A를 지나는 직선 l이 변 BC 위의 점 P에서 만난다. $\angle BPA=60^\circ$일 때, 점 P는 선분 BC를 $2:(a+b\sqrt{5})$로 내분하는 점이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a,b는 유리수이다.) [3점]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

중요도	★★★★★	쪽 번	153 029	문항코드	20050-0403

기대T Comment
6번을 거꾸로 간다고 생각하면 편하다.

15. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 1보다 작은 유리수이고, 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

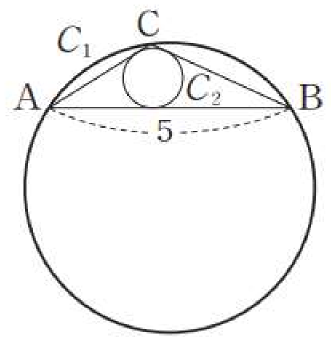
$$b_n = \begin{cases} a_n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$ 을 만족시킨다.

b_5가 소수인 자연수이고, 수열 $\{b_n\}$의 항 중 자연수인 모든 항의 합이 637일 때, $a_{11} = \dfrac{\beta}{\alpha}$이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, α와 β는 서로소인 자연수이다.) [3점]

중요도	★★★★	쪽번	160 027	문항코드	20050-0431

기대T Comment
역대급 난이도의 문제이지만 난이도의 근원지가 '소수'라는 교과과정상 지엽적개념이기 때문에 별로 추천되는 문제는 아니다. 하지만 긴 호흡을 참아내고 어려운 수열문제를 풀어낼 수 있는 능력을 기르기에 괜찮은 문항.

16. 그림과 같이 삼각형 ABC의 외접원을 C_1, 내접원을 C_2라 하고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하자. $\overline{AB}=5$이고 $\cos A = \dfrac{4}{5}, \cos B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{a+b\sqrt{5}}{4}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [3점]



중요도	★★★★	쪽번	161 029	문항코드	20050-0433

기대T Comment
코사인법칙/사인법칙을 자유롭게 쓸 수 있는 수준에 도달해야 한다. 실전에 나오기 딱 좋은 난이도의 문항. 만약 나에게 변형할 수 있는 기회가 있다면 원주각 정도를 섞고 싶다.

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

자세한 수업시간은 아래 QR코드로 확인 가능합니다.

1주차 (Basic, 한양, 건국, 동국, 과기대)	2주차 (연세, 광운+세종,중앙,이대,아주,에리카)	3주차 (인하대)

개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

17. 모든 자연수 n에 대하여 두 등차수열 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$은 다음을 만족시킨다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \frac{2n+1}{4n+1} \left(\text{단}, \sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0 \right)$$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{5}$

ㄴ. $n = 2m-1$일 때, $\frac{a_m}{b_m} = \frac{4m-1}{8m-3}$(단, m은 자연수)

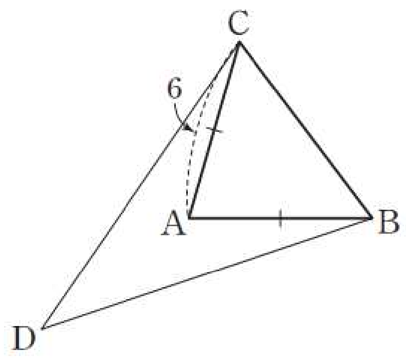
ㄷ. $a_5 = 38$이면 $\sum_{k=1}^{9} b_k = 666$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★★	쪽 번	174 019	문항코드	20050-0483

기대T Comment
등차수열의 합에는 항상 $\frac{n}{2}$이 곱해져 있는 n에 대한 이차식이라는 것을 명심하고, 이를 통해서 두 등차수열의 공차관계를 유추할 수 있다.

18. 그림과 같이 $\sin A = \frac{24}{25}$이고 $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 직선 BC에 대하여 점 A와 같은 쪽에 $\sin D = \frac{3}{5}$이 되도록 점 D를 정할 때, 삼각형 CDB의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



중요도	★★★★	쪽 번	177 029	문항코드	20050-0493

기대T Comment
각 D가 일정하게 잡히기 때문에 sin값이 고정되는 것이다. 이럴 때 점 D의 무빙은 원 위를 돌게 되는데, 그 이유를 원주각과 관련지어 생각해보자.

