[정답률 42%]

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n} = 2$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 4^{n+1} - 3^{n-1}}{4^{n-1} + 3^{n+1}}$의 값을 구하시오.
[3점] [07.11수능 - 나형 21번][1]

[정답률43%]

2. 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{6}$을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점]['10 대수능 23번][2]

[정답률35%]

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{(n-1)\pi}{2} \quad , \quad b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
[4점][05.11수능-나형13번][3]

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k} < 0$이다.

ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k-1} + b_{4k-1} = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률43%]

4. 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?
[3점] [04.11수능-나형26번][4]

<보 기>

ㄱ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 발산한다.

ㄷ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{2}\right)$도 수렴한다.

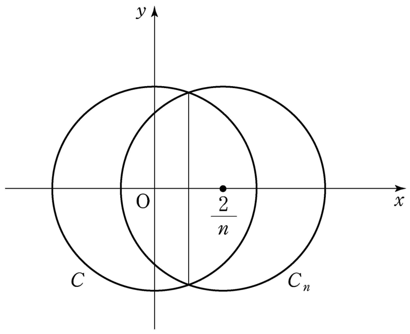
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 45%]

5. 공비가 같은 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 - b_1 = 1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.[5]
[3점][08년.11수능 - 나형 20번]

[정답률 12%]

6. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\,l_n)^2}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] [07.11수능 - 나형 24번][6.]



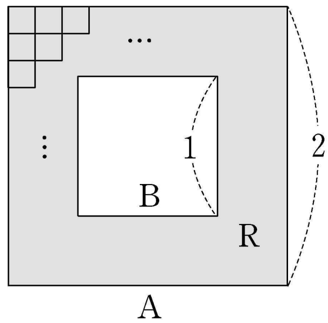
[정답률 13%]

7. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

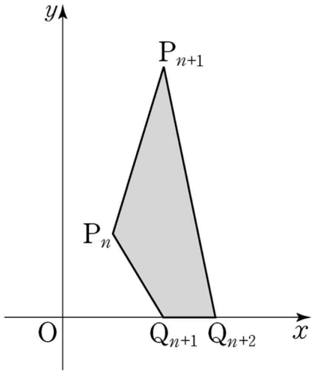
(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점]['10 대수능 25번][7.]



[정답률 47%]

8. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(n, 3^n)$, 점 Q_n의 좌표를 $(n, 0)$이라 하자. 사각형 $P_nQ_{n+1}Q_{n+2}P_{n+1}$의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)8.
[4점][2011년 수능나형-28번]

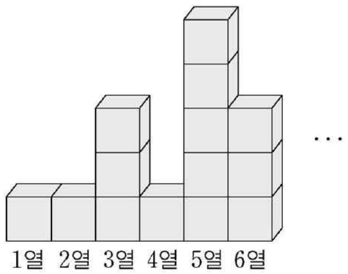


[정답률 14%]

9. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, … , m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

> 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 이다.
$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 9.
[4점][2010년 11월 수능 가,나형 25번]



[정답률 34%]

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 $b=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}$을 [그림 1]과 같이 나타내고, 실수 c에 대하여 $d=16^{c}$을 [그림 2]와 같이 나타내기로 한다.

$$\begin{tikzcd} \boxed{a} \arrow[r] & \textcircled{S} \arrow[r] & \boxed{b} \end{tikzcd}$$

[그림1]

$$\begin{tikzcd} \boxed{c} \arrow[d] \\ \textcircled{T} \arrow[d] \\ \boxed{d} \end{tikzcd}$$

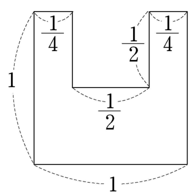
[그림 2]

아래 그림의 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{xz}{y}$의 값을 구하시오. [4점] [04.11수능-나형23번] 10.

