2021학년도 대학수학능력시험 대비 한달음 모의고사 나형 1회차 해설

정 답									
1	①	2	⑤	3	②	4	④	5	③
6	④	7	④	8	③	9	②	10	③
11	⑤	12	⑤	13	②	14	③	15	①
16	①	17	⑤	18	③	19	④	20	③
21	②	22	112	23	52	24	4	25	38
26	10	27	5	28	14	29	57	30	12

1. $\log_2 50 - 4\log_4 5 = \log_2 50 - 2\log_2 5$

$$= \log_2 50 - \log_2 5^2$$
$$= \log_2 \frac{50}{25}$$
$$= \log_2 2$$
$$= 1$$

2. $S_7 = 7^2 + 7 = 56$ 이고 $S_6 = 6^2 + 6 = 42$이므로

$a_7 = S_7 - S_6 = 56 - 42 = 14$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x-9}{3-x} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x+1)(x-3)}{-(x-3)}$

$$= -3\lim_{x\to 3}(x+1)$$
$$= (-3)\times 4$$
$$= -12$$

4. 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 A^C와 B도 서로 독립이다.

$$\mathrm{P}(A\cup B^C) = 1 - \mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$= 1 - \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$
$$= 1 - (1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\mathrm{P}(B)$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

5. 확률변수 X의 평균은 $\mathrm{E}(X) = 36\times\dfrac{1}{3} = 12$이고 확률변수 X의 분산은 $\mathrm{V}(X) = 36\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = 8$

이때 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$8 = \mathrm{E}(X^2) - 144$, 곧 $\mathrm{E}(X^2) = 152$

6. $\left(x + \dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r x^r \left(\dfrac{a}{x^2}\right)^{4-r} = {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r} x^{3r-8}$

x의 계수는 $3r - 8 = 1$, $r = 3$인 경우이므로

${}_4\mathrm{C}_3 \times a = 8$, 곧 $a = 2$

7. $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 + 3 = 5$

8. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 10$의 도함수는

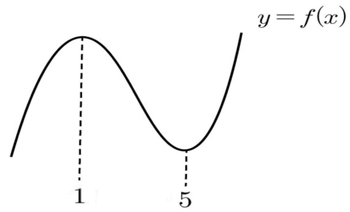
$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ 또는 $x = 5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $f(1) = \dfrac{1}{3} - 3 + 5 + 10 = \dfrac{37}{3}$ 이고

$f(6) = \dfrac{1}{3}\times 6^3 - 3\times 6^2 + 5\times 6 + 10 = 4$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{37}{3}$, $M = \dfrac{37}{3}$

또한 $f(5) = \dfrac{1}{3}\times 5^3 - 3\times 5^2 + 5\times 5 + 10 = \dfrac{5}{3}$ 이고

$f(0) = 10$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{3}$, $m = \dfrac{5}{3}$

따라서 구하는 값은 $M + m = \dfrac{37}{3} + \dfrac{5}{3} = 14$

9. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h) - f(1-h)}{2h} = \frac{3}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h) - f(1-h)}{3h}$

$$= \frac{3}{2}f'(1)$$

이때 함수 $f(x) = x^3 - x + 7$의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 1$이므로

구하는 값은 $\dfrac{3}{2}f'(1) = \dfrac{3}{2}\times(3\times 1^2 - 1) = 3$

10. $\displaystyle\int_1^3 x|x-2|\,dx$

$$= \int_1^2 -x(x-2)\,dx + \int_2^3 x(x-2)\,dx$$
$$= \int_1^2 (-x^2+2x)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx$$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$= \left\{\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}+\left\{(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}$

$= \frac{2}{3}+\frac{4}{3}$

$= 2$

11. 한 개의 주사위를 2번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $a<b$인 사건을 A, a가 b의 약수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

사건 A는 1부터 6까지의 숫자 중에서 서로 다른 숫자 2개를 선택한 경우이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2}=\frac{5}{12}$