19. 첫째항이 $a\,(a>0)$, 공비가 $r\,(r\neq 1, r<0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$
$$T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|,$$
$$R_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

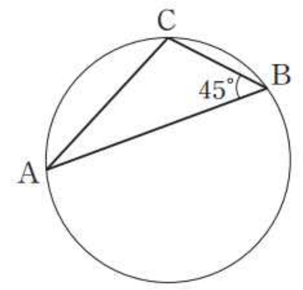
이라 하자. $T_{10} = 2S_{10}$, $T_{20} = 3R_{10}$일 때, $a+r$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

중요도	★★★	쪽 번	182 019	문항코드	20050-0513

기대T Comment
S, T, R 의 차이점을 생각해보는, 난이도는 어렵지 않은 문제가 되겠다.

20. 그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 이 원의 넓이는 $a\pi$이다. 상수 a의 값을 구하시오. [3점]



(가) $\angle ABC = 45^\circ$
(나) $\overline{AC} : \overline{BC} = \sqrt{5} : \sqrt{2}$
(다) 삼각형 ABC의 넓이는 15이다.

중요도	★★★	쪽 번	184 028	문항코드	20050-0522

기대T Comment
변의 길이의 비는 사인의 비와 같다. 이를 명심하면 어렵지 않은 문제.

<table>
<tr><th colspan="2">기대모의고사 가형/나형 Vol1, 2, 3 링크</th></tr>
<tr><td>Vol.1, 2 : 1등급컷 84~88, 신선함과 동시에 수능스러운 정제됨을 경험할 수 있는 모의고사
Vol.3 (가형) : 올해 6, 9, EBS 반영한 Final 모의고사 (나형은 Vol.3 제작 불발됐습니다.)</td><td>Atom.ac
접속</td></tr>
<tr><th colspan="2">김기대T 수능 후 논술 Final 개강 안내사항</th></tr>
<tr><td>실시간 수능 후 Final 시간표를 확인할 수 있습니다.</td><td></td></tr>
</table>

1)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$2^{a-1}=3$에서

$2^{a}=6$에서

$6^{b+1}=96$

$6^{b}=16$

따라서 $2^{ab}=(2^{a})^{b}=6^{b}=16$

2) [정답/모범답안]

1

[해설]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s,t\,(s<t)$로 놓으면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(s,a^{s}),(t,a^{t})$이고,

두 점 A, B가 원 C의 지름의 양 끝점이므로 선분 AB의 중점 $\left(\frac{s+t}{2},\frac{a^{s}+a^{t}}{2}\right)$은 원 C의 중심 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$와 같다.

$\frac{s+t}{2}=0$에서 $s+t=0$, 즉 $t=-s$ ……㉠

$\frac{a^{s}+a^{t}}{2}=\frac{5}{3}$에서 $a^{s}+a^{t}=\frac{10}{3}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^{s}+a^{-s}=\frac{10}{3}$

$3a^{2s}-10a^{s}+3=0$

$(3a^{s}-1)(a^{s}-3)=0$

$a^{s}=\frac{1}{3}$ 또는 $a^{s}=3$

$s=\log_{a}\frac{1}{3}$ 또는 $s=\log_{a}3$

$s=\log_{a}\frac{1}{3}$이면 ㉠에서

$t=-\log_{a}\frac{1}{3}=\log_{a}3$

$s=\log_{a}3$이면 ㉠에서

$t=-\log_{a}3=\log_{a}\frac{1}{3}$

$a>1$에서 $\log_{a}\frac{1}{3}<\log_{a}3$이고, s<t이므로

$s=\log_{a}\frac{1}{3}$이고, $t=\log_{a}3$이다.

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\left(\log_{a}\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),(\log_{a}3,3)$이다.

