2021학년도 대학수학능력시험 대비 한달음 모의고사 가형 1회차 해설

정 답									
1	①	2	⑤	3	③	4	④	5	②
6	②	7	①	8	⑤	9	③	10	②
11	⑤	12	①	13	④	14	①	15	⑤
16	③	17	③	18	④	19	⑤	20	②
21	①	22	2	23	100	24	7	25	80
26	90	27	78	28	108	29	57	30	72

1. $\log_2 50 - 4\log_4 5 = \log_2 50 - 2\log_2 5$

$$= \log_2 50 - \log_2 5^2 = \log_2 \frac{50}{25} = \log_2 2 = 1$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+2}+3^n+1}{5^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{25+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 25$

3. ${}_4\mathrm{H}_5 + {}_5\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_4$

$$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} + \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 56+70 = 126$$

4. 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C와 B도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cup B^C) = 1-\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$= 1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$= 1-(1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)$

$= 1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\mathrm{P}(B)$

$= 1-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$

5. 함수 $y = a\sin\{b(x+\pi)\}$의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|} = \pi$,

$|b| = 2$, 곧 $b = 2$ $(b>0)$

따라서 함수 $y = a\sin\{2(x+\pi)\} = a\sin(2x+2\pi) = a\sin 2x$가

점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \sqrt{3}\right)$을 지나므로 $\sqrt{3} = a\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)$,

$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 곧 $a = 2$

따라서 구하는 값은 $a+b = 2+2 = 4$

6. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^4\left(\frac{x}{3}+a\right)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r x^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{4-r} \times {}_3\mathrm{C}_m\left(\frac{x}{3}\right)^m a^{3-m}$

$= {}_4\mathrm{C}_r \times {}_3\mathrm{C}_m \times a^{3-m}3^{-m}x^{3r+m-8}$

따라서 x항의 계수는 $3r+m-8=1$의 경우이다.

$0\le r\le 4$이고 $0\le m\le 3$인 정수 r, m이 $3r+m-8=1$을 만족하는 순서쌍 $(r,\ m)$은 $(3,\ 0)$, $(2,\ 3)$이다.

따라서 x의 계수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_0\times a^3\times 3^0 + {}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3\times a^0\times 3^{-3} = 4a^3+\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$

따라서 $a^3 = -\frac{1}{27}$, $a = -\frac{1}{3}$

7. 점 $(e,0)$이 곡선 $e^y\ln x + ae^{2y} = b$ 위의 점이므로 $x=e$, $y=0$을 대입하면 $1+a=b$ ……㉠

곡선 $e^y\ln x + ae^{2y} = b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\ln x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}e^y + 2ae^{2y}\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\ln x + 2axe^y}$

곧 $(e,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{e+2ae} = \frac{1}{3e}$,

$1+2a = -3$, 곧 $a = -2$

㉠에서 $b = -1$

구하는 값은 $a+b = (-2)+(-1) = -3$

8. 한 개의 주사위를 2번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $a<b$인 사건을 A, a가 b의 약수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

사건 A는 1부터 6까지의 숫자 중에서 서로 다른 숫자 2개를 선택한 경우이므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2} = \frac{5}{12}$

사건 $A\cap B$의 가능한 모든 순서쌍 (a,b)는 $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(3,6)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{12}} = \frac{8}{15}$

9. 모든 실수 x에 대하여 $\cos^2\frac{\pi}{3}x = 1-\sin^2\frac{\pi}{3}x$이므로

부등식 $2\cos^2\frac{\pi}{3}x \le 1-\sin\frac{\pi}{3}x$에서

$2-2\sin^2\frac{\pi}{3}x \le 1-\sin\frac{\pi}{3}x$, $\left(2\sin\frac{\pi}{3}x+1\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}x-1\right)\ge 0$,

따라서 위 부등식을 만족하는 $\sin\frac{\pi}{3}x$의 범위는

$\sin\frac{\pi}{3}x \le -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\frac{\pi}{3}x \ge 1$

이때 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$0 \le x < 6$에서 조건을 만족시키는 x를 알아보자.

$0 \le x < 6$에서 부등식 $\sin\frac{\pi}{3}x \le -\frac{1}{2}$을 만족하는 x는

$\frac{7}{6}\pi \le \frac{\pi}{3}x \le \frac{11}{6}\pi$, $\frac{7}{2} < x < \frac{11}{2}$

$0 \le x < 6$에서 부등식 $\sin\frac{\pi}{3}x \ge 1$을 만족하는 x는 방정식

$\sin\frac{\pi}{3}x=1$의 해와 같으므로 $\frac{\pi}{3}x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

따라서 $0 \le x < 6$에 위 부등식을 만족하는 정수 x는

4, 5이다.