사건 $A\cap B$의 가능한 순서쌍 $(a,\,b)$는 $(1,\,2)$, $(1,\,3)$, $(1,\,4)$, $(1,\,5)$, $(1,\,6)$, $(2,\,4)$, $(2,\,6)$, $(3,\,6)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{12}}=\frac{8}{15}$

12. $\int_{-1}^{2}tf(t)dt=a$로 놓으면 $f(x)=4x^2+a$,

$xf(x)=4x^3+ax$에서

$a=\int_{-1}^{2}xf(x)dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^3+ax)dx$

$=\left[x^4+\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$

$=(16+2a)-\left(1+\frac{a}{2}\right)$

$=15+\frac{3}{2}a$

따라서 $a=-30$이므로 $f(x)=4x^2-30$

구하는 값은 $f(3)=4\times 3^2-30=6$

13. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=2^2+4^2-2\times 2\times 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=24$,

곧 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{6}$ $(\overline{\mathrm{AC}}>0)$

또한, $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{8\sqrt{10}}{5}$, $R=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 원 C의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{32}{5}\pi$

14. 모든 실수 x에 대하여 $\cos^2\frac{\pi}{3}x=1-\sin^2\frac{\pi}{3}x$이므로

부등식 $2\cos^2\frac{\pi}{3}x\le 1-\sin\frac{\pi}{3}x$에서

$2-2\sin^2\frac{\pi}{3}x\le 1-\sin\frac{\pi}{3}x$, $\left(2\sin\frac{\pi}{3}x+1\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}x-1\right)\ge 0$,

따라서 위 부등식을 만족하는 $\sin\frac{\pi}{3}x$의 범위는

$\sin\frac{\pi}{3}x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\frac{\pi}{3}x\ge 1$

이때 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$0\le x<6$에서 조건을 만족시키는 x를 알아보자.

$0\le x<6$에서 부등식 $\sin\frac{\pi}{3}x\le -\frac{1}{2}$을 만족하는 x는

$\frac{7}{6}\pi\le\frac{\pi}{3}x\le\frac{11}{6}\pi$, $\frac{7}{2}<x<\frac{11}{2}$

$0\le x<6$에서 부등식 $\sin\frac{\pi}{3}x\ge 1$을 만족하는 x는 방정식

$\sin\frac{\pi}{3}x=1$의 해와 같으므로 $\frac{\pi}{3}x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

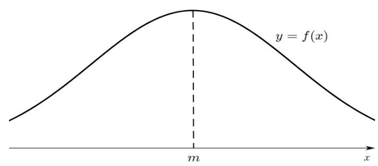
따라서 $0\le x<6$에 위 부등식을 만족하는 정수 x는

4, 5이다.

$0\le x<12$에서 부등식을 만족시키는 정수 x는

4, 5, 10, 11이므로 정수 x의 개수는 4

15. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\,2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(18)<f(12)<f(14)$이므로, 정규분포곡선의 성질에 의해

$f(18)<f(12)$에서 $|m-18|>|m-12|$

$(m-18)^2>(m-12)^2$

$m^2-36m+324>m^2-24m+144$, 곧 $m<15$

$f(12)<f(14)$에서 $|m-12|>|m-14|$

$(m-12)^2>(m-14)^2$

$m^2-24m+144>m^2-28m+196$, 곧 $m>13$

따라서 m의 값의 범위는 $13<m<15$이고 m은 자연수이므로 $m=14$

한편, $f(12)=f(a)$이고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대칭이므로 $\frac{12+a}{2}=14$, $a=16$

이때 $Z=\frac{X-14}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\,1^2)$을 따른다.