두 점 A$\left(\log_{a}\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, B$(\log_{a}3,3)$이 원 C의 지름의 양 끝점이면 선분 AB는 원 C의 지름이므로

$\overline{AB}^{2}=4\times\frac{73}{36}$

$\left(\log_{a}3-\log_{a}\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(3-\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{73}{9}$

$(\log_{a}3+\log_{a}3)^{2}+\left(\frac{8}{3}\right)^{2}=\frac{73}{9}$

$(\log_{a}9)^{2}=\frac{73}{9}-\frac{64}{9}=1$

$\log_{a}9=-1$ 또는 $\log_{a}9=1$

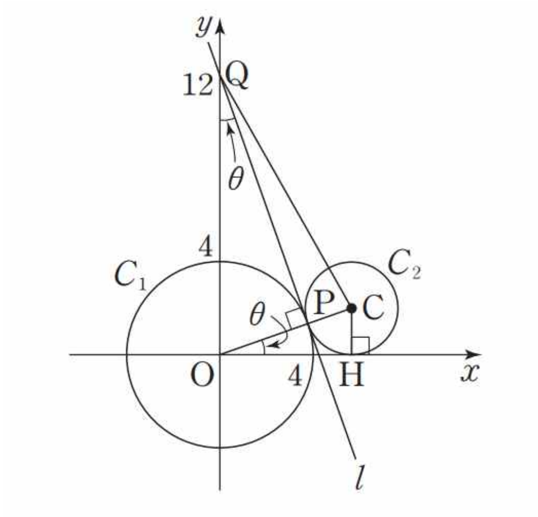
$a=\frac{1}{9}$ 또는 $a=9$

따라서 $a>1$이므로 $a=9$

3)

[해설]

원 C_1의 반지름의 길이는 4이므로 $\overline{OP}=4$이고, $\overline{OQ}=12$이다.



원점 O에 대하여 삼각형 OPQ는 $\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\angle PQO=\theta$로 놓으면

$si\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$이고,

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OQ}^{2}-\overline{OP}^{2}}=\sqrt{12^{2}-4^{2}}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

원 C_2는 점 P에서 원 C_1과 접하고, 직선 OP는 원 C_2의 중심 C를 지나므로 직선 PQ와 직선 OC는 서로 수직이다.

원 C_2의 중심 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\angle COH=\theta$이다.

원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OC}=\overline{OP}+\overline{PC}=4+r,\overline{CH}=r$이고,

삼각형 OHC는 $\angle OHC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{OC}}=\frac{r}{4+r}=\frac{1}{3}$

$3r=r+4$

따라서 $2r=4$이므로 $r=2$

직각삼각형 CQP에서

$\tan^{2}(\angle CQP)=\left(\frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}}\right)^{2}=\left(\frac{2}{8\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{1}{32}$

따라서 $p=32,q=1$이므로 $p+q=32+1=33$

4)

[정답/모범답안]

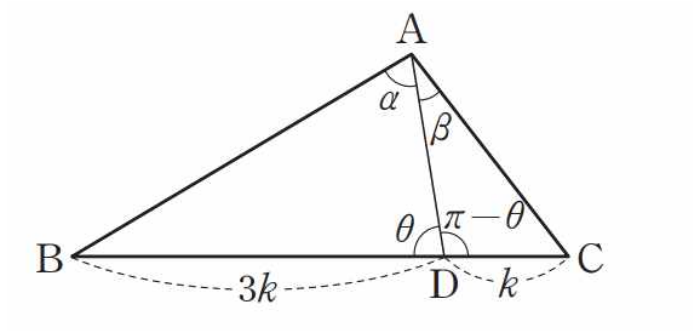
13

[해설]

$\angle BDA=\theta$로 놓으면 $\angle ADC=\rho-\theta$이고,

삼각형 ABC에서 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점은 D이므로

$\overline{BD}=3k, \overline{DC}=k\,(k>0)$으로 놓으면



삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}$에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}\sin\alpha}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AB}\sin\alpha}{3k}$ ……㉠

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{DC}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}$에서 $\dfrac{\overline{DC}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\overline{AC}\sin\beta}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{AC}\sin\beta}{k}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{\overline{AB}\sin\alpha}{3k}=\dfrac{\overline{AC}\sin\beta}{k}$ 이고,

