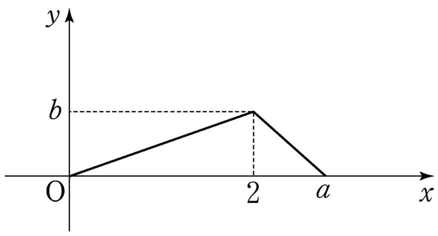
[정답률 28%]

1. 두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다. $\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2}$ 일 때, $a^2 + 4b^2$의 값을 구하시오.
[4점] [06.11수능-나형24번][1]



[정답률 28%]

2. 다음은 어떤 모집단의 확률분포표이다.

X	10	20	30	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2}-a$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원 추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\overline{X}$의 평균이 18일 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=20)$의 값은?[2]
[4점] [08년.11수능 - 나형 29번]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{19}{50}$ ③ $\frac{9}{25}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

[정답률 31%]

3. 두 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 각각의 눈의 수 m, n에 대하여 $m^2 + n^2 \leq 25$가 되는 사건을 E라 하자.
두 주사위 A, B를 동시에 던지는 12회의 독립시행에서 사건 E가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3] [4점][08년.11수능 - 나형 30번]

[정답률 33%]

4. 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게가 정규분포 $\mathrm{N}(11,\ 2^2)$을 따른다고 하자. A와 B 두 사람이 크기가 4인 표본을 각각 독립적으로 임의추출하였다. A와 B가 추출한 표본의 평균이 모두 10 이상 14 이하가 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1	0.3413
2	0.4772
3	0.4987

[3점] [05.11수능-나형14번][4]

① 0.8123 ② 0.7056 ③ 0.6587
④ 0.5228 ⑤ 0.2944

[정답률 45%]

5. 75, 모표준편차 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 양의 상수 c가 $P(|Z|>c)=0.06$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점] [07.11수능 - 나형 29번][5.]

<보 기>

ㄱ. $P(Z>a)=0.05$인 상수 a에 대하여 $c>a$이다.

ㄴ. $P(\overline{X}\le c+75)=0.97$

ㄷ. $P(\overline{X}>b)=0.01$인 상수 b에 대하여 $c<b-75$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 39%]

6.확률변수 X가 이항분포 $B(10, p)$를 따르고, $P(X=4)=\frac{1}{3}P(X=5)$ 일 때, $E(7X)$의 값을 구하시오.(단, $0<p<1$) [09.9 평가원 - 나형 39번] [6.]

[정답률 40%]

7. 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
(나) 두 번째 시행부터
(1) 뒷면이 나오면 ○를 표시하고,
(2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같이 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수를 확률변수 x라 하자. $P(X=2)$의 값은?
[4점] [09.9 평가원 - 나형 16번] [7.]

① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{31}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

[정답률 44%]

8. 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S 였을 확률은? [4점] [09.6 평가원 - 가형 13번][8.]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[정답률48%]

9. 우리나라 성인을 대상으로 특정 질병에 대한 항체 보유 비율을 조사하려고 한다. 모집단의 항체 보유 비율을 p , 모집단에서 임의로 추출한 n 명을 대상으로 조사한 표본의 항체 보유 비율을 $\overline{p}$ 이라고 할 때, $|\overline{p}-p| \leq 0.16\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}$ 일 확률이 0.9544 이상이 되도록 하는 n 의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.)

[4점] [10.11 수능 - 가형(확통) 30번][9.]

[정답률 22%]

10. 도시 A 에서 임의로 추출한 100 명을 대상으로 가장 안전하다고 생각하는 교통수단을 조사한 결과, 고속버스를 택한 사람이 20명이었다. 이 결과를 이용하여 고속버스를 택한 사람의 비율에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간을 구하였더니 $[a,\ b]$이었다. 도시 B 에서 임의로 추출한 n 명을 대상으로 고속버스가 가장 안전한 교통수간이라고 생각하는 사람의 비율에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간을 구하려고 한다. 이 신뢰구간의 최대 허용 표본오차가 $\frac{b-a}{2}$ 이하가 되도록 하는 n 의 최솟값을 구하시오.

[4점] [09.11 수능 - 가형(확통) 30번][10.]

1. 정답 10

(풀이) $0 \leq X \leq a$ 에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times ab = 1 \quad \therefore \quad ab = 2 \quad \cdots \text{㉠}$$

$\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2} < \mathrm{P}(0 \leq X \leq 2) = b$이므로

$\frac{a}{2} < 2$ 이다.

이 때, $\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \left(\frac{b}{2} \times \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{8}$

이므로 $\frac{a}{8} = \frac{b}{2} \quad \therefore \quad a = 4b$

㉠에서 $a^2 = 8$, $b^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad a^2 + 4b^2 = 8 + 2 = 10$

2. 답 ④

$E(\overline{X}) = E(X) = 18$ 이므로

$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20a + 30\left(\frac{1}{2} - a\right) = 20 - 10a = 18$

$\therefore \quad a = \frac{1}{5}$

크기가 2인 표본을 복원추출할 때, $\overline{X} = 20$ 인 경우는 10과 30, 20과 20, 30과 10 을 추출하는 경우이므로

$\mathrm{P}(\overline{X} = 20)$

$= P(X=10) \cdot P(X=30) + P(X=20) \cdot \mathrm{P}(X=20)$

$+ P(X=30) \cdot \mathrm{P}(X=10)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20} + \frac{1}{25} + \frac{3}{20} = \frac{17}{50}$

3. 답 47

사건E가 일어나는 경우의 수는

$m=1$ 일 때, $n^2 \leq 24$ 에서 $n = 1,2,3,4$ 의 4가지

$m=2$ 일 때, $n^2 \leq 21$ 에서 $n = 1,2,3,4$ 의 4가지

$m=3$ 일 때, $n^2 \leq 16$ 에서 $n = 1,2,3,4$ 의 4가지

$m=4$ 일 때, $n^2 \leq 9$ 에서 $n = 1,2,3$ 의 3가지

$\therefore \quad \mathrm{P}(E) = \frac{4+4+4+3}{36} = \frac{5}{12}$

따라서, 확률변수X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X) = 12 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{12}$

$\therefore \quad p + q = 12 + 35 = 47$

4. 정답 ②

(풀이) 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(11, \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}(11, 1^2)$을 따른다.

