[정답률 21%]

1. 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 차례로 m, n이라 하자. $i^m \cdot (-i)^n$의 값이 1이 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.)[1] [4점][08년.11수능 - 나형 22번]

[정답률 31%]

2. 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 한 주사위 눈의 수가 다른 주사위 눈의 수의 배수가 될 확률은? [4점] [04.11수능-나형29번][2]

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{18}$

④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[정답률39%-나형][정답률49%-가형]

3. 정보이론에서는 사건 E가 발생했을 때, 사건 E의 정보량 $I(E)$가 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$I(E) = -\log_2 \mathrm{P(E)}$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 사건 E가 일어날 확률 $\mathrm{P}(E)$는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.)[3]

[4점][08년.11수능 - 나형 17번]

<보 기>

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E)=1$이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P(A \cap B)}>0$이면 $I(A\cap B) = I(A)+I(B)$이다.

ㄷ. $\mathrm{P(A)}>0$, $\mathrm{P(B)}>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B) \leq I(A)+I(B)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률43%]

4. 다음은 어느 회사에서 전체 직원 360명을 대상으로 재직 연수와 새로운 조직 개편안에 대한 찬반 여부를 조사한 표이다.

(단위: 명)

재직 연수 \ 찬반 여부	찬성	반대	계
10년 미만	a	b	120
10년 이상	c	d	240
계	150	210	360

재직 연수가 10년 미만일 사건과 조직 개편안에 찬성할 사건이 서로 독립일 때, a의 값을 구하시오. [4점] [04.11수능-나형24번][4]

[정답률 43%]

5. $1, 2, 3, \cdots, 3n$ (n은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 각각 $a, b(a<b)$라 하자. $3a<b$일 확률을 P_n이라 할 때, 다음은 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n$의 값을 구하는 과정이다.

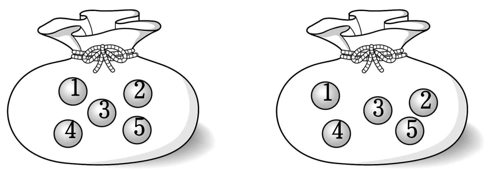
> $3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$이다.
> $3a<b$인 경우에는 $b\leq 3n$이므로 $1\leq a<n$이다.
> 따라서 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는 b의 경우의 수는 (가)이므로
> $$\mathrm{P}_n=\frac{(\text{나})}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}\text{이다.}$$
> 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}_n=$ (다)이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점] [06.11수능-나형15번][5]

	(가)	(나)	(다)
①	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
②	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
③	$3(n-k)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
④	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
⑤	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$

[정답률 44%]

6. 주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다.
이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은?6.
[4점][08년.11수능 - 나형 16번]



① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

[정답률 40%]

7. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

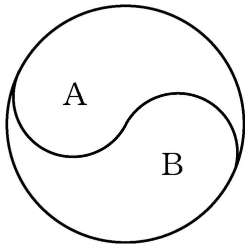
(가) $a+b+c$는 홀수이다.
(나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{17}{42}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

[4점] [09. 9 평가원-나형12번]7.

[정답률 46%]

8. 각 면에 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던져서 밑면에 적힌 숫자가 1이면 오른쪽 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에 색을 칠하기로 하였다.
두 영역에 색이 모두 칠해질 때까지 이 상자를 계속 던질 때, 3번째에 마칠 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점] [05.11수능-나형23번]8.



[정답률 9%]

9. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
[4점] [10. 9 평가원-나형24번]9.

[정답률 38%]

10. 다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하시오.[10]

(단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.)

[4점][2012년 11월 수능 나형-29번]

	1열	2열	3열
1행			
2행			
3행			

1. 답 23
$i^m \cdot (-i)^n = (-1)^n \cdot i^{m+n}$ 이므로
$i^m \cdot (-1)^n$ 의 값이 1이 되는 경우는
n 이 짝수이고 $m+n=4, 8, 12$
또는 n 이 홀수이고 $m+n=2, 6, 10$ 이다.
(1) n 이 짝수이고 $m+n=4, 8, 12$ 인 경우는
$(2,2),(2,6),(4,4),(6,2),(6,6)$ 의 5가지
(2) n 이 홀수이고 $m+n=2, 6, 10$ 인 경우는
$(1,1),(1,5),(3,3),(5,1),(5,5)$ 의 5가지 따라서,
구하는 확률은 $\frac{5+5}{36}=\frac{5}{18}$ 이므로 $p+q=18+5=23$

2. 정답 ③
(풀이)두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)
이 때, 한 주사위가 다른 주사위의 배수가 되는 경우는 $(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (1,6), (2,1), (3,1), \cdots, (6,1)$, $(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (6,2)$
$(3,3), (3,6), (6,3), (4,4), (5,5), (6,6)$으로 총 22가지이다
따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

3. 답 ⑤
ㄱ. $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{2}$ 이므로
$I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(E)=-\log_2 \frac{1}{2}=1$ (참)
ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
∴
$I(A\cap B)=-\log_2 P(A\cap B)=-\log_2 P(A)P(B)$
$=-\{\log_2 P(A)+\log_2 P(B)\}$
$=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)=I(A)+I(B)$ (참)
ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2 P(A\cup B)=-\log_2 \{P(A\cup B)\}^2$
$I(A)+I(B)=-\log_2 \mathrm{P}(A)-\log_2 \mathrm{P}(B)=-\log_2 P(A)P(B)$
$P(A\cup B)\geq P(A)>0$, $P(A\cup B)\geq P(B)>0$ 이므로
$\{P(A\cup B)\}^2 \geq P(A)P(B)$
$\therefore \log_2\{P(A\cup B)\}^2 \geq \log_2 P(A)P(B)$
$-\log_2\{P(A\cup B)\}^2 \leq -\log_2 P(A)P(B)$
$\therefore 2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B)$ (참)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 50
(풀이) 재직 연수가 10년 미만일 사건을 A, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립일 필요충분조건은
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 이다.
이 때, $P(A)=\frac{120}{360}$, $P(B)=\frac{150}{360}$,
$P(A\cap B)=\frac{a}{360}$ 이므로
$\frac{a}{360}=\frac{120}{360}\cdot\frac{150}{360}$ 에서 $a=50$