$\sin\beta=\dfrac{8}{15}\sin\alpha$이므로

$\dfrac{\overline{AB}\sin\alpha}{3k}=\dfrac{\overline{AC}\times\dfrac{8}{15}\sin\alpha}{k}$

그러므로 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=3\times\dfrac{8}{15}=\dfrac{8}{5}$

따라서 $p=5, q=8$이므로 $p+q=5+8=13$

5)

[정답/모범답안]

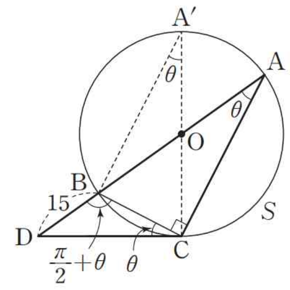
20

[해설]

원 S 위의 점 C와 원의 중심 O를 지나는 직선이 원 S와 만나는 점을

A'이라 하면 원주각의 성질에 의하여 $\angle CA'B=\angle CAB=\theta$이므로

$\angle DCB=\theta$이고, $\angle CBD=\dfrac{1}{2}+\theta$이다.



$\overline{DB}=15$이므로 삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{DC}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{\overline{DB}}{\sin\theta}$에서

$\dfrac{\overline{DC}}{\cos\theta}=\dfrac{15}{\sin\theta}$

$\overline{DC}=\dfrac{15\cos\theta}{\sin\theta}$ ……㉠

원 S의 반지름의 길이를 R로 놓으면

$\overline{DB}=15$이고, $\overline{DA}=\overline{DB}+\overline{AB}=15+2R=2R+15$이므로

원의 성질에 의하여

$\overline{DB}\times\overline{DA}=\overline{DC}^2$에서

$15(2R+15)=\overline{DC}^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$15(2R+15)=\dfrac{15^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$2R+15=\dfrac{15\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$2R\sin^2\theta+15\sin^2\theta=15\cos^2\theta$ ……㉢

조건 (나)에서

$2R\sin^2\theta=\dfrac{21}{5}$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\dfrac{21}{5}+15\sin^2\theta=15\cos^2\theta$

$\dfrac{21}{5}+15\sin^2\theta=15(1-\sin^2\theta)$

$\sin^2\theta=\dfrac{9}{25}$

㉠에서

$\overline{DC}^2=\dfrac{15^2\times\dfrac{16}{25}}{\dfrac{9}{25}}=20^2$이므로

$\overline{DC}=20$

6)

[정답/모범답안]

250

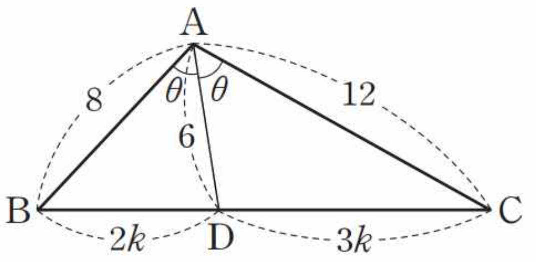
[해설]

선분 AD가 ∠A를 이등분하므로

삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:12=2:3$

$\angle DAB = \angle CAD = \theta, \overline{BD} = 2k, \overline{CD} = 3k \, (k>0)$으로 놓으면



두 삼각형 ABD와 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{8^2+6^2-(2k)^2}{2\times 8\times 6} = \dfrac{12^2+6^2-(3k)^2}{2\times 12\times 6}$

$k^2 = 10$

k는 양수이므로 $k=\sqrt{10}$

그러므로 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2k+3k = 5k = 5\sqrt{10}$

따라서 $l = 5\sqrt{10}$이므로

$l^2 = 250$

[정답/모범답안]

4

7)

[정답/모범답안]

5

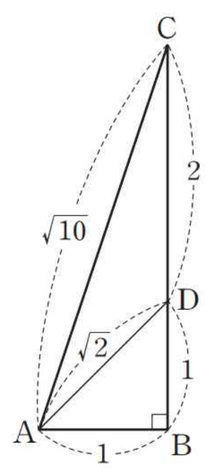
[해설]

삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$이고,

삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$이므로



삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\,(\angle CAD) = \dfrac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}}$

$= \dfrac{2+10-4}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}}$

$= \dfrac{8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

8)

[정답/모범답안]

128

[해설]

삼각형 ABC의 넓이가 $16\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times 8\times 6\times sin\,B = 16\sqrt{2}$

$\sin B = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$0^\circ < B < 90^\circ$ 이므로

$\cos B = \sqrt{1-\sin^2 B}$

$= \sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 6^2+8^2-2\times 6\times 8\times cos\,B$

$= 100 - 96\times\dfrac{1}{3} = 100-32$

$=68$

$B+D = 180^\circ$ 에서 $D = 180^\circ - B$이므로

$\cos D = \cos\ (180^\circ - B) = -\cos B = -\dfrac{1}{3}$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos D = \dfrac{4^2+\overline{AD}^2-68}{2\times 4\times\overline{AD}}$

$\dfrac{\overline{AD}^2-52}{8\overline{AD}} = -\dfrac{1}{3}$

$3\overline{AD}^2 + 8\overline{AD} - 156 = 0$

$(3\overline{AD}+26)(\overline{AD}-6) = 0$

$3\overline{AD}+26 > 0$이므로 $\overline{AD} = 6$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin D = \dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times sin(180^\circ - B)$

$= 12\sin B$

$= 12\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$

따라서 $S = 8\sqrt{2}$이므로

$S^2 = 128$

9)

10)

[정답/모범답안]
3

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$에서 공차를 d라 하면

$$a_1+a_n=a_1+a_1+(n-1)d$$
$$=dn+(2a_1-d)$$
$$=2n-8\text{에서}$$

$d=2, 2a_1-d=-8$
이므로 $a_1=-3$
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$
$=S_{20}-S_{10}$=
$=\frac{20(-6+192)}{2}-\frac{10(-6+92)}{2}$
=320-60=260
{다른 풀이}
$a_1=-3, d=2$에서
$a_n=-3+(n-1)\times 2=2n-5$
이므로$a_{11}=17, a_{20}=35$
따라서
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=\frac{10(17+35)}{2}$
=260

11)
12)

[정답/모범답안]
2

[해설]
두 점 A, B의 좌표를 각각 $(p, \log_3 p), (q, \log_3 q)$ $(0<p<q)$라 하면 조건 (가)에서 선분 AB의 중점 M의 y좌표는 0이므로
$\frac{\log_3 p+\log_3 q}{2}=0$에서
$\log_3 pq=0, pq=1$ ……㉠
조건 (나)에서 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱은 -1이어야 하므로
$\frac{\log_3 p}{p}\times\frac{\log\pounds q}{q}=\frac{\log_3 p\times log_3 p}{pq}=-1$
$\log_3 p\times log_3 q=-pq$ ……㉡
㉠과 ㉡에서
$\log_3 p\times\log_3 q=\frac{1}{p}, (\log_3 p)^2=1$
$\log_3 p=\pm 1$
즉, $p=\frac{1}{3}$일 때, $q=3$이다.
따라서 $A\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, B(3, 1)이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2}\times\sqrt{3^2+1^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{3}\times\sqrt{10}$$
$$=\frac{5}{3}$$

13)
[정답/모범답안]
2

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 처음으로 $a_n=0$을 만족시키는 n의 값을 m이라 하자.
(i) $m\le 5$인 경우
$a_{m+1}=\frac{1}{2}a_m$이어야 하므로 $a_m=a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=0$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_n\ne 0$인 항의 개수가 5보다 작다.
(ii) $m=6\,(a_6=0)$인 경우
$a_{m+1}=\frac{1}{2}a_m$인 경우 $m\ge 7$인 모든 항은 0이고
$a_6=\frac{1}{2}a_5$ 또는 $a_6=\frac{1}{2}(a_5-1)$이므로 $a_5=1$이다.
그러므로 조건 (가)로부터 얻은 수열 $\{a_n\}$과 $\sum_{k=1}^{10}a_k$는 다음과 같다.