$0 \le x < 12$에서 부등식을 만족시키는 정수 x는

4, 5, 10, 11이므로 정수 x의 개수는 4

10. x좌표가 x인 x축 위의 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)^2=\frac{\ln x}{x^2}$

이때 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$,

$g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\times\ln x\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2\sqrt{e}}-\left[\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$$

따라서 입체도형의 부피는 $\frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$

11. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_n=r^{n-1}$

모든 자연수 n에 대하여

$\log_2|a_n|=\log_2|r^{n-1}|=\log_2|r|^{n-1}=(n-1)\log_2|r|$의 값이

정수이므로 $r=1$이거나 r은 2의 거듭제곱이다.

(i) $r=1$인 경우

$a_n=1^{n-1}=1$이므로 $\log_2|a_n|=0$

따라서 $\sum_{n=1}^{m}\log_2|a_n|>7$을 만족하는 자연수 m의 값은 존재하지

않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) r이 2의 거듭제곱인 경우

$r=2^a$(a는 자연수)라 하면 $a_n=r^{n-1}=(2^a)^{n-1}=2^{a(n-1)}$

이고 $\log_2|a_n|=\log_2|2^{a(n-1)}|=a(n-1)\log_2|2|=a(n-1)$

이때 $\sum_{n=1}^{m}\log_2|a_n|>7$을 만족하는 자연수 m의 최솟값이

4이므로 $\sum_{n=1}^{4}\log_2|a_n|>7$이고 $\sum_{n=1}^{3}\log_2|a_n|<7$이다.

$\sum_{n=1}^{4}\log_2|a_n|=\sum_{n=1}^{4}a(n-1)=a+2a+3a=6a>7$이므로 $a>\frac{7}{6}$

$\sum_{n=1}^{3}\log_2|a_n|=\sum_{n=1}^{3}a(n-1)=a+2a=3a<7$이므로 $a<\frac{7}{3}$

따라서 a의 범위는 $\frac{7}{6}<a<\frac{7}{3}$이고 a는 자연수이므로

$a=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_n=4^{n-1}$

구하는 값은 $\log_2|a_{11}|=\log_2 4^{10}=\log_2 2^{20}=20\log_2 2=20$

12. 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$xf'(x)-f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$, 곧 $f(x)=xf'(x)-\frac{2x^3}{x^2+1}$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf'(x)-\frac{2x^3}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1 xf'(x)dx-\int_0^1\frac{2x^3}{x^2+1}dx$$

이때 $\int_0^1 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx$이고,

$x^2+1=t$로 놓으면 $x^2=t-1$이고 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1\frac{2x^3}{x^2+1}dx=\int_1^2\frac{t-1}{t}dt=\int_1^2 1-\frac{1}{t}dt=\left[t-\ln|t|\right]_1^2=1-\ln 2$$

곧, $\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx-(1-\ln 2)$

한편, $f'(1)-f(1)=1$이고 $f'(1)=1+\ln 2$이므로

$f(1)=\ln 2$, $2\int_0^1 f(x)dx=-1+2\ln 2$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$

[참고]

함수 $f(x)$의 함수식을 구할 수 있다.

$xf'(x)-f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$의 양변에 $\frac{1}{x^2}$를 곱하면

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{2x}{x^2+1}$이고 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf(x)-f(x)}{x^2}$이므로

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$, 곧 $\frac{f(x)}{x}=\ln(x^2+1)+C$ (C는 적분상수)

위 해설에서 $f(1)=\ln 2$이므로 $C=0$, 곧, $f(x)=x\ln(x^2+1)$

13. 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3 가 적힌 6장의 카드 중 임의로 3장을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$이고,

확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$일 때

1이 적힌 카드를 3장 뽑는 경우로,

1이 적힌 카드 3장 중 3장을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

따라서 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{20}$

(ii) $X=2$일 때

'1이 적힌 카드를 2장 뽑고 2 또는 3이 적힌 카드를 1장 뽑는 경우'와 '2가 적힌 카드를 2장 뽑고, 1 또는 3이 적힌 카드를 1장 뽑는 경우'로 나눌 수 있다.

1이 적힌 카드 3장 중 2장을 고르고 2, 2, 3이 적힌 카드 3장 중 1장을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_3C_1 = 9$

2가 적힌 카드 2장 중 2장을 고르고 1, 1, 1, 3이 적힌 카드 4장 중 1장을 고르는 경우의 수는 ${}_2C_2 \times {}_4C_1 = 4$

따라서 $P(X=2) = \frac{9+4}{20} = \frac{13}{20}$

(iii) $X=3$일 때

확률질량함수의 성질에 의하여

$$P(X=3) = 1 - \{P(X=1)+P(X=2)\} = 1 - \left(\frac{1}{20}+\frac{13}{20}\right) = \frac{3}{10}$$

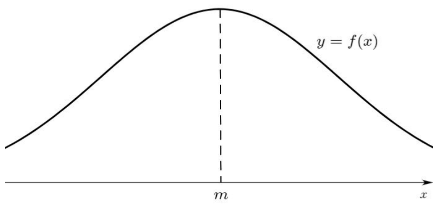
따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X의 평균은

