[정답률 39%]

1. 자연수 $n(n \geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15 이므로 $a_4 = 5+10+15 = 30$이다. $a_n > 500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.[1]

[4점][08년.11수능 - 나형 23번]

[정답률 44%]

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2 = 1$일 때, a_8의 값을 구하시오.

[4점]['10.11 수능 30번][2]

[정답률 44%]

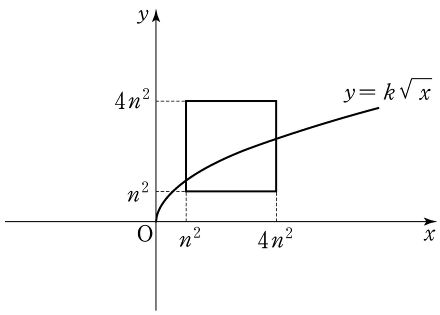
3. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1} b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

[4점] [06.11수능-나형22번][3]

[정답률44%-나형][정답률48%-가형]

4. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 A_n을 4개의 점 $(n^2, n^2), (4n^2, n^2), (4n^2, 4n^2), (n^2, 4n^2)$ 을 꼭지점으로하는 정사각형이라 하자. 정사각형 A_n과 함수 $y = k\sqrt{x}$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][06.11수능-나형16번][4]



<보 기>

ㄱ. $a_5 = 15$

ㄴ. $a_{n+2} - a_n = 7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 200$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[정답률 46%]

5. $p\geqq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=0$
(나) $a_{k+1}=a_k+1$ $(1\leqq k\leqq p-1)$
(다) $a_{k+p}=a_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점] [05.11수능-나형29번]5.

<보 기>

ㄱ. $a_{2k}=2a_k$

ㄴ. $a_1+a_2+\cdots+a_p=\dfrac{p(p-1)}{2}$

ㄷ. $a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 48%]

6. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=2$, (우변) $=2$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{m(5m+3)}{4}$$

이다. $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{(\text{가})}{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{(\text{나})}\right)$$
$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{(\text{가})}{m+1}$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(\text{다})$$
$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가),(나),(다)에 알맞은 것은? [4점] [05.11수능-나형16번]6.

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	m	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	m	$5k-3$
④	$5m+2$	m	$5k+2$
⑤	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$

[정답률 47%]

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1} = n+1+\frac{(n-1)!}{a_1a_2\cdots a_n}\ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_1a_2\cdots a_na_{n+1} = a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!$
>
> 이다. $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$이라 하면, $b_1=1$이고
>
> $b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $b_n=\boxed{(나)}$ 이므로 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}=\boxed{(나)}$ 이다.
>
> ⋮
>
> 따라서 $a_1=1$이고,
>
> $a_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}\ (n\ge 2)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13)\times g(7)$의 값은? 7.
[4점] [10년 11월 수능가, 나형-15번]

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

[정답률 43%]

8. 2 이상의 자연수 n에 대하여 집합 $\{3^{2k-1}\mid k\text{는자연수}, 1\le k\le n\}$의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구하시오. 8.
[4 점][2010년 11월 수능가, 나형-23번]

[정답률 20%]

9. 수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오.
[4점][09. 9월 평가원 나형-22번9.]

[정답률 22%]

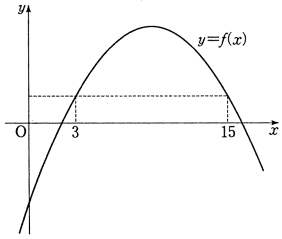
10. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

> (가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n,\ 2^n)$이다.
> (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 $(x,\ y)$ 중에서 x가 자연수이고, $y=2^x$을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1=12$이다. $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값을 구하시오.
[4점][11. 9월 평가원 나형-30번]10.

[정답률 21%]

10. 함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15 보다 작은 자연수일 때, $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오.
[4점][09. 9월 평가원나형-22번]11.



1. 답 11
n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는
$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$ 의 $n-1$개다.
$\therefore\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$
$a_n>500$에서
$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$
$(n-1)n(n+1)>1000$
$9\cdot10\cdot11=990<1000$
$10\cdot11\cdot12=1320>1000$
이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

2. [09년 수능]
수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로
$S_7=S_1+3\times(-3)=S_1-9$
수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로
$S_8=S_2+3\times2=S_2+6$
$\therefore a_8=S_8-S_7=S_2-S_1+15$
$=a_2+15=1+15\ =16$

[다른풀이]
$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}$
그런데 S_{2n}이 공차가 2인 등차수열이고 S_{2n-1}은 공차가 -3인 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 $2-(-3)=5$인 등차수열이다.
a_4는 수열 $\{a_{2n}\}$의 4번째 항이므로
$a_8=a_2+3\times5=1+15=16$
답 16

3. 정답 13
(풀이)등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d ($d\neq0$)라 하면
$$a_n=(n-1)d \quad \therefore\ a_{n+1}=dn$$
이 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}d(k-1)\ =d\sum_{k=1}^{n-1}k=d\times\frac{n(n-1)}{2}$
이고, $a_{n+1}b_n=dn\cdot b_n=\frac{dn(n-1)}{2}$ 이어야 하므로
$$b_n=\frac{n-1}{2}\ \ (\text{단, } n=1,2,3,\cdots)$$
$$\therefore\ b_{27}=\frac{27-1}{2}=13$$