<table>
<tr><th rowspan="2">$\sum_{k=1}^{10}a_k$</th><th colspan="11">$\{a_n\}$</th></tr>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th><th>a_9</th><th>a_{10}</th><th>…</th></tr>
<tr><td>31</td><td>16</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="8">2</td><td rowspan="16">1</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">…</td></tr>
<tr><td>32</td><td>17</td></tr>
<tr><td>34</td><td>18</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>35</td><td>19</td></tr>
<tr><td>38</td><td>20</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="4">5</td></tr>
<tr><td>39</td><td>21</td></tr>
<tr><td>41</td><td>22</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>42</td><td>23</td></tr>
<tr><td>46</td><td>24</td><td rowspan="2">12</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="8">3</td></tr>
<tr><td>47</td><td>25</td></tr>
<tr><td>49</td><td>26</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td>50</td><td>27</td></tr>
<tr><td>53</td><td>28</td><td rowspan="2">14</td><td rowspan="4">7</td></tr>
<tr><td>54</td><td>29</td></tr>
<tr><td>56</td><td>30</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>57</td><td>31</td></tr>
</table>

위의 표에서 조건 (나)를 만족시키고 $\sum_{k=1}^{10}a_k$=47인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=25, a_5=1$이다.
따라서 $a_1+a_5=25+1=26$

(ⅲ) $m=7\,(a_7=0)$인 경우

조건 (가)로부터 $a_6=1$이면 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5가 모두 0이 아니므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $m\ge 8$인 경우 (ⅲ)과 같은 결과를 얻는다.

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)로부터

$a_1+a_5=26$

14)

[정답/모범답안]

34

[해설]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{10})^2}{2\times2\times3}=\dfrac{1}{4}$

이므로 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

또한, 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AP}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$\dfrac{\overline{AP}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\overline{AP}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{5}$

또, 점 A에서 변 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BP}=\overline{BH}+\overline{HP}$

$=\overline{AB}\times\cos B+\overline{AP}\times\cos 60^\circ$

$=2\times\dfrac{1}{4}+\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}$

$=3-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$=\dfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})$

$\overline{BP}:\overline{PC}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}):\dfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})$

$=1:\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2}=2:(-5+3\sqrt{5})$

따라서 $a=-5, b=3$이므로

$a^2+b^2=(-5)^2+3^2=34$

15)

[정답/모범답안]

736

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(0<r<1, r$는 유리수)라 하고, $b_5=a_5=p$(p는 소수)라 하자.

(ⅰ) ① $b_6=\dfrac{1}{pr}$이 자연수라 가정하면

어떤 자연수 m에 대하여 $r=\dfrac{1}{mp}$이어야 한다.

따라서 $b_6=m, b_8=p^2m^3, b_{10}=p^4m^5,\cdots$이므로 수열 $\{b_n\}$의

항 중 자연수인 항이 무수히 많고, 그 합이 637이 될 수 없다.

그러므로 b_6은 자연수가 아니다.

② $b_8=\dfrac{1}{pr^3}$ 이 자연수라 가정하면

어떤 자연수 s에 대하여 $r^3=\dfrac{1}{ps}$, 즉 $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{ps}}$이어야 한다.

이때 $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{ps}}$은 유리수이므로 $s=p^2t^3$ (t는 자연수)라 할 수

있고, $r=\dfrac{1}{pt}$이다.

따라서 $b_{10}=p^4t^5, b_{12}=p^6t^7, b_{14}=p^8t^9,\cdots$이므로 수열 $\{b_n\}$의 항 중 자연수인 항이 무수히 많고, 그 합이 637이 될 수 없다.

그러므로 b_{10}은 자연수가 아니다.

③ ①, ②와 같은 방법으로 생각하면

$b_{10},b_{12},b_{14},\cdots$도 자연수가 아님을 알 수 있다.

(ⅱ) $b_7=pr^2, b_9=pr^4, b_{11}=pr^6,\cdots$에서

p는 소수이고 $0<r^2<1, 0<r^4<1, 0<r^6<1,\cdots$이므로

$b_7,b_9,b_{11},\cdots$은 자연수가 아니다.