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} k \times P(X=k) = 1\times\frac{1}{20} + 2\times\frac{13}{20} + 3\times\frac{3}{10} = \frac{9}{4}$$

14. 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(18) < f(12) < f(14)$이므로, 정규분포곡선의 성질에 의해

$f(18) < f(12)$에서 $|m-18| > |m-12|$

$(m-18)^2 > (m-12)^2$

$m^2 - 36m + 324 > m^2 - 24m + 144$, 곧 $m < 15$

$f(12) < f(14)$에서 $|m-12| > |m-14|$

$(m-12)^2 > (m-14)^2$

$m^2 - 24m + 144 > m^2 - 28m + 196$, 곧 $m > 13$

따라서 m의 값의 범위는 $13 < m < 15$이고

m은 자연수이므로 $m = 14$

한편, $f(12) = f(a)$이고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대칭이므로 $\frac{12+a}{2} = 14$, $a = 16$

이때 $Z = \frac{X-14}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$을 따른다.

따라서 구하는 값은

$$P(X \ge a+1) = P(X \ge 17) = P(Z \ge 1.5) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

15. 등비수열 a_n의 첫째항과 공비가 모두 4이므로

$a_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$

점 R_n의 y좌표는 $\log_4 a_n = \log_4 4^n = n$

점 R_{n+1}의 y좌표는 $\log_4 a_{n+1} = \log_4 4^{n+1} = n+1$

따라서 $\overline{R_nR_{n+1}} = \boxed{1}$

사각형 $R_nP_nP_{n+1}R_{n+1}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 1 \times (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(4^n + 4^{n+1}) = 5 \times 2^{2n-1}$

한편, 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같으므로

점 Q_n의 y좌표는 n

따라서 점 Q_n의 x좌표는 $\boxed{2^n}$

마찬가지로 점 Q_{n+1}의 x좌표는 2^{n+1}이므로

사각형 $R_nQ_nQ_{n+1}R_{n+1}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 1 \times (2^n + 2^{n+1}) = \frac{3}{2} \times 1 \times 2^n = 3 \times 2^{n-1}$

사각형 $Q_nP_nP_{n+1}Q_{n+1}$의 넓이는 사각형 $R_nP_nP_{n+1}R_{n+1}$의 넓이에서 사각형 $R_nQ_nQ_{n+1}R_{n+1}$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$b_n = 5 \times 2^{2n-1} - 3 \times 2^{n-1} = 2^{n-1} \times \boxed{5 \times 2^n - 3}$

이상에서 $p = 1$, $f(n) = 2^n$, $g(n) = 5 \times 2^n - 3$이므로

구하는 값은 $1 + \frac{f(6)}{g(4)} = 1 + \frac{2^6}{5 \times 2^4 - 3} = \frac{141}{77}$

16. $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$에서 $\frac{1}{\sqrt{x}} = t$로 놓으면,

$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $x = \frac{1}{4}$일 때 $t = 2$,

$x = 1$일 때 $t = 1$이므로

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = -2\int_2^1 t\,g'(t)\,dt = 2\int_1^2 t\,g'(t)\,dt$$

$h(t) = t$로 놓으면 $h'(t) = 1$이므로

$$2\int_1^2 t\,g'(t)\,dt = 2\Big[t\,g(t)\Big]_1^2 - 2\int_1^2 g(t)\,dt = 4g(2) - 2g(1) - 2\int_1^2 g(t)\,dt$$

$f(1) = 1$이고 $f(4) = 2$이므로 $g(1) = 1$, $g(2) = 4$

$\int_1^2 g(t)\,dt$에서 $g(t) = s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt} = g'(t) = \frac{1}{f'(s)}$

$t = 1$일 때 $s = 1$, $t = 2$일 때 $s = 4$이므로

$$\int_1^2 g(t)\,dt = \int_1^4 s\,f'(s)\,ds$$

$h(s) = s$로 놓으면 $h'(s) = 1$이므로

$$\int_1^4 s\,f'(s)\,ds = \Big[s\,f(s)\Big]_1^4 - \int_1^4 f(s)\,ds = 4f(4) - f(1) - 4$$

$=4\times2-1-4=3$

따라서 구하는 값은

$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=4g(2)-2g(1)-2\int_{1}^{2}g(t)\,dt$

$=4\times4-2\times1-2\times3$

$=8$

17. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

'(ⅰ) $f(1)\ge2$인 경우'와 '(ⅱ) $f(1)=1$인 경우'로 나누어 생각해보자.