4. 정답 ④
(풀이) 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 정사각형 A_n과 만날 필요충분조건은 두 점 $(4n^2,\ n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만날 때이다.
함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$을 지날 조건은 $n^2=k\sqrt{4n^2}$ $\quad\therefore\ k=\frac{n}{2}$
함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지날 조건은 $4n^2=k\sqrt{n^2}$ $\quad\therefore\ k=4n$
따라서 a_n은 부등식 $\frac{n}{2}\leq k\leq4n$을 만족하는 자연수 k의 개수이다.
(i) n이 홀수일 때
$$a_n=4n-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+1\ =\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$$
(ii) n이 짝수일 때
$$a_n=4n-\frac{n}{2}+1\ =\frac{7}{2}n+1$$
$$\therefore\ a_n=\begin{cases}\frac{7}{2}n+\frac{1}{2} & (n\text{이 홀수})\\ \frac{7}{2}n+1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$
ㄱ. $a_5=\frac{7}{2}\times5+\frac{1}{2}\ =18$ (거짓)
ㄴ. $a_{n+2}=\begin{cases}\frac{7}{2}(n+2)+\frac{1}{2}=a_n+7 & (n\text{이 홀수})\\ \frac{7}{2}(n+2)+1=a_n+7 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$
$\therefore\ a_{n+2}-a_n=7$ (참)
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_9+a_{10})$
$=12+(12+14)+(12+2\times14)+\cdots+(12+4\times14)$
$=\frac{5}{2}\{12+(12+56)\}\ =200$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

5. 정답 ④
(풀이) ㄱ. (반례) $p=2$이면
$a_2=a_1+1=1\neq2a_1=0$ (거짓)
ㄴ. (가), (나)에서
$a_1=0$,
$a_2=a_1+1=1$
$a_3=a_2+1=2$
$\cdots$
$a_p=a_{p-1}+1=p-1$
$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_p$
$=0+1+2+\cdots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$ (참)
ㄷ. (다)에 $k=p$를 대입하면
$a_{p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$,
$a_{2p+p}=a_{3p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

…

$a_{kp}=a_p=p-1$

$\therefore\ a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고)

$p=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, …

6. 정답 ③

(풀이) $\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}$

$+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$

$+\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\frac{1}{m+1}+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$

$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$

$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $5m+2$, m, $5k-3$이다.

7. [정답] ⑤

[해설] $b_{n+1}=\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(n+1)!}$

$=\frac{a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!}{(n+1)!}$

$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ (가) $=f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$

b_n을 구하면

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{a_1}{1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{2n-1}{n}$

$\therefore$ (나) $=g(n)=\frac{2n-1}{n}$

따라서 $f(13)\times g(7)=\frac{1}{13\cdot 14}\times\frac{13}{7}=\frac{1}{98}$

8. 정답] 100

[해설] $n=2$일 때, $\{3, 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$ 즉, $f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3, 3^3, 3^5\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$ 즉, $f(3)=3$

$n=4$일 때 $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$ 즉, $f(4)=5$

……

$n=k$일 때, $\{3, 3^3, \cdots, 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, \cdots, 3^{4(k-1)}\}$ 즉, $f(k)=2k-3$

$\therefore \sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$

$=1+3+5+\cdots+19$

$=10^2=100$

9. 정답 31

$a_m=3$이므로 $\frac{m}{3^3}=a$, $\therefore m=3^3\cdot a$

(단, $\frac{m}{3^k}=a$를 만족하는 최대 정수 $k=3$이므로 a는 3 배수가 아닌 자연수)

따라서 $a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$이고

$a_{3m}=a_{6m}=4$, $a_{9m}=5$이다.

$\therefore\ a_m+a_{2m}+\cdots+a_{9m}=(3\times6)+(4\times2)+5=31$

10. 정답 392

(i) $n=1$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로 $a_1=2\times(2^3-2^1)=12$

(ii) $n=2$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로 $a_2=2\times(2^3-2^2)=8$

(iii) $n \geq 3$일 때

세 점 $(n-2, 2^{n-2})$, $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n = 2 \times (2^n - 2^{n-2}) = 3 \times 2^{n-1}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = 12 + 8 + 3(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^6)$$

$$= 20 + 3 \times \frac{2^2(2^5 - 1)}{2-1} = 20 + 12 \times 31 = 392$$

<답> 392

참고) 위의 풀이의 (iii)에서

세 점 $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우에는 점 $(n-2, 2^{n-2})$도 이 정사각형의 내부에 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다. 마찬가지로, 세 점 $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$, $(n+2, 2^{n+2})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우도 조건을 만족시키지 않는다.

11. 정답 5

$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$에서

$f(15) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{15}$,

$f(m-1) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}$

이므로 $f(15) - f(m-1) < 0$

$\therefore\ f(15) < f(m-1)$

그림에서 $3 < m-1 < 15$이므로

$4 < m < 15$($\because$ m이 15보다 작은 자연수)

따라서 구하는 m의 최솟값은 5이다.