따라서 구하는 값은

$\mathrm{P}(X\ge a+1)=\mathrm{P}(X\ge 17)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

16. 점 A의 x좌표를 $\alpha\,(\alpha<0)$라 하면
점 A의 좌표는$(\alpha,\, 2^{\alpha+a})$
직선 AB는 x축에 평행하고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로
점 B의 좌표는 $(\alpha+2,\, 2^{\alpha+a})$
또한, 직선 BC는 x축에 수직이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로
점 C의 좌표는 $(\alpha+2,\, 2^{\alpha+a}+2)$
점 C는 곡선 $y=2^{x+a}$ 위의 점이므로 $2^{\alpha+a+2}=2^{\alpha+a}+2$,
$4\times 2^{\alpha+a}=2^{\alpha+a}+2$, 곧 $2^{\alpha+a}=\dfrac{2}{3}$
따라서 점 C의 좌표는 $\left(\alpha+2,\, \dfrac{8}{3}\right)$
직선 CD는 x축에 평행하고 $\overline{\mathrm{CD}}=2$이므로
점 D의 좌표는 $\left(\alpha,\, \dfrac{8}{3}\right)$
$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{\alpha^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ 이므로 $\alpha^2=\dfrac{16}{9}$,
곧 $\alpha=-\dfrac{4}{3}=(\alpha<0)$
따라서 점 B의 좌표는 $(\alpha+2,\, 2^{\alpha+a})=\left(\dfrac{2}{3},\, \dfrac{2}{3}\right)$이므로
선분 OB의 길이는 $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

17. 등비수열 a_n의 첫째항과 공비가 모두 4이므로
$a_n=4\times 4^{n-1}=4^n$
점 R_n의 y좌표는 $\log_4 a_n=\log_4 4^n=n$
점 R_{n+1}의 y좌표는 $\log_4 a_{n+1}=\log_4 4^{n+1}=n+1$
따라서 $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}}=\boxed{1}$
사각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 1\times(a_n+a_{n+1})=\dfrac{1}{2}(4^n+4^{n+1})=5\times 2^{2n-1}$
한편, 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같으므로
점 Q_n의 y좌표는 n
따라서 점 Q_n의 x좌표는 $\boxed{2^n}$
마찬가지로 점 Q_{n+1}의 x좌표는 2^{n+1}이므로
사각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 1\times(2^n+2^{n+1})=\dfrac{3}{2}\times 1\times 2^n=3\times 2^{n-1}$
사각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이는 사각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$의 넓이에서 사각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$의 넓이를 뺀 값과 같으므로
$b_n=5\times 2^{2n-1}-3\times 2^{n-1}=2^{n-1}\times\boxed{5\times 2^n-3}$
이상에서 $p=1$, $f(n)=2^n$, $g(n)=5\times 2^n-3$이므로
구하는 값은 $1+\dfrac{f(6)}{g(4)}=1+\dfrac{2^6}{5\times 2^4-3}=\dfrac{141}{77}$

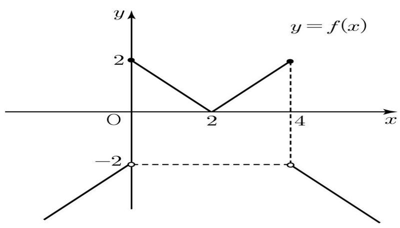
18. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
'(ⅰ) $f(1)\geq 2$인 경우'와 '(ⅱ) $f(1)=1$인 경우'로 나누어 생각해보자.
(ⅰ) $f(1)\geq 2$인 경우:
조건 (가)에서 $2\leq f(1)\leq f(2)\leq f(4)\leq 4$이고,
조건 (나)에서 $1\leq f(3)\leq 4$이므로
조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는
${}_3\mathrm{H}_3\times 4={}_5\mathrm{C}_2\times 4=40$

(ⅱ) $f(1)=1$인 경우:
조건 (가)에서 $1\leq f(2)\leq f(4)\leq 4$이고,
조건 (나)에서 $f(3)\leq f(2)$이므로
$1\leq f(3)\leq f(2)\leq f(4)\leq 4$
곧 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{40+20}{256}=\dfrac{15}{64}$

19. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=t^3-9t^2+14t$, $v_2(t)=3t^2-34t$이므로
두 점 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 가속도를
$a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면
$a_1(t)=3t^2-18t+14$, $a_2(t)=6t-34$
두 점 P, Q의 가속도가 시각 $t=a$에서 같아지므로
$3a^2-18a+14=6a-34$, $3(a-4)^2=0$, 곧 $a=4$
이때 $v_1(t)=t^3-9t^2+14t=t(t-2)(t-7)$이므로
$0<t<2$에서 $v_1(t)>0$이고 $2<t<4$에서 $v_2(t)<0$
따라서 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는
$$\begin{aligned}\int_0^4|v_1(t)|dt&=\int_0^4|t^3-9t^2+14t|dt\\&=\int_0^2(t^3-9t^2+14t)dt+\int_2^4(-t^3+9t^2-14t)dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+7t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^4+3t^3-7t^2\right]_2^4\\&=(4-24+28)+(-64+192-112)-(-4+24-28)\\&=8+16-(-8)\\&=32\end{aligned}$$

20. 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $(g\circ f)(x)$의 $x=0$에서의 연속성을 알아보자.
$\lim\limits_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to -2-}g(x)=g(-2)$
$\lim\limits_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=g(2)$
함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$(g\circ f)(0)=g(2)=g(-2)$

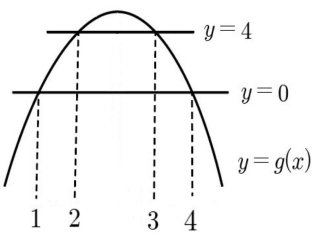
(ⅱ) 함수 $(g \circ f)(x)$의 $x=4$에서의 연속성을 알아보자.
$\lim_{x \to 4-}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to 2-} g(x) = g(2)$
$\lim_{x \to 4+}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to -2-} g(x) = g(-2)$
함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=4$에서 연속이므로
$(g \circ f)(4) = g(2) = g(-2)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $g(2)=g(-2)$
따라서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{-2+2}{2}=0$에 의하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$ (참)

ㄴ. $g(x)=-3x^2+3$로 놓으면
$g(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$g(x)=4$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
$g(x)=0$ 또는 $g(x)=4$, 곧 $x=-1$ 또는 $x=1$
$x=-1$과 $x=1$에서 함수 $(f \circ g)(x)$의 연속성을 알아보자.
$\lim_{x \to -1-}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = -2$
$\lim_{x \to -1+}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 2$
따라서 함수 $(f \circ g)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
$\lim_{x \to 1-}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 2$
$\lim_{x \to 1+}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = -2$
따라서 함수 $(f \circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수는 2이다.
이때, 함수 $g(x)$의 최댓값은 3이므로 $M=3$이다. (거짓)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<0$이면 함수 $(f \circ g)(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 '(ⅰ) 곡선 $y=g(x)$가 두 직선 $y=0$, $y=4$와 서로 다른 두 점에서 만나는 경우'와 '(ⅱ) 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=0$과 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=4$와 한 점에서 만나거나 만나지 않는 경우'로 나눌 수 있다.

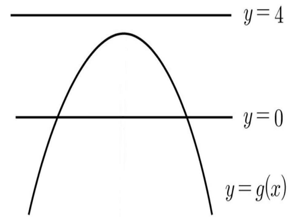
(ⅰ)의 경우:
$g(x)=0$ 또는 $g(x)=4$인 모든 x를 작은 수부터 크기순으로 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면 $x_n\ (1 \le n \le 4)$는 자연수이고
$x_1+x_2+x_3+x_4=10$이므로 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$
곡선 $y=g(x)$, 두 직선 $y=0$, $y=4$는 다음과 같다.



따라서 $g(x)=a(x-1)(x-4)\ (a<0)$
$g(2)=4$이므로 $-2a=4$, $a=-2$

따라서 $g(x)=-2(x-1)(x-4)$
$=-2x^2+10x-8$
$=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$
이므로 이 경우 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{2}$

(ⅱ)의 경우:
곡선 $y=g(x)$, 두 직선 $y=0$, $y=4$는 다음과 같다.