(ⅲ) $b_2=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{r^3}{p}, b_4=\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{r}{p}$에서

$0<\dfrac{r^3}{p}<\dfrac{1}{p}<1, 0<\dfrac{r}{p}<\dfrac{1}{p}<1$이므로 b_2,b_4는 자연수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b_2,b_4,b_6,b_7,b_8,\cdots$은 자연수가 아니다.

b_1,b_3이 모두 자연수가 아니면 $b_5=637=7^2\times13$으로 소수가 아니다.

한편, $b_3=\dfrac{p}{r^2}$가 자연수이면 어떤 자연수 t_1에 대하여 $r=\dfrac{1}{t_1}$이므로

$b_1=\dfrac{p}{r^4}=pt_1^{\,4}$으로 b_1도 자연수이다.

$b_1=\dfrac{p}{r^4}$ 가 자연수이면 어떤 자연수 t_2에 대하여 $r=\dfrac{1}{t_2}$ 이므로

$b_1=\dfrac{p}{r^2}=pt_2^{\,2}$으로 b_3도 자연수이다.

따라서 b_1,b_3이 모두 자연수이므로

$b_1+b_3+b_5=\dfrac{p}{r^4}+\dfrac{p}{r^2}+p=p\left(\dfrac{1}{r^4}+\dfrac{1}{r^2}+1\right)$

즉, $p\left(\dfrac{1}{r^4}+\dfrac{1}{r^2}+1\right)=7^2\times13$

$p=7$일 때,

$\dfrac{1}{r^4}+\dfrac{1}{r^2}+1=91$에서 $\left(\dfrac{1}{r}+3\right)\left(\dfrac{1}{r}-3\right)\left(\dfrac{1}{r^2}+10\right)=0$

$0<r<1$이므로 $r=\dfrac{1}{3}$

$p=13$일 때,

$\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^2}+1=49$에서 $\frac{1}{r^2}=R$라 하면 $R^2+R-48=0$

$R \equiv \frac{1}{r^2}=\frac{-1\pm\sqrt{193}}{2}$이므로 r가 유리수인 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $a_5=7$이고 $r=\frac{1}{3}$이므로 $a_{11}=a_5\times r^6=7\times\frac{1}{3^6}=\frac{7}{729}$

따라서 $\alpha=729, \beta=7$이므로 $\alpha+\beta=729+7=736$

16)

[정답/모범답안]

10

[해설]

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$="Ã

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$="Ã

이므로

$\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R_1$에서

$R_1=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{5}{2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$이므로

$\overline{BC}=2R_1\sin A=2R_1\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ _;5#;=;5ˆ;_

$\overline{AC}=2R_1\sin B=2R_1\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{5}{2}$_ '5

따라서

(△ABC의 넓이)=$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{4}$ ……㉠

내접원의 중심을 O라 하면

(△ABC의 넓이)

=(△AOB의 넓이)+(△BOC의 넓이)+(△COA의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times R_2+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times R_2+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times R_2$

$=\frac{R_2}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$=\frac{R_2}{2}\left(5+\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}\right)$

$=\frac{R_2}{2}\times\frac{15+3\sqrt{5}}{2}$

$=\frac{15+3\sqrt{5}}{4}R_2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{15}{4}=\frac{15+3\sqrt{5}}{4}R_2$이므로 $R_2=\frac{5}{5+\sqrt{5}}$

따라서 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}\times\frac{5+\sqrt{5}}{5}=\frac{5+5\sqrt{5}}{4}$이므로 $a=5, b=5$이고

$a+b=5+5=10$

17)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. 주어진 식에 n=1을 대입하면 $\frac{\sum_{k=1}^{1}a_k}{\sum_{k=1}^{1}b_k}=\frac{3}{5}$

즉, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{3}{5}$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{2m-1}a_k=\frac{(2m-1)(a_1+a_{2m-1})}{2}=(2m-1)a_m$

마찬가지로 하면 $\sum_{k=1}^{2m-1}b_k=(2m-1)b_m$

$\frac{\sum_{k=1}^{2m-1}a_k}{\sum_{k=1}^{2m-1}b_k}=\frac{2(2m-1)+1}{4(2m-1)+1}$이 성립하므로