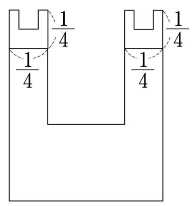
$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r] & \textcircled{S} \arrow[r] & \boxed{y} \arrow[d] & & \\ & & \textcircled{T} \arrow[d] & & \\ & & \boxed{z} \arrow[r] & \textcircled{S} \arrow[r] & \boxed{1} \end{tikzcd}$$

[정답률28%-나형][정답률28%-가형]

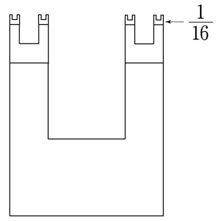
11. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형을 A_1이라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
[4점] [04.11수능-나형25번] 11.



A_1



A_2



A_3

[정답률 37%]

12. 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0, 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다.

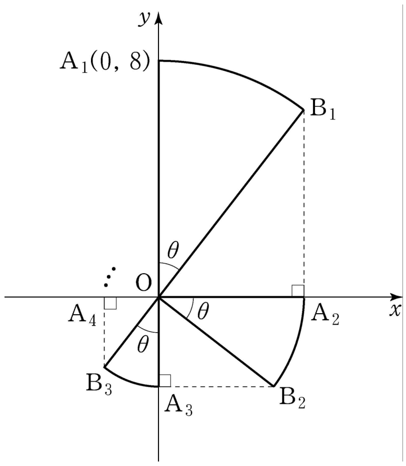
점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다.

점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다.

이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)

[4점][05.11수능-나형15번][12]

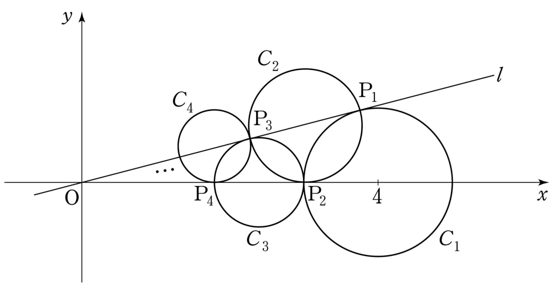


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[정답률 41%]

13. 좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.

중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)[13] [4점][08년.11수능 - 나형 14번]

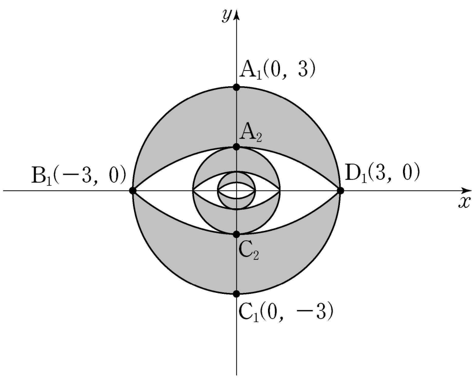


① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[정답률 44%]

14. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,3)$, $B_1(-3,0)$, $C_1(0,-3)$, $D_1(3,0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자. 호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자.
호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?

[4점]['10 수능 15번]14.



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

[정답률 44%]

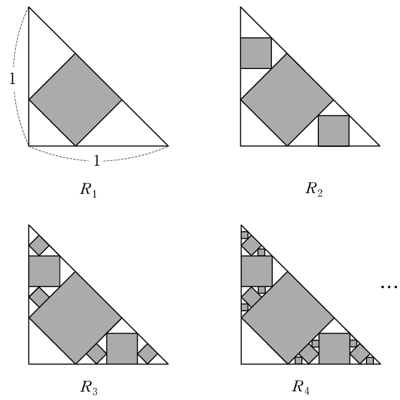
15. 아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭지점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭지점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

[4점] [06.11수능-나형17번]15.



① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

1. 16

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$에서 무한급수의 합이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0 \quad \therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$$

2. [09년 수능]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$r^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$\frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=r^3$이므로

수열 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}$은 첫째항이 $a_1a_2a_3=a_2^3$

$(\because a_2^2=a_1a_3)$이고 공비가 r^3인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}a_{n+2}=\frac{a_2^3}{1-r^3}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{16}$$

$\therefore p=16,\ q=3 \quad \therefore p+q=19$

답 19

[다른풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=\frac{1}{2}$에서 $ar=\frac{1}{2}$ ....㉠