(ⅰ) $f(1)\ge2$인 경우:

조건 (가)에서 $2\le f(1)\le f(2)\le f(4)\le4$이고,

조건 (나)에서 $1\le f(3)\le4$이므로

조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

${}_3H_3\times4={}_5C_2\times4=40$

(ⅱ) $f(1)=1$인 경우:

조건 (가)에서 $1\le f(2)\le f(4)\le4$이고,

조건 (나)에서 $f(3)\le f(2)$이므로

$1\le f(3)\le f(2)\le f(4)\le4$

곧 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{40+20}{256}=\frac{15}{64}$

18. $\angle B_1E_1F_1=\pi-\angle F_1B_1E_1-\angle B_1F_1E_1=\frac{5}{12}\pi$이고

$\angle E_1H_1B_1=\angle B_1E_1F_1=\frac{5}{12}\pi$이므로

$\angle H_1B_1E_1=\pi-\frac{5}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{6}$ 이고

$\angle G_1B_1H_1=\angle F_1B_1E_1-\angle H_1B_1E_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\angle G_1B_1H_1=\angle H_1B_1E_1$이므로 선분 E_1H_1과 호 E_1H_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 선분 G_1H_1과 호 G_1H_1로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 두 선분 F_1G_1, F_1H_1과 호 G_1H_1로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 E_1H_1과 호 E_1H_1로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $F_1G_1H_1$의 넓이와 같다.

삼각형 $A_1B_1F_1$에서 $\overline{B_1F_1}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2+2\sqrt{3}$

이므로 $\overline{F_1G_1}=\overline{B_1F_1}-\overline{B_1G_1}=2+2\sqrt{3}-4=2\sqrt{3}-2$

이때 점 H_1에서 선분 B_1F_1에 내린 수선의 발을 점 H라 하면

삼각형 B_1H_1H에서 $\angle B_1H_1H=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{HH_1}=\overline{B_1H_1}\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

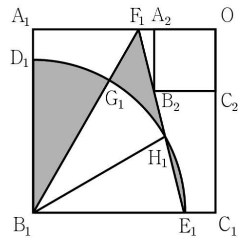
따라서 삼각형 $F_1G_1H_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{F_1G_1}\times\overline{HH_1}=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times2=2\sqrt{3}-2$

한편, 부채꼴 $B_1D_1G_1$의 중심각은 $\frac{\pi}{6}$이므로

부채꼴 $B_1D_1G_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $S_1=2\sqrt{3}-2+\frac{4}{3}\pi$



$\overline{OA_2}=a$로 놓으면 $\overline{A_2B_2}=a$이고

$\angle A_2F_1B_2=\pi-\angle B_1F_1A_1-\angle B_1F_1E_1=\frac{5}{12}\pi$이므로

삼각형 $A_2F_1B_2$에서 $\overline{A_2F_1}=\frac{a}{\tan\frac{5}{12}\pi}$

이때 $\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times1}=2+\sqrt{3}$

따라서 $\overline{A_2F_1}=\frac{a}{2+\sqrt{3}}=a(2-\sqrt{3})$이고

$\overline{OF_1}=\overline{OA_2}+\overline{A_2F_1}=a+a(2-\sqrt{3})=a(3-\sqrt{3})$

삼각형 $A_1B_1F_1$에서

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1B_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=(3+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1+\sqrt{3}$

따라서 $\overline{OA_1}=\overline{OF_1}+\overline{A_1F_1}$에서

$3+\sqrt{3}=a(3-\sqrt{3})+1+\sqrt{3}$, $a(3-\sqrt{3})=2$, $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

두 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비는

$3+\sqrt{3}:\frac{3+\sqrt{3}}{3}=1:\frac{1}{3}$ 이므로

두 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 넓이의 비는 $1:\frac{1}{9}$

따라서 S_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}-2+\frac{4}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}-2+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{9}}$

$=\frac{9}{8}\times\left(2\sqrt{3}-2+\frac{4}{3}\pi\right)$

$=\frac{9\sqrt{3}-9+6\pi}{4}$

19. $f(x)=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\sin(t^2)\,dt=x\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin(t^2)\,dt$

ㄱ. $g(x)=\sin(x^2)$로 놓으면 $g'(x)=2x\cos(x^2)$

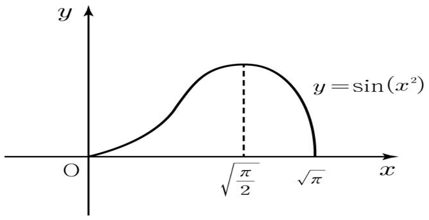
$0 \le x \le \sqrt{\pi}$ 인 x에 대하여 $g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



세 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x=\sqrt{\pi}$, $y=1$ 및 x축으로 둘러싸인 영역을 A, 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 와 곡선 $y=g(x)$ 및 x축으로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

두 영역 A, B의 넓이는 각각 $\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx$ 이고 영역 A의 넓이가 영역 B의 넓이보다 크므로

$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx < \sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\sin(t^2)dt + x\sin(x^2)$

이므로 $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin(x^2)dx+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$= -\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)dx+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ㄱ에서 $-\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)dx > \sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi}$

곧, $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) > \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi}$

$= \sqrt{2\pi}-\sqrt{\pi}$

따라서 $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) > \sqrt{2\pi}-\sqrt{\pi}$ (참)