$\frac{a_m}{b_m}=\frac{4m-1}{8m-3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 성립한 식에 $m=5$를 대입하면

$\frac{a_5}{b_5}=\frac{19}{37}$

이때 $a_5=38$이므로 $b_5=74$

$\sum_{k=1}^{9}b_k=9b_5=666$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18)

[정답/모범답안]

997

[해설]

삼각형 ABC의 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BC}=2\overline{BH}=2\overline{AB}\sin\frac{A}{2}=12\sin\frac{A}{2}2$ =12'sin A

선분 BC의 길이와 $\sin D=\frac{3}{5}$이 일정하므로 점 D의 위치에 관계없이

삼각형 CDB에 외접하는 원은 유일하게 결정된다.

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

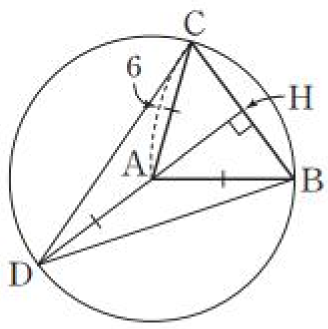
$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin D}, R=\frac{5}{6}\overline{BC}$

이때 $\sin 2D=2\sin D\cos D=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}=\sin A$

이므로 A=2D

$\overline{BC}=12\sin\frac{A}{2}=12\sin D=\frac{36}{5}$

R=6
그림과 같이 점 D는 중심이 A이고 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이는 점이다.



삼각형 CDB의 넓이를 S라 하면 S는 선분 DH가 선분 BC의 수직이등
분선이 될 때, 최대가 된다.

$\overline{DH}=6+\overline{AH}$

$=6+6\cos\frac{A}{2}$

$=6+6\cos D=\frac{54}{5}$

따라서 넓이 S의 최댓값은

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DH}=\frac{18}{5}\overline{DH}$

$=\frac{18}{5}\times\frac{54}{5}=\frac{972}{25}$

이고 $p=25, q=972$이므로 $p+q=25+972=997$

19)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$

$T_{10}=\frac{a\{(-r)^{10}-1\}}{-r-1}=\frac{a(r^{10}-1)}{-r-1}$

$T_{10}=2S_{10}$에서

$\frac{a(r^{10}-1)}{-r-1}-=2\times\frac{a(r^{10}-1)}{-r-1}$

$\frac{1}{-r-1}=\frac{2}{r-1}, r-1=-2r-2, 3r=-1$

$r=-\frac{1}{3}$

$T_{20}=\frac{a\{(-r)^{20}-1\}}{-r-1}=\frac{a(r^{20}-1)}{-r-1}$

$R_{10}=\frac{a^2\{(r^2)^{10}-1\}}{r^2-1}=\frac{a^2(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$

$T_{20}=3R_{10}$에서

$\frac{a(r^{20}-1)}{-r-1}=\frac{3a^2(r20-1)}{(r+1)(r-1)}$

$-1=\frac{3a}{r-1}=\frac{3a}{-\frac{4}{3}}, \frac{4}{3}=3a$에서 $a=\frac{4}{9}$

따라서 $a+r=\frac{4}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$

20)

[정답/모범답안]

25

[해설]

조건 (나)에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{5}k, \overline{BC}=\sqrt{2}k\ (k>0)$이라 하면

조건 (가)에서 $\angle ABC=45^\circ$ 이므로

$\overline{AB}=x$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{5}k)^2=(\sqrt{2}k)^2+x^2-2\times\sqrt{2}k\times x\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2-2kx-3k^2=0, (x+k)(x-3k)=0$

따라서 $x=3k$, 즉 $\overline{AB}=3k$

조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}k\times3k\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15$

$3k^2=30, k^2=10$

따라서 $k=\sqrt{10}$, 즉 $\overline{AC}=\sqrt{5}\times\sqrt{10}=5\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=2R, \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

따라서 $R=5$이므로 원의 넓이는 $R^2\times\pi=25\pi$

즉, $a=25$