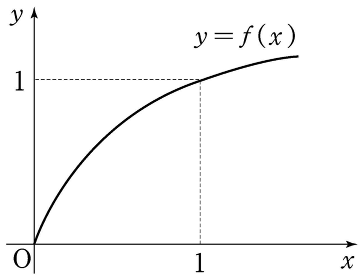
[정답률 26%]

1. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 와 같은 값을 갖는 것은? [4점] [04.11수능-가형10번][1]

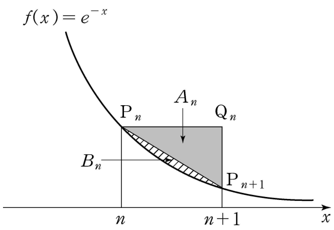
① $\int_0^1 g(x)\,dx$ ② $\int_0^1 xg(x)\,dx$

③ $\int_0^1 f(x)\,dx$ ④ $\int_0^1 xf(x)\,dx$

⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

[정답률 46%]

2. 함수 $f(x)=e^{-x}$ 과 자연수 n에 대하여 점 P_n, Q_n 을 각각 $\mathrm{P}_n(n, f(n))$, $\mathrm{Q}_n(n+1, f(n))$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이를 A_n, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 B_n 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
[4점][05.11수능-가형28번][2]



<보 기>

ㄱ. $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = f(n)-(A_n+B_n)$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2e}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{3-e}{2e(e-1)}$

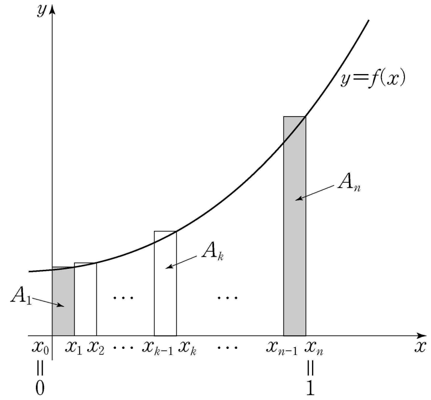
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 36%]

3. $x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)$ 의 길이를 구하시오. [4점] [07.11수능-가형 30번][3]

[정답률 28%]

4. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a \geq 0$, $b>0$)가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0, 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $0=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=1$
이라 하자. 폐구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. ($k=1$, 2, $\cdots$, n)



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.
[4점][10.11수능-가형 21번][4]

[정답률 40%]

5. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t ($t \geq -1$)에 대하여 $-1 \leq x \leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.
$\int_{-1}^{1}g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점] [10.11수능-가형 24번][5]

[정답률 38%]

6. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] [10.11수능-가형 9번][6]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$
ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.
ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 41%]

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$\begin{cases} x=4(\cos t+\sin t) \\ y=\cos 2t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

이다. 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리(경과 거리)를 $a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.
[4점] [10.11수능-가형 30번][7]

[정답률 49%]

8. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\int_a^x 2+\sin(t^2)dt$라 하자. $f''(a)=\sqrt{3}a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은? (단, a는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 인 상수이다.)8.

[4점] [08년.11수능-가형 29번]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[정답률 17%]

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a} f(x)dx=k$ $(a>0,\ 0<k<1)$ 일 때,

$\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$ 의 값을 k로 나타낸 것은? 9.

[3점] [10년 11월 수능가형-28번]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

[정답률 40%]

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은? 10.

[4점] [10년.11수능-가형 29번]

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$
(나) $0<a<b<2$이면 $f'(a)\le f'(b)$이다.
(다) 구간 $(0,1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$

④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

[정답률 47%]

11. 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오.11. [4점] [11년.11수능-가형 28번]

1. 정답 ③

(풀이) $\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)\right\}\frac{1}{n}+\left\{g\left(\frac{2}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}+\left\{g\left(\frac{3}{n}\right)-g\left(\frac{2}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}$

$+\ldots+\left\{g\left(\frac{n}{n}\right)-g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{n}{n}$

$=g(1)-\left\{g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

$=1-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\therefore$(주어진 식)$=1-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

2. 정답 ⑤

(풀이) ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1}f(x)dx$는 곡선

n $y=f(x)$와 두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및

x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P'_n, Q'_n이라 하면 직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$의 넓이는 $(n+1-n)\times f(n)=f(n)$ 이다.

$\therefore\ \int_n^{n+1}f(x)dx=f(n)-(A_n+B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}(e^{-n}-e^{-n-1})=\frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$

$=\frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{2e}$ (참)

ㄷ. $\int_n^{n+1}f(x)dx=\int_n^{n+1}e^{-x}dx=[-e^{-x}]_n^{n+1}$

$=-e^{-n-1}+e^{-n}=2A_n$

이므로 ㄱ에서 $B_n=f(n)-3A_n$

그런데, $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}B_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)-3\sum_{n=1}^{\infty}A_n$

$=\frac{1}{e-1}-\frac{3}{2e}$

$=\frac{2e-3(e-1)}{2e(e-1)}=\frac{3-e}{2e(e-1)}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3. 78

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\ =x-(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

곡선의 길이 l은

$l=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}\ =\int_0^6(x^2+1)\,dx\ =78$

4. [09년 수능]

폐구간 [0, 1]을 n등분하므로 $x_k=\frac{k}{n}$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이다.