ㄷ. $f'(\sqrt{\pi})=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)dx+\sqrt{\pi}\sin\pi=0$ 이고

ㄴ에서 $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) > \sqrt{2\pi}-\sqrt{\pi}$ 이므로

$f'(\sqrt{\pi})-f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) < \sqrt{\pi}-\sqrt{2\pi}$

양변을 $\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 로 나누면

$$\frac{f'(\sqrt{\pi})-f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} < \frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

이때 $\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{f'(\sqrt{\pi})-f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} < -\sqrt{2}$$

함수 $f'(x)$는 닫힌구간 $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{\pi}\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{\pi}\right)$에서 미분가능하므로 평균값정리에 의하여

$\frac{f'(\sqrt{\pi})-f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{\pi}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = f''(c)$를 만족시키는 실수 c가

열린구간 $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{\pi}\right)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f''(c) < -\sqrt{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. (ⅰ) $a_1=2^k$ (k는 자연수)인 경우와
(ⅱ) $2^{k-1} < a_1 < 2^k$ (k는 자연수)인 경우로 나누어
생각해보자.

(ⅰ) $a_1=2^k$ (k는 자연수)인 경우 :
$a_{k+1}=1$이므로 문제의 조건에 의하여 $k+1=9$
곧 $k=8$
따라서 가능한 a_1의 값은 $a_1=2^8=256$

(ⅱ) $2^{k-1} < a_1 < 2^k$ (k는 자연수)인 경우 :
$\frac{1}{2} < a_{k+1} < 1$이므로 $a_{k+2}=\{3+(-1)^{a_1}\}^{k-1}$
이때 a_1의 값에 따라 a_{k+2}의 값이 달라지므로
(1) a_1이 홀수인 경우와 (2) a_1이 짝수인 경우로 나누어
생각해보자.

(1) a_1이 홀수인 경우 :
$a_{k+2}=\{3+(-1)\}^{k-1}=2^{k-1}$, 곧 $a_{2k+1}=1$
문제의 조건에 의하여 $2k+1=9$, 곧 $k=4$
그러면 a_1의 값의 범위는 $2^3 < a_1 < 2^4$이고, a_1은
홀수이므로 가능한 a_1의 값은 9, 11, 13, 15

(2) a_1이 짝수인 경우 :
$a_{k+2}=(3+1)^{k-1}=2^{2k-2}$, 곧 $a_{3k}=1$
문제의 조건에 의하여 $3k=9$, 곧 $k=3$
그러면 a_1의 값의 범위는 $2^2 < a_1 < 2^3$이고, a_1은

짝수이므로 가능한 a_1의 값은 6

따라서 구하는 모든 a_1의 값의 합은
$256+9+11+13+15+6=310$

21. $\int_0^{f(x)} f'(g(t))\,dt=\int_x^1 h(t)e^{-2t}\,dt$에서 $x=1$을 대입하면

$\int_0^{f(1)} f'(g(t))\,dt=\int_1^1 h(t)e^{-2t}dt=0$이고 함수 $f(t)$는
미분가능하고 증가함수 이므로 모든 실수 t에 대하여
$f'(t)\geq 0$이다. 따라서 $f(1)=0$ ……㉠

$\int_0^{f(x)} f'(g(t))\,dt=\int_x^1 h(t)e^{-2t}\,dt$의 양변을 x에 대하여

미분하면 $f'(g(f(x)))\times f'(x)=-h(x)e^{-2x}$
함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수 이므로 $g(f(x))=x$
따라서 $\{f'(x)\}^2=-h(x)e^{-2x}$이고 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)\geq 0$이므로 $f'(x)=\sqrt{-h(x)}\,e^{-x}$

이때 함수 $h(x)$는 이차함수이고 모든 실수 x에 대하여
$-h(x)\geq 0$, $h(x)\leq 0$
따라서 이차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.
$h(2)=0$이므로 $h(x)=a(x-2)(x-\alpha)$ $(a<0)$라 하자.
$\alpha\neq 2$이면 $h(x)>0$을 만족하는 x값이 존재하므로 조건을
만족시키지 않는다.
따라서 $\alpha=2$이므로 $h(x)=a(x-2)^2$
$f'(1)=\sqrt{-h(1)}\,e^{-1}=\frac{\sqrt{-a}}{e}=\frac{2}{e}$이므로 $a=-4$
따라서 $f'(x)=\sqrt{-h(x)}\,e^{-x}=\sqrt{4(x-2)^2}\,e^{-x}$
$=2|x-2|\,e^{-x}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x-2)e^{-x} & (x\geq 2) \\ -2(x-2)e^{-x} & (x<2)\end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} -2(x-1)e^{-x}+C_1 & (x\geq 2) \\ 2(x-1)e^{-x}+C_2 & (x<2)\end{cases}$$