이 경우 함수 $g(x)$의 최댓값은 4이하이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 M의 최댓값은 $\frac{9}{2}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. (ⅰ) $a_1=2^k$ (k는 자연수)인 경우와
(ⅱ) $2^{k-1}<a_1<2^k$ (k는 자연수)인 경우로 나누어 생각해보자.

(ⅰ) $a_1=2^k$ (k는 자연수)인 경우:
$a_{k+1}=1$이므로 문제의 조건에 의하여 $k+1=9$
곧 $k=8$
따라서 가능한 a_1의 값은 $a_1=2^8=256$

(ⅱ) $2^{k-1}<a_1<2^k$ (k는 자연수)인 경우:
$\frac{1}{2}<a_{k+1}<1$이므로 $a_{k+2}=\left\{3+(-1)^{a_1}\right\}^{k-1}$
이때 a_1의 값에 따라 a_{k+2}의 값이 달라지므로
(1) a_1이 홀수인 경우와 (2) a_1이 짝수인 경우로 나누어 생각해보자.

(1) a_1이 홀수인 경우:
$a_{k+2}=\{3+(-1)\}^{k-1}=2^{k-1}$, 곧 $a_{2k+1}=1$
문제의 조건에 의하여 $2k+1=9$, 곧 $k=4$
그러면 a_1의 값의 범위는 $2^3<a_1<2^4$이고, a_1은 홀수이므로 가능한 a_1의 값은 9, 11, 13, 15

(2) a_1이 짝수인 경우:
$a_{k+2}=(3+1)^{k-1}=2^{2k-2}$, 곧 $a_{3k}=1$
문제의 조건에 의하여 $3k=9$, 곧 $k=3$
그러면 a_1의 값의 범위는 $2^2<a_1<2^3$이고, a_1은 짝수이므로 가능한 a_1의 값은 6

따라서 구하는 모든 a_1의 값의 합은
$256+9+11+13+15+6=310$

22. ${}_4\mathrm{H}_5+{}_5\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_3=2\times{}_8\mathrm{C}_3=2\times\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=112$

23. 함수 $f(x)=2x^4-3x^2+4$의 도함수는
$f'(x)=8x^3-6x$이므로
구하는 값은 $f'(2)=8\times2^3-6\times2=64-12=52$

24. 함수 $y=a\sin\{b(x+\pi)\}$의 주기가 π이므로 $\dfrac{2\pi}{|b|}=\pi$,
$|b|=2$, $b=2$ $(b>0)$
따라서 함수 $y=a\sin\{2(x+\pi)\}=a\sin(2x+2\pi)=a\sin 2x$가
점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \sqrt{3}\right)$을 지나므로 $\sqrt{3}=a\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)$,
$\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, 곧 $a=2$
따라서 구하는 값은 $a+b=2+2=4$

25. 이 고속도로를 지나가는 자동차가 지점 A에서 출발하여
지점 B까지 도착할 때까지의 소요시간은 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을
따른다.
임의추출한 49대의 자동차의 지점 A에서 출발하여 지점
B까지의 소요시간의 평균이 56이고 모평균 m에 대한 95%의
신뢰구간은 $56-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le 56+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$
이 신뢰구간이 $19a\le m\le 21a$이므로
$2\times56=19a+21a=40a$에서
$a=2.8$
또한 $21a-19a=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$에서
$\sigma=\dfrac{7\times2\times2.8}{2\times1.96}=10$
따라서 구하는 값은 $10a+\sigma=10\times2.8+10$
$=38$

26. x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=-a^2+8a+k$$
$$=-(a-4)^2+k+16$$
따라서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율의
최댓값은 $a=4$일 때 $k+16$이므로 $k+16=3$,
$k=-13$이고 $a_1=4$
따라서 구하는 값은 $4-f(1)=4-(-1+8-13)$
$=10$

[참고]
이 문제에서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의
평균변화율이 최대인 경우는 함수 $f(x)$의 그래프에서
$x=a$에서의 접선이 점 $(0,\ f(0))$을 지나는 경우이다.