$a_5=\frac{1}{6}$에서 $ar^4=\frac{1}{6}$ ....㉡

㉡ ÷ ㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{3}$

㉠의 양변을 세제곱하면 $a^3r^3=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore a^3=\frac{3}{8}$

$$a_na_{n+1}a_{n+2}=ar^{n-1}\cdot ar^n\cdot ar^{n+1}=a^3r^{3n}$$

$$=a^3(r^3)^n=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}a_{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{16}$$

$\therefore p=16,\ q=3 \ \therefore p+q=19$

3. 정답 ⑤

(풀이) ㄱ. (반례) $a_{3k}=\frac{1}{2^{3k-1}}\cos\frac{(3k-1)\pi}{2}$

에 $k=2$를 대입하면

$$a_6=\frac{1}{2^5}\cos\frac{5\pi}{2}=\frac{1}{2^5}\cdot 0=0 \ (\text{거짓})$$

ㄴ. $a_{4k-1}=\frac{1}{2^{4k-2}}\cos\frac{(4k-2)\pi}{2}$

$$=\frac{1}{2^{4k-2}}\cos(2k-1)\pi=-\frac{1}{2^{4k-2}},$$

$$b_{4k-1}=\frac{1+(-1)^{4k-2}}{2^{4k-1}}=\frac{2}{2^{4k-1}}=\frac{1}{2^{4k-2}}$$

이므로 $a_{4k-1}+b_{4k-1}=0$ (참)

ㄷ. $\{a_n\}$: 1, 0, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, ⋯이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

$\{b_n\}$: 1, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, ⋯이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ③

(풀이) 무한등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하자.

ㄱ. <참> 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $-1<r<1$ 이다. 무한등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이고 $0\le r^2<1$ 이므로, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ. <참> 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.

ㄷ. <거짓>무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$도 수렴한다.

5. 답 16

두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=8$ ⋯㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-r}=6$ ⋯㉡

㉠-㉡에서 $\frac{a_1-b_1}{1-r}=2$

$a_1 - b_1 = 1$ 이므로 $\frac{1}{1-r} = 2$, $1 - r = \frac{1}{2}$ $\therefore\ r = \frac{1}{2}$

㉠에서 $a_1 = 8(1-r) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

㉡에서 $b_1 = 6(1-r) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$은 첫째항이

$a_1 b_1 = 4 \cdot 3 = 12$ 이고, 공비가 $r^2 = \frac{1}{4}$ 인

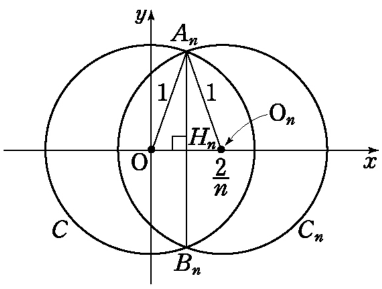
등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16$$

6. 19

$\triangle A_n O O_n$은 이등변삼각형이고,

$\overline{A_n B_n} \perp \overline{O O_n}$ 이므로



$\overline{OH_n} = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{2} l_n = \overline{A_n H_n} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$n l_n = 2\sqrt{n^2-1}$

$\therefore (n l_n)^2 = 4(n^2-1) = 4(n-1)(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n l_n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

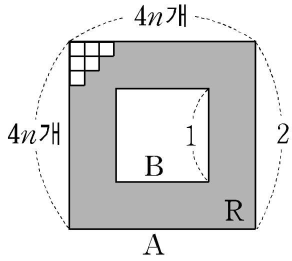
$$= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$$

7. [09년 수능]

i) 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n}$인 정사각형을 그리는 경우



$\frac{1}{2n} \times 4n = 2$ 이고 $\frac{1}{2n} \times 2n = 1$ 이므로

A에 채울 수 있는 정사각형의 개수는

$(4n)^2 = 16n^2$

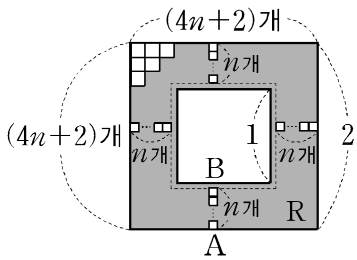
B에 채울 수 있는 정사각형의 개수는

$(2n)^2 = 4n^2$

R에 채울 수 있는 정사각형의 개수는

$a_{2n} = 16n^2 - 4n^2 = 12n^2$

ii) 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$인 정사각형을 그리는 경우



$\frac{1}{2n+1} \times (4n+2) = 2$ 이고

$\frac{1}{2n+1} \times \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 이므로

길이가 $\frac{1}{2}$인 경우는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$인 정사각형을 n개 채울 수 있다.