5. 정답 ①
(풀이) $3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$ 이다.
$a=k$ $(k=1,2,3,\cdots,n-1)$이면 $3a<b$를 만족시키는 b는 $3k+1, 3k+2, \cdots, 3n$ 중의 하나이어야 하므로 b의 경우의 수는
$3n-3k=3(n-k)$ 이다.

$$\therefore \mathrm{P}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(n-k)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때,
$\sum_{k=1}^{n-1}3(n-k)=3n(n-1)-\frac{3}{2}n(n-1)=\frac{3}{2}n(n-1)$ 이므로

$$\mathrm{P}_n=\frac{\frac{3}{2}n(n-1)}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$$

이 때, ${}_{3n}\mathrm{C}_2=\frac{3n(3n-1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2-3n}{2}}{\frac{9n^2-3n}{2}}=\frac{1}{3}$$

이상에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은

$3(n-k)$, $\frac{3}{2}n(n-1)$, $\frac{1}{3}$ 이다.

6. 답 ①
철수가 주머니 A에서 어느 한 숫자를 선택하고 영희가 주머니 B에서 그와 다른 숫자를 선택할
확률은 ${}_5\mathrm{C}_1\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$
철수는 두 사람이 꺼낸 첫 번째 숫자 2개를 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 한 개를 선택하고, 영희는 그와 같은 숫자를 선택해야 하므로 그 확률은 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{20}$

7. 정답 ①

$a<b<c$로 순서가 정해져 있기 때문에, 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 가짓수는 ${}_9C_3$이다.

(가) $a+b+c$가 홀수이려면, {짝,짝,홀} 또는 {홀,홀,홀}

(나) $a\times b\times c$가 3의 배수이려면, 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

이 두 조건을 모두 만족시키기 위해 다음과 같이 생각한다.

i) {짝,짝,홀}의 경우

- 6이 포함된 경우 홀수는 아무 수나 가능
- 6이 포함되지 않은 경우 홀수는 3이나 9만 가능

∴ $(2,\ 6),\ (4,\ 6),\ (6,\ 8)$에 들어갈 홀수는 5가지

→ $3\times5=15$

$(2,\ 4),\ (2,\ 8),\ (4,\ 8)$에 들어갈 홀수는 2가지

→ $3\times2=6$

ii) {홀,홀,홀}의 경우

- 3이 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
- 9가 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
- 3, 9가 동시에 포함되는 경우 나머지 한 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_3C_1$

∴ ${}_4C_2+{}_4C_2-{}_3C_1=9$

따라서 i)과 ii)의 가짓수를 모두 더하면 $15+6+9=30$이므로

전체 확률 = $\dfrac{30}{{}_9C_3}=\dfrac{5}{14}$

8. 정답 19

(풀이)A영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\dfrac{3}{4}$,

B영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\dfrac{1}{4}$이다.

이 때, 3번째 시행에서 마치는 경우는

A, A, B의 순서로 칠하거나,

B, B, A의 순서로 칠하게 되는 경우이다.

이 때, 위의 각 경우의 확률은 각각

$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{64}$, $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{64}$이므로

구하는 확률은

$$\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$$

∴ $p+q=16+3=19$

9.정답 11

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 $(a,\ b,\ c)$로 나타내기로 하자.

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 (0, 1, 2)이면 두 번의 시행으로는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)를 만들 수가 없다. 또한, 세 번의 시행으로 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times3\times3=27$ 이고 세 번의 시행에서 (0, 0, 0)이 되는 경우는

$(0,1,2)\to(0,2,2)\to(0,2,3)\to(0,3,3)$

$(0,1,2)\to(0,2,2)\to(0,3,2)\to(0,3,3)$

$(0,1,2)\to(0,1,3)\to(0,2,3)\to(0,3,3)$

의 3가지이고 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)가 될 수 있는 경우도 각각 3가지씩이다.

따라서 3번째 시행에서 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $P(A^c)=1-\dfrac{3+3+3}{27}=\dfrac{2}{3}$

또한, 3번의 시행 후에는 모든 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 (0, 1, 2) 또는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)이므로 4번째, 5번째 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고 6번째 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 같은 방법으로 생각하면 $\dfrac{1}{3}$이다. 따라서

구하고자 하는 확률은 $1\times1\times\dfrac{2}{3}\times1\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

$\therefore p+q=11$

10. 정답 68

8명이 자리에 앉는 경우의 수는 $8!$ 이때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^c은 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되지 않는 사건이다.

이때, 사건 A^c이 일어날 경우는 다음 두 가지이다.

	1열	2열	3열
1행	남	여	남
2행	여	╳	여
3행	남	여	남

	1열	2열	3열
1행	여	남	여
2행	남	╳	남
3행	여	남	여

따라서 A^c이 일어나는 경우의 수는 $4!\times4!\times2$

$$\therefore\ p=\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\frac{4!\times4!\times2}{8!}$$

$$=1-\frac{4\times3\times2\times2}{8\times7\times6\times5}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

$\therefore 70p = 70 \times \frac{34}{35} = 68$

[다른 풀이]

여사건은 이웃한 남학생이 없는 경우이므로

$p = 1 - \frac{4!4! \times 2}{8!} = \frac{34}{35}$

$\therefore 70p = 68$