(단, C_1와 C_2는 적분상수)
㉠에서 $f(1)=C_2=0$
또한, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$-2e^{-2}+C_1=2e^{-2}$, 곧 $C_1=4e^{-2}$
따라서 $f(4)=-6e^{-4}+4e^{-2}$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\frac{x^2}{1-\cos x}$
$=1\times 2=2$ ……[참고]

[참고]
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$
$$=\frac{2}{1^2}=2$$

23. 등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d로 놓으면
$a_n=a+(n-1)d$이고 $a_{n+1}=a+nd$
$a_n+a_{n+1}=2a+(2n-1)d$
$=2dn+2a-d=4n$
가 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로
$2d=4$, $2a-d=0$
따라서 $a=1$, $d=2$이므로 $a_n=2n-1$
구하는 값은 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)$
$=2\times\frac{10\times 11}{2}-10$
$=100$

24. $f(x)=\frac{1}{8}x^2-\ln x$로 놓으면 $x=1$부터
$x=e$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_1^e\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$
함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{x}$이고
$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$
이므로
$$\int_1^e\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^e\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^2+\ln x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{8}e^2+1-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1}{8}e^2+\frac{7}{8}$$

따라서 $p=\frac{1}{8}$이고 $q=\frac{7}{8}$이므로 구하는 값은 $\frac{q}{p}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{8}}=7$

25. 점 A의 x좌표를 α $(\alpha<0)$라 하면
점 A의 좌표는$(\alpha,\,2^{\alpha+a})$
직선 AB는 x축에 평행하고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로
점 B의 좌표는 $(\alpha+2,\,2^{\alpha+a})$
또한, 직선 BC는 x축에 수직이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로
점 C의 좌표는 $(\alpha+2,\,2^{\alpha+a}+2)$
점 C는 곡선 $y=2^{x+a}$ 위의 점이므로 $2^{\alpha+a+2}=2^{\alpha+a}+2$,
$4\times 2^{\alpha+a}=2^{\alpha+a}+2$, 곧 $2^{\alpha+a}=\frac{2}{3}$
따라서 점 C의 좌표는 $\left(\alpha+2,\,\frac{8}{3}\right)$
직선 CD는 x축에 평행하고 $\overline{\mathrm{CD}}=2$이므로
점 D의 좌표는 $\left(\alpha,\,\frac{8}{3}\right)$

$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 이므로 $\alpha^2=\frac{16}{9}$,

곧 $\alpha=-\frac{4}{3}\ (\alpha<0)$

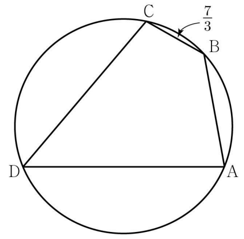
따라서 점 B의 좌표는 $(\alpha+2,\ 2^{\alpha+a})=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $k=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 구하는 값은 $90k^2=90\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=90\times\frac{8}{9}=80$

26. $\cos(\angle\mathrm{BCD})$의 값이 음수이므로 $\angle\mathrm{BCD}>\frac{\pi}{2}$이고

원 O에 내접하는 사각형 ABCD는 다음과 같다.



$\sin(\angle\mathrm{BCD})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{BCD})}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고

$\sin(\angle\mathrm{BAD})=\sin(\pi-\angle\mathrm{BCD})=\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이의 합과 같으므로 $\overline{\mathrm{BC}}=a$로 놓으면

사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin(\angle\mathrm{BAD})+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{BCD})$

$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\sqrt{2}+\frac{7\sqrt{2}}{9}a=\frac{16\sqrt{2}}{9}$,

$\frac{7\sqrt{2}}{9}a=\frac{7\sqrt{2}}{9}$ 따라서 $a=1$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle\mathrm{BCD})$

$=1+\frac{49}{9}-2\times1\times\frac{7}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{58}{9}+\frac{14}{9}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{2}\ (\overline{\mathrm{BD}}>0)$

또한 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면

$2R=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3$, 곧 $R=\frac{3}{2}$

따라서 원 O의 넓이는 $\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\pi=\frac{9}{4}\pi$, $S=\frac{9}{4}\pi$

구하는 값은 $\frac{40}{\pi}\times S=\frac{40}{\pi}\times\frac{9}{4}\pi=90$

27. 이 공장에서 생산한 에어컨 1개의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다. 표본의 크기가 n_1일 때 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

이 신뢰구간이 $79.02\le m\le80.98$이므로

$2\times\overline{x_1}=79.02+80.98=160$에서 $\overline{x_1}=80$

또한, $80+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=80.98$, $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=0.98$에서

$\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\frac{1}{2}$

표본의 크기가 n_2일 때 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

이 신뢰구간이 $\frac{15}{16}\overline{x_1}-0.84\le m\le\frac{15}{16}\overline{x_1}+0.84$이므로

$2\times\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}-0.84+\frac{15}{16}\overline{x_1}+0.84=\frac{15}{8}\overline{x_1}=\frac{15}{8}\times80=150$,