A에 채울 수 있는 개수는

$(4n+2)^2 = 16n^2 + 16n + 4$

그림의 점선으로 이루어진 부분에 채울 수 있는 정사각형의 개수는 $(2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$

따라서 R에 채울 수 있는 정사각형의 개수는

$a_{2n-1} = 16n^2 + 16n + 4 - 4n^2 - 8n - 4 = 12n^2 + 8n$

i), ii)에서

$a_{2n} = 12n^2$

$a_{2n-1} = 12(n-1)^2 + 8(n-1) = 12n^2 - 16n + 4$

$a_{2n+1} = 12n^2 + 8n$

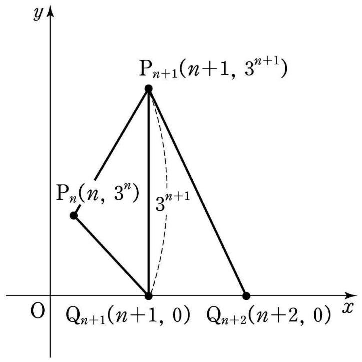
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2 + 8n - 12n^2}{12n^2 - (12n^2 - 16n + 4)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{16n-4} = \frac{1}{2}$$

따라서, $100c = 100 \times \frac{1}{2} = 50$이다.

답 50

8. 사각형의 꼭짓점의 좌표를 구하여 그림으로 표현하면 다음과 같다.



그림에서 P_{n+1} 과 Q_{n+1} 의 x 좌표가 같으므로

넓이 a_n 은 $a_n = \left(\frac{1}{2}\times\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}\times 1\right)\times 2 = 3^{n+1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$\therefore p^2 + q^2 = 6^2 + 1^2 = 37$

9. [정답] 19

[해설]

2^{n+1} 열짜리 블록의 개수는

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots,\ 2^{n+1}$ …… ㉠

㉠에서 1 회 시행후 홀수는 그대로 두고 짝수는 2 로 나누어 나타내면

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ (2^{n+1}-1)$ …… ㉡ 과

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 2^n$ …… ㉢ 으로

표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합은

i) ㉠은 $f(2^{n+1})$

ii) ㉡은

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ (2^{n+1}-1)$

$$= \frac{2^n(2^{n+1}-1+1)}{2} = 2^{2n} = 4^n$$

iii) ㉢은 $f(2^n)$

$\therefore\ f(2^{n+1}) = 4^n + f(2^n) \leftarrow$ 계차수열을 이용하자.

$$f(2^n) = f(2^1) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$= 2 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{q}{p} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\frac{4^{n+1}+2}{3}} = \frac{3}{16}$$

$\therefore\ p+q = 16+3 = 19$

10. 정답 40

(풀이) $x \to S \to y$에서 $y = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$

$y \to T \to z$에서 $z = 16^y$

$z \to S \to 1$ 에서 $1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$

$\therefore z = 2$, $y = \frac{1}{4}$, $x = 5$, 따라서 $\frac{xz}{y} = 40$

11. 정답 13

(풀이)도형 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 넓이를 각각 $S_1, S_2, S_3, \cdots$라 하면

$$S_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$S_2 = \frac{3}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{3}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4} + 2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4} + \cdots\cdots$$

이므로 S_n은 첫째항이 $\frac{3}{4}$이고, 공비가 $2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

$\therefore\ p=7,\ q=6$ $\quad\therefore\ p+q=13$

12. 정답 ⑤

(풀이) l_1은 반지름의 길이가 8, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_1 = 8\theta$이다.

또, l_2는 반지름의 길이가 $8\sin\theta$, 중심각의 크기가 θ인 호의 길이이므로 $l_2 = 8\theta\sin\theta$이다.