27. 곡선 $y=-g(x)$은 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점
$(0,0)$, $(1,0)$을 지나고 닫힌구간 $[0,1]$에서
$g(x)\le -g(x)\le f(x)$이다.
곡선 $y=-g(x)$는 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인
부분의 넓이를 이등분하므로
$x\ge0$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의
넓이를 S_1라 하면
$$S_1=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
또한, 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=-g(x)$로 둘러싸인 부분의
넓이를 S_2라 하면
$$S_2=\int_0^1|g(x)-\{-g(x)\}|\,dx=-2\int_0^1 g(x)\,dx$$
이때 $S_1=2S_2$이므로
$$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=-4\int_0^1 g(x)\,dx,$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx=-3\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(-3x^3+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{4}$$
$$\int_0^1 g(x)\,dx=a\int_0^1(x^2-x)\,dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{6}a$$
따라서 $\dfrac{3}{4}=(-3)\times\left(-\dfrac{1}{6}a\right)$, $a=\dfrac{3}{2}$
$p=2$, $q=3$이므로 구하는 값은 $p+q=5$

28. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
$d\ge0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\ge4$
이때 조건을 만족시키지 않으므로 모순이다.
따라서 $d<0$이고, $-6\le S_n\le4$를 만족하는 자연수 n의
최댓값이 6이므로 $-6\le S_6\le4$이고, $S_7<-6$이다.
$S_6=6\times\dfrac{2a_1+5d}{2}=6\times\dfrac{2\times4+5d}{2}=15d+24$이므로
$-6\le 15d+24\le4$, $-2\le d\le-\dfrac{4}{3}$
또한, $S_7=7\times\dfrac{2a_1+6d}{2}=7\times\dfrac{2\times4+6d}{2}=21d+28$이므로
$21d+28<-6$, $d<-\dfrac{34}{21}$
따라서 d의 값의 범위는 $-2\le d<-\dfrac{34}{21}$이고
d는 정수이므로 $d=-2$
이상에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 -2인
등차수열이다.
$a_n=4+(n-1)(-2)=-2n+6$
$S_n=n\times\dfrac{2\times4+(n-1)(-2)}{2}=-n^2+5n$이므로

구하는 값은 $\sum_{n=1}^{6} S_n = \sum_{n=1}^{6}\left(-n^2+5n\right)$

$$= -\frac{6\times7\times13}{6}+5\times\frac{6\times7}{2}$$
$$= -91+105=14$$

29. 조건 가, 나, 다에 해당하는 사건을 각각 P, Q, R라 하면 구하는 경우의 수는 '사건 P의 경우'에서 '사건 P가 일어나고 두 사건 Q, R가 같이 일어나지 않는 경우'를 제외한 값이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$n(P)-n\left(P\cap(Q\cap R)^C\right)$
$=n(P)-n\left(P\cap\left(Q^C\cup R^C\right)\right)$
$=n(P)-n\left(\left(P\cap Q^C\right)\cup\left(P\cap R^C\right)\right)$
$=n(P)-\left\{n\left(P\cap Q^C\right)+n\left(P\cap R^C\right)-n\left(P\cap Q^C\cap R^C\right)\right\}$

일곱 번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A, B, C, D, E의 순서대로 각 칸에 놓여야 하므로 첫 번째 칸부터 여섯 번째 칸까지는 인형 A, B, C를 놓고, 여덟 번째 칸부터 열두 번째 칸까지는 인형 C, D, E를 놓아야 한다.
첫 번째 칸부터 여섯 번째 칸까지는 인형 A, B, C의 개수를 a, b, c_1이라 하면 $a+b+c_1=6\ (a\ge1,\ b\ge1,\ c_1\ge0)$이고, 여덟 번째 칸부터 열두 번째 칸까지는 인형 C, D, E의 개수를 c_2, d, e라 하면 $c_2+d+e=5\ (c_2\ge0,\ d\ge1,\ e\ge1)$이다.