$\overline{x_2}=75$

또한, $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=0.84$에서 $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=\frac{3}{7}$

$\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}=\frac{\sqrt{n_1}}{\sigma}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=2\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$이므로 $\frac{n_1}{n_2}=\frac{36}{49}$

n_1, n_2는 50이하의 자연수이므로 $n_1=36$, $n_2=49$

따라서 $\sigma=\frac{3}{7}\times\sqrt{n_2}=\frac{3}{7}\times\sqrt{49}=3$

구하는 값은 $\sigma+\overline{x_2}=3+75=78$

28. 호 BP의 길이와 호 PQ의 길이가 같으므로 $\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{POQ}=\theta$

호 BP의 중심각이 θ이므로 호 BP의 원주각은 $\frac{\theta}{2}$

곧, $\angle\mathrm{BAP}=\frac{\theta}{2}$

삼각형 POA는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OAP}=\frac{\theta}{2}$

삼각형 POS에서

$\angle\mathrm{OSP}=\pi-(\angle\mathrm{POS}+\angle\mathrm{OPS})=\pi-\left(\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{3\theta}{2}$

삼각형 POS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin\left(\pi-\frac{3\theta}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{3\theta}{2}}$ 곧, $\overline{\mathrm{OS}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}$

따라서 삼각형 POS의 넓이는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\times1\times\sin\theta$

한편, $\angle\mathrm{PSQ}=\pi-\angle\mathrm{OSP}=\pi-\left(\pi-\frac{3\theta}{2}\right)=\frac{3\theta}{2}$ 이고

$\angle\mathrm{PSQ}=\angle\mathrm{SQR}=\frac{3\theta}{2}$ (평행선의 엇각)

이때 삼각형 QOR은 이등변 삼각형이므로 점 O에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{OQH}=\frac{3\theta}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{QH}}=\cos\frac{3\theta}{2}$

$\overline{QR} = 2\times\overline{QH}$ 이므로 $\overline{QR} = 2\cos\frac{3\theta}{2}$

또한, $\overline{QS} = \overline{OQ} - \overline{OS} = 1 - \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}$

따라서 삼각형 SQR의 넓이는

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\right)\times 2\cos\frac{3\theta}{2}\times\sin\frac{3\theta}{2}$$

따라서

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\right)\times 2\cos\frac{3\theta}{2}\times\sin\frac{3\theta}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\times 1\times\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1 - \frac{1}{3}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\right)\times 2\cos\frac{3\theta}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\frac{3\theta}{2}}\times\frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\times 2}{\frac{1}{3}}\times\frac{3}{2} = 6,\ \text{곧 } k = 6$$

따라서 구하는 값은 $18k = 108$

29. 조건 가, 나, 다에 해당하는 사건을 각각 P, Q, R라 하면 구하는 경우의 수는 '사건 P의 경우'에서 '사건 P가 일어나고 두 사건 Q, R가 같이 일어나지 않는 경우'를 제외한 값이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$n(P) - n(P\cap(Q\cap R)^C)$
$= n(P) - n(P\cap(Q^C\cup R^C))$
$= n(P) - n((P\cap Q^C)\cup(P\cap R^C))$
$= n(P) - \{n(P\cap Q^C) + n(P\cap R^C) - n(P\cap Q^C\cap R^C)\}$

일곱 번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A, B, C, D, E의 순서대로 각 칸에 놓여야 하므로 첫 번째 칸부터 여섯 번째 칸까지는 인형 A, B, C를 놓고, 여덟 번째 칸부터 열두 번째 칸까지는 인형 C, D, E를 놓아야 한다.
첫 번째 칸부터 여섯 번째 칸까지는 인형 A, B, C의 개수를 a, b, c_1이라 하면 $a+b+c_1 = 6\ (a\ge1,\ b\ge1,\ c_1\ge0)$이고, 여덟 번째 칸부터 열두 번째 칸까지는 인형 C, D, E의 개수를 c_2, d, e라 하면 $c_2+d+e = 5\ (c_2\ge0,\ d\ge1,\ e\ge1)$이다.

사건 P의 경우의 수는 ${}_3H_4\times{}_3H_3 = 150$

사건 $P\cap Q^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만인 사건이다.
$a=1$, $d=1$인 경우 ${}_2H_4\times{}_2H_3 = 20$
$a=1$, $d=2$인 경우 ${}_2H_4\times{}_2H_2 = 15$
$a=2$, $d=1$인 경우 ${}_2H_3\times{}_2H_3 = 16$
따라서 $n(P\cap Q^C) = 20+15+16 = 51$

사건 $P\cap R^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만인 사건이므로
사건 $P\cap R^C$의 경우의 수와 사건 $P\cap Q^C$의 경우의 수는 같다.
따라서 $n(P\cap R^C) = 51$