$A_k=\frac{1}{n}\cdot f(x_k)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$A_1+A_n=\frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_n)\}$

$=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right\}$

그런데 $A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}=\frac{1}{n}\left(7+\frac{1}{n^2}\right)$이므로

$\therefore\ a=0,\ b=3\quad\therefore\ f(x)=x^2+3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=8\int_0^1 xf(x)\,dx\ =8\int_0^1 x(x^2+3)dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1\ =8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$

답 14

5. [09년 수능]

$f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

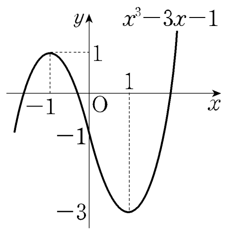
$f'(x)=0$에서 $x=\pm1$이므로

함수 $y=f(x)$는

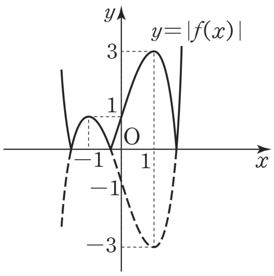
$x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=1$을

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=-3$을 갖는다.

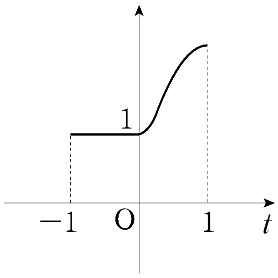
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore\ g(t)=\begin{cases}1 & (-1\leq t\leq 0)\\ -f(t) & (0\leq t\leq 1)\end{cases}$



$\therefore\ \int_{-1}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{0}1dt+\int_{0}^{1}-f(t)dt$

$=1+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt$

$=1+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$

$=1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{13}{4}$

$\therefore\ p+q=4+13=17$

답 17

6. [09년 수능]

ㄱ.

$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$

에서 $1-x=t$로 놓으면 $-dx=dt$이고,

$x=0$이면 $t=1$, $x=1$이면 $t=0$이므로

$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$

$=-\int_1^0\{f(1-t)g'(t)-g(1-t)f'(t)\}dt$

$=-\int_0^1\{f'(t)g(1-t)-g'(t)f(1-t)\}dt$

$=-k$ (참)

ㄴ.

$\int_0^1\{g'(x)f(1-x)\}dx$

에서 $1-x=t$로 놓으면 $-dx=dt$이고,

$x=0$이면 $t=1$, $x=1$이면 $t=0$이므로

$\int_0^1\{g'(x)f(1-x)\}dx\ \int_0^1\{g'(1-t)f(t)\}dt$

$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)\}dt$

$k=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$

$=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)\}dx-\int_0^1\{g'(x)f(1-x)\}dx$

$=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)\}dx-\int_0^1\{f(x)g'(1-x)\}dt$

$=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)\}dx-f(x)g'(1-x)\}dt$

$=\int_0^1\{f(x)\cdot g(1-x)\}'dx$

$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$

따라서 $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$ (참)

ㄷ.

$g(0)=\sin 0=0$, $g(1)=\sin\pi=0$이므로

$k=f(1)g(0)-f(0)g(1)=0$ (참)

답 ⑤

[다른풀이]

ㄴ.

$k=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$

$=[f(x)g(1-x)]_0^1+\int_0^1f(x)g'(1-x)dx$

$-\left\{[g(x)f(1-x)]_0^1+\int_0^1g(x)f'(1-x)dx\right\}$

$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}$

$+\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$

$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}-k$

$\therefore\ k=f(1)g(0)-f(0)g(1)$

따라서 $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$ (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

7. [09년 수능]

$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$

$\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$ 이므로

따라서 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(2-\sin 2t)^2}\,dt\ =2\int_0^{2\pi}(2-\sin 2t)dt$

$=2\left[2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi}=8\pi \quad \therefore a=8 \quad \therefore a^2=64$

답 64

8. $f(x)=\int_a^x \{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$f'(x)=2+\sin x^2$이고

$f''(x)=\cos x^2(2x)=2x\cos x^2$이다.

이때 $f''(a)=2a\cos a^2=\sqrt{3}a$에서

$$\cos a^2=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad a^2=\frac{\pi}{6}$$

한편, $f^{-1}(0)=b$로 놓으면

$$f(b)=\int_a^b \{2+\sin(t^2)\}dt=0$$

에서 $b=a$이다. 이때

$$f'(b)=f'(a)=2+\sin a^2$$

$$=2+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}$$

이므로 $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{2}{5}$

답 ④

9. [정답] ④

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한

$f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$$

$$=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

($\because$ 부분적분법)

$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면

$2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$ $\begin{cases} x=a \rightarrow t=2a \\ x=20 \rightarrow t=4a \end{cases}$로

변환되므로

$$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

10. [정답] ③

주어진 조건 (가), (나), (다)에 의하여 구간 $(0,1)$에서 $f(x)=e^x$임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 구간 $1\le x<2$에서 $f(e)=1,\ f'(1)=e$이고 (나) 조건에 의하여 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로 $e=f'(1)\le f'(x)$이다. (여기서 조건에 맞게 그래프를 그려서 해결하는 것이 훨씬 쉽다.)

이 때, $1\le x<2$인 구간에서 이 식의 양변을 적분하면 $\int_1^x e\,dx\le\int_1^x f'(x)dx$ 즉 $ex\le f(x)$이므로

다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 e\,xdx\le\int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge\int_0^1 e^x dx+\frac{3e}{2}=\frac{5e}{2}-1$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{5e}{2}-1$이다

11. 정답 37

$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$의 양변을 미분하면

$f(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{2}f(x)$

$x=2$를 대입하면

$f(g(2))\cdot g'(2)=\frac{1}{2}f(2)=4 \ \cdots$ ㉠

이제 $g(2)$를 구하면 된다.

$F(x)=\int_0^x(3x^2-6x+8)dx=x^3-3x^2+8x$

$F(g(2))=\frac{1}{2}F(2)=6$에서 $g(2)=t$라 하면

$t^3-3t^2+8t-6=0,\ (t-1)(t^2-2t+6)=0$

$\therefore t=1$

$f(1)=5,\ f(2)=8$이므로 $5p=4,\ p=\frac{4}{5}$

$\therefore 30p=24$