적분으로 표현된 함수의 미분

고등학교 수학 문제에서 종종 등장하는 토픽 중 하나가 적분으로 표현된 함수의 미분입니다. 이러한 문제가 어렵게 느껴지는 이유는, 바로 함수식에 여러 변수가 등장하면서 기존의 공식들을 그대로 적용할 수 없는 경우가 생기기 때문입니다. 예를 들어 아래와 같은 문제를 풀어봅시다.

예시

$f(x) = \int_0^x (x+t)dt$ 일 때, $f'(x)$를 구하시오.

이러한 문제를 풀 때, 가장 많이 하는 실수 중 하나가 바로 다음과 같은 풀이를 쓰는 것입니다.

(틀린)풀이

$f(x) = \int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x) = g(x)$이다. 위의 문제에서는 $g(t) = x+t$로 놓으면 되므로 $f'(x) = g(x) = 2x$가 된다.

위 풀이가 잘못된 이유는 무엇일까요? 가장 많이 들어본 설명은, $g(t) = x+t$에서 x역시 변수이기 때문에 단순히 위와 같이 계산할 수 없다는 설명일 것입니다. 하지만, $\int_0^x g(t)dt$에서 적분 계산은 t에 대해 이루어지므로 x는 상수로 취급할 수 있다고 배웠는데, 그렇다면 어디서 문제가 생긴 것일까요? "$f(x) = \int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x) = g(x)$이다."라는 명제가 틀린 것일까요?

그렇지는 않습니다. 문제는 바로, 우리가 위에서 작성한 $g(t)$가 고정된 함수가 아니라는 점입니다. "$f(x) = \int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x) = g(x)$이다."가 성립하기 위해서는, 매우 당연하게도 $g(t)$라는 함수 자체가 변해서는 안됩니다. 그런데 $g(t) = x+t$로 정의하게 되면, x값에 따라서 $g(t)$라는 함수 자체가 변하게 되므로 위의 명제를 그대로 적용할 수 없습니다. 더 자세히 말하자면, $g(x,t) = x+t$라는 이변수 함수를 일변수 함수로 혼동하여 $g(t)$라는 고정된 함수가 존재한다고 본 것이 문제입니다.

따라서 새로운 함수를 도입하여 위의 문제를 해결하고자 한다면, 아래와 같은 표현을 사용해야 합니다.

풀이

$g(x,t)=x+t$로 두면 $f(x)=\int_0^x g(x,t)dt$이고 이때 $f'(x)$를 구하면 된다.

그런데 우리는 이변수 함수가 포함된 적분식을 쉽게 미분하는 법을 알지 못합니다. (최소한 지금까지의 고등학교 교육과정에는 등장하지 않았습니다.) 그렇다면 이러한 계산을 쉽게 하는 방법이 있을까요? 그것이 바로 여러곳에서 종종 언급되던 라이프니츠 적분 공식입니다. 공식의 형태는 다음과 같습니다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)dt = f(x,x)+\int_a^x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

다만 위의 공식을 수험생이 알 필요는 없고, 단지 이변수 함수의 경우 적분식을 미분하는 것을 일변수 함수의 경우처럼 단순히 생각해서는 안 된다는 것만 기억해두면 되겠습니다.

그렇다면 수험생의 입장에서는, 저러한 유형의 문제를 풀 때 적분식을 직접 계산하여서 함수를 구한 후 미분을 수행해야 합니다. 이때 유의해야 할 것은, 적분식 안에서 적분되는 변수와 그렇지 않은 변수를 구분하는 것입니다. 위에서 말했듯이 적분의 대상이 되는 변수 외에는 상수 취급을 하여 계산하여주면 됩니다.

풀이

$\int_0^x (x+t)dt$는 t에 대한 적분이므로 계산하면 $\int_0^x (x+t)dt=\frac{3}{2}x^2$이고,
이를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=3x$가 된다.

비슷한 유형의 문제를 보더라도 이 칼럼에서 언급한 사실들을 기억하면서 문제를 해결한다면 실수 때문에 문제를 틀릴 일은 없으리라 믿습니다.