사건 $P\cap Q^C\cap R^C$은 7번째 칸에 인형 C가 있고 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만이고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만인 사건이다.
따라서 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합이 4미만이고 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합이 4미만이 되도록 하는 경우는 각 경우에 3가지씩 있으므로
$n(P\cap Q^C\cap R^C) = 3\times3 = 9$

따라서
$n(P) - \{n(P\cap Q^C) + n(P\cap R^C) - n(P\cap Q^C\cap R^C)\}$
$= 150 - (51\times2 - 9)$
$= 57$

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 $x=1$에서 대칭이다.
$f(x) = a(x-1)^2 + b\ \ (b>0)$라 하면
$g(x) = \ln\{a(x-1)^2+b\} + kx$
함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x) = \dfrac{2a(x-1)}{a(x-1)^2+b} + k$이고

이계도함수는 $g''(x) = \dfrac{2a\times\{a(x-1)^2+b\} - \{2a(x-1)\}^2}{\{a(x-1)^2+b\}^2}$

$$= \frac{2ab - 2a^2(x-1)^2}{\{a(x-1)^2+b\}^2}$$

$$g''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2ab - 2a^2\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}{\left\{a\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+b\right\}^2} = \frac{2ab - \frac{a^2}{8}}{\left(\frac{a}{16}+b\right)^2} = 0$$

$2ab - \dfrac{a^2}{8} = 0$, $a(16b-a) = 0$, $a = 16b\ \ (a\ne0)$

따라서 함수 $g'(x) = \dfrac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1} + k$이고

$g''(x) = \dfrac{32 - 512(x-1)^2}{\{16(x-1)^2+1\}^2}$

$g''(x) = 0$에서 $32 - 512(x-1)^2 = 0$, $(x-1)^2 = \dfrac{1}{16}$,

$x = \dfrac{3}{4}$ 또는 $x = \dfrac{5}{4}$

함수 $g'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때

$$g'(x)+g'(2-x)=\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}+k+\frac{32\{(2-x)-1\}}{16\{(2-x)-1\}^2+1}+k$$

$$=\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}+\frac{32(1-x)}{16(1-x)^2+1}+2k$$

$$=\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}-\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}+2k$$

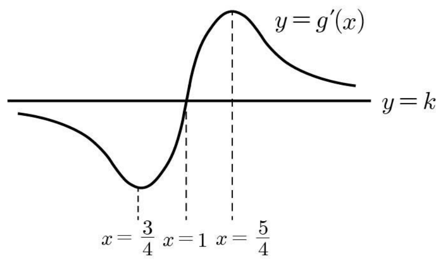
$$=2k$$

이므로 함수 $g'(x)$는 점 $(1, k)$에 대칭인 함수이다.

$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}+k\right\}=k$$

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{32(x-1)}{16(x-1)^2+1}+k\right\}=k$$

따라서 함수 $g'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

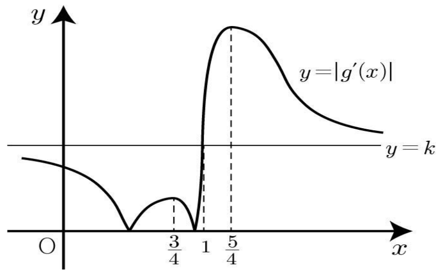


이때 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$인 경우 $|g'(x)|=g'(x)$이므로 곡선 $y=|g'(x)|$와 직선 $y=\alpha$의 만나는 점의 개수는 3이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $g'(x)<0$인 x가 존재한다.

(ⅰ) $\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|\le k$인 경우

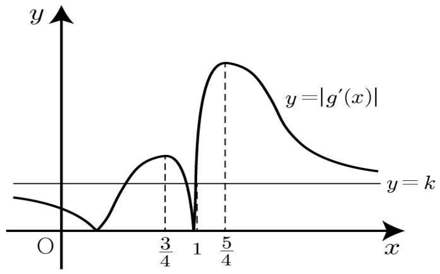
함수 $|g'(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



이때 곡선 $y=|g'(x)|$와 $y=\alpha$의 만나는 점이 3이 되도록 하는 α는 $\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|$ 하나만 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|>k$인 경우

함수 $|g'(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



곡선 $y=|g'(x)|$와 $y=\alpha$의 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 α는 $\alpha_1=k$, $\alpha_2=\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|$이다.

$\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|>k$에서 $g'\left(\frac{3}{4}\right)<-k$이므로

$$g'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{32\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{16\times\frac{1}{16}+1}+k=-4+k<-k,\ \text{곧}\ k<2$$

k는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right|=3$

이때 $g(1)=1$이므로 $g(1)=\ln b+1=1$, $\ln b=0$, $b=1$

따라서 $a=16$이고 함수 $g(x)$는

$g(x)=\ln\{16(x-1)^2+1\}+x$

따라서 $\alpha_1+\alpha_2+g(3)=1+3+\ln(16\times 4+1)+3$

$=7+\ln 65$

이므로 $p=7$이고 $q=65$

구하는 값은 $p+q=72$