[정답률 45%]

1. 이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $D(X)$를 $D(X)=ad-bc$ 라 하자. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$에 대하여 $D(A^2)=D(5A)$ 를 만족시키는 모든 상수 p의 합을 구하시오.
[4점] [06.11수능-나형30번][1]

[정답률 46%]

2. 이차정사각행렬 A는 모든 성분의 합이 0이고 $A^2+A^3=-3A-3E$ 를 만족시킨다. 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)[2] [4점] [08년.11수능 - 나형 24번]

[정답률 46%]

3. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2=E, B^2=B$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)
[3점][06.11수능-나형12번][3]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 가지면 $B=E$이다.
ㄴ. $(E-A)^5=2^4(E-A)$
ㄷ. $(E-ABA)^2=E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[정답률 46%]

4. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
ㄴ. $A^2+A-2E=O$이면 A는 역행렬을 갖는다.
ㄷ. $A \neq O$이고 $A^2=A$이면 $A=E$이다.

[3점] [04.11수능-나형6번][4]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 48%]

5. 단위행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B는 모두 역행렬을 가진다.
(나) $BAB=E$, $ABA=A^{-1}$

$A^n=E$가 성립하는 자연수 n의 최솟값은?
(단, E는 단위행렬이다.)[5]
[3점][08년.11수능 - 나형 28번]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[정답률 39%]

6. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^m=A^n$을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 $m, n\,(m>n)$의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.[6]
[4점] [2009년 09월 평가원-나형 25번]

[정답률 49%]

7. 좌표평면에서 두 점 $A(1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점][05.11수능-나형12번]7.

(가) $x^2+y^2=4$ (나) 선분 AB 위의 임의의 점 $(1, a)$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & a \end{pmatrix}$는 역행렬을 갖는다.

① $\frac{1}{3}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

[정답률 44%]

8. 행렬 $p=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 S가 $S=\{A \mid A$는 이차정사각행렬이고, $PAP=A\}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] [2009년 06월 평가원-나형 14번]8.

< 보 기 >
ㄱ. $P \in S$ ㄴ. $A \in S$이고, $B \in S$이면 $AB \in S$이다. ㄷ. $A \in S$이고, $A^2=O$이면 $A=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 20%]

9. 두 정수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 9.
[4점][09.10 교육청-나형21번]

(가) $b \le a+7$ (나) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & b \\ 1 & a+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$이 해를 갖지 않는다.

[정답률 37%]

10. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

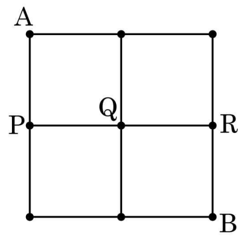
(가) $A(E+B)=E$ (나) $AB-BA=A+B$

다음 중 행렬 $(AB)^{20}$과 항상 같은 것은?
(단, E는 단위행렬이다.)
[4점][09. 3 교육청-나형12번]10.

① $-E$ ② $20E$ ③ $-A$ ④ A ⑤ $20A$

[정답률 7%]

11. 그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가는 경로 중에서 세 꼭짓점 P, Q, R를 모두 지나는 것의 개수를 구하시오.[4점][11.3 교육청-나형29번]11.



1. 정답 25

(풀이) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&p\end{pmatrix}$ 이므로 $A^2=\begin{pmatrix}1&p\\0&p^2\end{pmatrix}$,

$5A=\begin{pmatrix}5&5\\0&5p\end{pmatrix}$ 이다. $\therefore\ D(A^2)=p^2,\ D(5A)=25p$

따라서 $p^2=25p$ 이므로 $p=0$ 또는 $p=25$

따라서 모든 상수 p의 값의 합은 25 이다.

2. 답 18

$A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)=A^2(-3A-3E)=-3A^3-3A^2$

$=-3(A^2+A^3)=-3(-3A-3E)=9A+9E$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면 $a+b+c+d=0$ 이므로

행렬 $9A+9E$의 모든 성분의 합은

$9(a+b+c+d)+9(1+0+0+1)=9\cdot0+9\cdot2=18$

3. 정답 ⑤

(풀이) ㄱ. $B^2=B$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$B^{-1}B^2=B^{-1}B$ $\therefore\ B=E$ (참)

ㄴ. $(E-A)^2=E-2A+A^2$

$=E-2A+E=2(E-A)$

$(E-A)^3=(E-A)^2(E-A)=\{2(E-A)\}(E-A)$

$=2(E-A)^2=2^2(E-A)$

$\cdots\ \therefore\ (E-A)^5=2^4(E-A)$ (참)

ㄷ. $(E-ABA)^2=E-2ABA+(ABA)^2$ 이 때,

$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA=ABEBA=AB^2A$

$=ABA$ 이므로

$(E-ABA)^2=E-2ABA+ABA=E-ABA$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ②

(풀이) ㄱ. 반례 : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 이면

$AB\neq BA$ 이므로$(A+B)^2\neq A^2+2AB2$ (거짓)