$\therefore \quad \mathrm{P}(10 \leq \overline{X} \leq 14)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{10-11}{1} \leq \frac{\overline{X}-11}{1} \leq \frac{14-11}{1}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 3)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 3)$

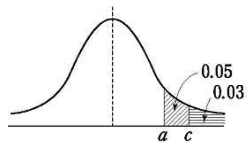
$= 0.3413 + 0.4987 = 0.84$

이 때, A, B 두 사람이 각각 독립적인 표본을 임의추출하였으므로 두 사람이 뽑은 표본의 표본평균이 10 이상 14 이하일 확률은 모두 0.84로 같고, 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 두 표본평균이 모두 10 이상 14 이하일 확률은 $0.84 \times 0.84 = 0.7056$ 이다.

5. ⑤

ㄱ.

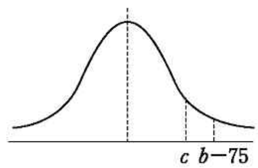


$\mathrm{P}(Z > c) = 0.03 < 0.05 = \mathrm{P}(Z > a)$ 이므로

$c > a \quad \therefore$ 참

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X} \leq c + 75) = \mathrm{P}(Z \leq c) = 0.97 \quad \therefore$ 참

ㄷ.



$\mathrm{P}(\overline{X} > b) = \mathrm{P}(Z > b - 75)$

$= 0.01 < 0.03 = \mathrm{P}(Z > c)$ 이므로

$b - 75 > c \quad \therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

6. 정답: 50

$P(X = r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q = 1 - p$) 이므로

$P(X=4) = \frac{1}{3} P(X=5)$

$\therefore {}_{10}C_4 p^4 q^6 = \frac{1}{3} \times {}_{10}C_5 p^5 q^5$ 을 정리하면 $p = \frac{5}{7}$

$\therefore B(10, \frac{5}{7})$에서 $E(7X)=7E(X)=7\times\frac{50}{7}=50$

7. 정답: ②
동전의 앞면이 나오는 사건을 H, 뒷면이 나오는 사건을 T라고 하자.
이 때, H가 올 수 있는 자리를 ●라고 하자.
(ㄱ). H가 2번, T가 3번인 경우
H 2개가 이웃하지 않으므로
●T●T●T●가 되어 ${}_4C_2=6$가지이다.
(ㄴ). H가 3번, T가 2번인 경우
H 2개는 이웃하고 나머지 H 1개는 이웃하지 않으므로
●T●T●이므로 ${}_3P_2=6$가지이다.
(ㄷ). H가 4번, T가 1번 인 경우
H가 2개씩 이웃할 때 : ●T●에서 ${}_2C_2=1$
H가 3개씩 이웃하고 나머지 하나는 이웃하지 않을 때
●T●에서 ${}_2P_2=2$

$\therefore P(X=2)=\frac{6+6+1+2}{2^5}=\frac{15}{32}$

8. 추가된 부품 중 S의 개수가 0, 1, 2인 사건을 각각 A, B, C라 하면

$$P(A)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$P(B)={}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 사건을 T라 하면

$$P(T)=P(A\cap T)+P(B\cap T)+P(C\cap T)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

$$\therefore P(C|T)=\frac{P(C\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{6}$$

9. $|\bar{p}-p|\leq 0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}$ 에서
$\bar{p}-0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\leq p\leq\bar{p}+0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}$ 이므로
$P(\bar{p}-0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\leq p\leq\bar{p}+0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})})$

$$=P\left(\frac{-0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq\frac{0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\geq 0.9544=2\times0.4772$

즉, $\frac{0.16\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}}\geq 2$ 에서 $0.16\sqrt{n}\geq 2$ 가 되어
$n\geq 156.25$ 이다. 따라서 n 의 최솟값은 157 이다.

10. 도시 A에서 임의로 추출한 100명 중 고속버스를 택한 사람이 20명 이므로 $\bar{p}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$
고속버스를 택한 사람의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면

$$\left[\frac{1}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{100}},\ \frac{1}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{100}}\right]$$

$=[\frac{1}{5}-1.96\times\frac{1}{25},\ \frac{1}{5}+1.96\times\frac{1}{25}]=[a,\ b]$

즉 $a=\frac{1}{5}-1.96\times\frac{1}{25}$, $b=\frac{1}{5}+1.96\times\frac{1}{25}$ 이므로

$\frac{b-a}{2}=1.96\times\frac{1}{25}=\frac{1.96}{25}$ -----①

또한, 신뢰도가 95% 일 때 크기가 n인 최대 허용 표본오차는 $1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}$ -----②

②가 ①이하가 되도록 하는 n의 값의 범위는

$1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}\leq\frac{1.96}{2}$ 에서 $\sqrt{4n}\geq 25$

$\therefore n\geq\frac{25^2}{4}=\frac{625}{4}=156.25$

따라서 n의 최솟값은 157이다.