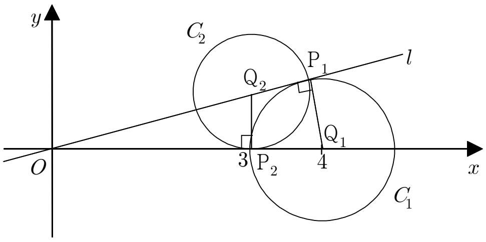
마찬가지로 $l_3 = 8\theta\sin^2\theta$, $l_4 = 8\theta\sin^3\theta$, ...이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 8θ이고 공비가 $\sin\theta$인 무한등비수열이다.

$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \dfrac{8\Theta}{1-\sin\Theta} = 12\Theta$

$\therefore \ \sin\Theta = \dfrac{1}{3}$

13. 답 ③



원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1} = \sqrt{4^2-1^2} = \sqrt{15}$

이고, $\triangle OP_1Q_1 \backsim \triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1} : \overline{P_1Q_1} = \overline{OP_2} : \overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15} : 1 = 3 : \overline{P_2Q_2}$

$\therefore \ \overline{P_2Q_2} = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

$\overline{P_1Q_1} : \overline{P_2Q_2} = 1 : \dfrac{3}{\sqrt{15}}$ 이므로 넓이의 비는

$1 : \dfrac{9}{15} = 1 : \dfrac{3}{5}$ 이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1 = \pi$이므로

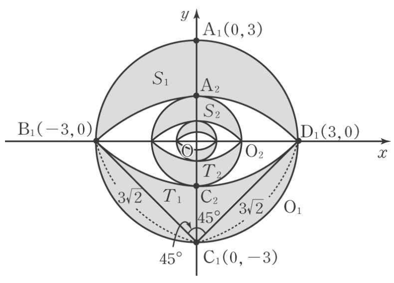
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = S_1 + \dfrac{3}{5}S_1 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 S_1 + \cdots$

$= \dfrac{S_1}{1-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}S_1 = \dfrac{5}{2}\pi$

14. [09년 수능]

삼각형 B_1C_1O와 삼각형 C_1D_1O는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = 3\sqrt{2}$



위의 그림에서

$S_1 = \dfrac{1}{2} \times$(원 O_1의 넓이) $-$ ($▽B_1C_1D_1$ $-$ $\triangle B_1C_1D_1$)

$= \dfrac{1}{2}\pi \cdot 3^2 - \left\{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \dfrac{90^\circ}{360^\circ} - \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\right\}$

$= \dfrac{9}{2}\pi - \left(\dfrac{9}{2}\pi - 9\right)$

$= 9$

넓이가 S_1인 도형과 넓이가 S_2인 도형은 닮음이고, 닮음비는

$\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 3 : (3\sqrt{2}-3) = 1 : \sqrt{2}-1$

이므로 넓이의 비는

$1^2 : (\sqrt{2}-1)^2 = 1 : 3-2\sqrt{2}$

즉, S_1, S_2, S_3, $\cdots$은 첫째항이 9이고 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

또, $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, $S_3 = T_3$, $\cdots$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n + T_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2 \cdot \dfrac{9}{1-(3-2\sqrt{2})} = \dfrac{9}{\sqrt{2}-1}$

$= \dfrac{9(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 9(\sqrt{2}+1)$

답 ④

15. 정답 ⑤

(풀이) R_1의 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 빗변의 길이는 $3a$이므로 $3a = \sqrt{2}$에서

$a = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\quad \therefore \ S_1 = a^2 = \dfrac{2}{9}$

R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $a = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로 R_1에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_1에서 새로 색칠한 2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2 \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^2$이다.

$\therefore \ S_2 = S_1 + 2 \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^2 = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{4}{9}$

R_2에서 합동인 2^2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$ 이므로 R_2에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_2에서 새로 색칠한 2^2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2^2 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{2}{9}\right)^2 = 4 \times \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^2$이다.

$\therefore \ S_3 = S_2 + \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^2$

$= \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^2$

…

이와 같은 방법으로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같음을 추론할 수 있다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}$$