사건 P의 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_3=150$

사건 $P\cap Q^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만인 사건이다.
$a=1$, $d=1$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_4\times{}_2\mathrm{H}_3=20$
$a=1$, $d=2$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_4\times{}_2\mathrm{H}_2=15$
$a=2$, $d=1$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3=16$
따라서 $n\left(P\cap Q^C\right)=20+15+16=51$

사건 $P\cap R^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만인 사건이므로
사건 $P\cap R^C$의 경우의 수와 사건 $P\cap Q^C$의 경우의 수는 같다.
따라서 $n\left(P\cap R^C\right)=51$

사건 $P\cap Q^C\cap R^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만이고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만인 사건이다.
따라서 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만이고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만이 되도록 하는 경우는 각 경우에 3가지씩 있으므로
$n\left(P\cap Q^C\cap R^C\right)=9$

따라서
$n(P)-\left\{n\left(P\cap Q^C\right)+n\left(P\cap R^C\right)-n\left(P\cap Q^C\cap R^C\right)\right\}$
$=150-(51\times2-9)$
$=57$

30. 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

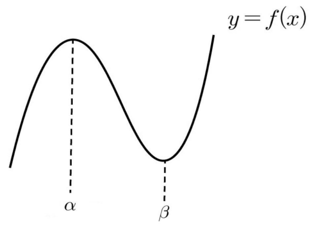
(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
따라서 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 모든 실근은 t뿐이므로 $g(t)=t$
따라서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 이 경우는 조건에 모순이다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$라 하자.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(\alpha)$의 교점의 x좌표 중 α가 아닌 것을 α'이라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(\beta)$의 교점의 x좌표 중 β가 아닌 것을 β'이라 하자.
$t<\beta'$ 또는 $t>\alpha'$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 모든 실근은 t뿐이다. 따라서 $g(t)=t$
$\beta'\le t\le\alpha'$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 모든 실근의 개수는 3이다. 이를 각각 $x_1,x_2,x_3\ (x_1\ge x_2\ge x_3)$이라 하면
$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+f(t)$
이때 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 할 수 있으므로
$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+f(t)$
따라서 $a=-(x_1+x_2+x_3)$, 곧 $x_1+x_2+x_3=-a$
따라서 $g(t)=-a$

따라서 $g(t)=\begin{cases} t & (t<\beta' \text{ 또는 } t>\alpha') \\ -a & (\beta'\le t\le\alpha) \end{cases}$

함수 $g(t)$는 $t=0$과 $t=4$에서 불연속이므로 $\beta'=0,\alpha'=4$
한편, $g(\beta')=g(\alpha')$이므로 $2\beta=2\alpha+4$, 곧 $\alpha=\beta-2$
따라서
$f'(x)=3\{x-(\beta-2)\}(x-\beta)$
$\quad=3\left\{x^2-(2\beta-2)x+\beta(\beta-2)\right\}$

$= 3x^2 - 6(\beta - 1)x + 3\beta(\beta - 2)$

따라서

$f(x) = x^3 - 3(\beta - 1)x^2 + 3\beta(\beta - 2)x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = f(\beta)$ 이므로

$C = \beta^3 - 3(\beta - 1)\beta^2 + 3\beta^3(\beta - 2) + C$

$\beta^3 - 3\beta^2 = \beta^2(\beta - 3) = 0$, 곧 $\beta = 0$ 또는 $\beta = 3$

$\beta > \beta' = 0$이므로 $\beta = 3$

따라서

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + C$이고 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $g(x) = 6$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 방정식 $f(x) = g(x)$, 곧 $f(x) = 6$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $f(0) < 6 < f(4)$이어야 한다.

곧, $\{f(0) - 6\}\{f(4) - 6\} < 0$, $(C - 6)(C - 2) < 0$

$2 < C < 6$

C는 정수이므로 $C = 3$ 또는 $C = 4$ 또는 $C = 5$

따라서 구하는 값은 $3 + 4 + 5 = 12$