ㄴ. $A^2+A-2E=O$ 이면 $A^2+A=2E$

$A(A+E)=2E$, $A\cdot\frac{1}{2}(A+E)=E$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$ (참)

ㄷ. 반례 : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이면 $A\neq O$ 이고

$A^2=A$ 이지만 $A\neq E$ 이다. (거짓)

5. 답 ③

$BAB=E$에서 $B^{-1}=AB=BA$

$ABA=A^{-1}$에서 양변에 A를 곱하면

$AABA=E$, $AB=BA$ 이므로 $AAAB=E$

$\therefore\ B^{-1}=A^3$

$B^{-1}=AB=A^3$ 이므로 $B=A^2$

$\therefore\ BB^{-1}=A^2\cdot A^3=E$

$\therefore\ A^5=E$

한편, A, A^{-1}, B, B^{-1}은 단위행렬이 아니고,

$A^2=B$, $A^3=B^{-1}$,

$A^4=A^2A^2=A^2B=ABA=A^{-1}$

이므로 $A^n=E$를 만족하는 자연수n의 최솟값은 5이다.

6. 정답: 180

주어진 행렬을 제곱하여 계산해보면

(a) $A^1=A^5=A^9=\cdots=A^{37}$

(b) $A^2=A^6=\cdots=A^{38}=-E$

(c) $A^3=A^7=\cdots=A^{39}=-A$

(d) $A^4=A^8=\cdots=A^{40}=E$ 를 만족한다.

(a) $A^m=A^n=A$(단, $m>n$)를 만족하는 순서쌍 (m,n)의 개수는 $1,5,9,14,\cdots,37$의 10개의 수 중 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_2$

(b),(c),(d)도 (a)와 같은 방법으로 경우의 수는 ${}_{10}C_2$이므로 $4\times{}_{10}C_2=180$가지

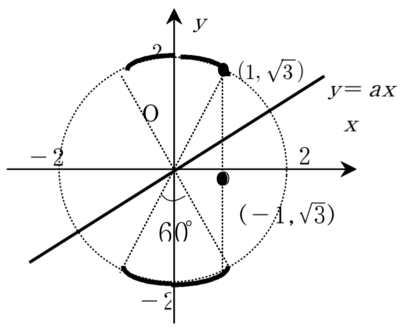
7. 정답 ④

(풀이) 행렬 $\begin{pmatrix}x&y\\1&a\end{pmatrix}$가 역행렬을 가질 조건은

$ax-y\neq0$ 즉, $y\neq ax$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x,y)$는 원점을 지나고 기울기가 a인 직선 $y=ax$ 위에 있지 않은 점이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 60°인 2개의 호이다.



따라서 구하는 도형의 길이는, $2\times\frac{60°}{360°}\times4\pi=\frac{4}{3}\pi$

8. 정답 ⑤

$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$P=P^{-1}$ 즉, $PP=E$

ㄱ. (참) $PPP=EP=P$ $\quad\therefore\ P\in S$

ㄴ. (참) $PAP=A$, $PBP=B$이므로

$P(AB)P=PA(PP)BP=(PAP)(PBP)=AB$

$\therefore\ AB\in S$

ㄷ. (참) 집합 S의 임의의 원소 X를

$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ a=d,\ b=c$

따라서, 집합 S의 원소인 행렬은 $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$의

꼴이다. $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$라 하면 $A^2=O$에서

$\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

즉, $a^2+b^2=0$, $2ab=0$에서 $a=b=0$

$\therefore\ A=O$

9. 정답 5

(나)에서 연립방정식이 $\begin{pmatrix}a+1&b\\1&a+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$해를 갖지 않으므로 $\frac{a+1}{1}=\frac{b}{a+3}\neq\frac{2}{1}$이 성립한다.

그러므로 $a\neq1$. $b=(a+1)(a+3)=a^2+4a+3$ 을 $b\leq a+7$ 에 대입하고 정리하면 $(a+4)(a-1)\leqq0$ 이다. 따라서 $-4\leqq a<1$ 이 되어 구하는 순서쌍 (a,b)는 $(-4,3)$, $(-3,0)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,3)$으로 5개다.

10.정답 ③

$A(E+B)=E$에서 $A^{-1}=E+B$이므로

$A(E+B)=(E+B)A=E$

$A+AB=A+BA$ $\quad\therefore\ AB=BA$

이때, $AB-BA=O=A+B$이므로 $B=-A$

$A(E+B)=E$에 $B=-A$를 대입하면

$A(E-A)=E$, $A^2-A+E=O$

위 등식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=O$ $\quad\therefore\ A^3=-E$

$\therefore\ (AB)^{20}=(-A^2)^{20}=A^{40}$

$=(A^3)^{13}A=(-E)^{13}A=-A$

11. 정답 9

그림과 같이 P,Q,R 순으로 지나는 경로가 4개, P,Q,R,Q 순으로 지나는 경로가 2개, Q,P,Q,R 순으로 지나는 경로가 2개, R,Q,P 순으로 지나는 경로가 1개로 모두 9개다.