[정답률23%]

1. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$$

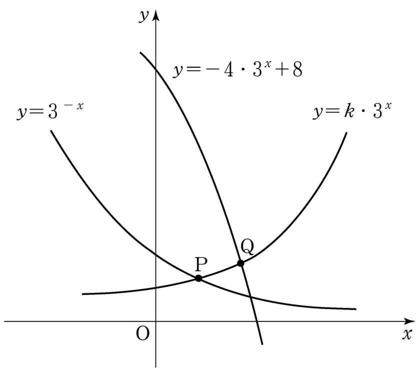
가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오.[1]

[3점][08년.11수능 - 나형 21번]

[정답률28%-나형][정답률48%-가형]

2. 함수 $y=k\cdot 3^x(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오.

[4점] [06.11수능-나형25번][2]



[정답률31%]

3. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [4점]

[04.11수능-나형10번][3]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률35%]

4. 양수 a에 대하여 $\log a$의 지표와 가수를 각각 $f(a)$, $g(a)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[3점] [05.11수능-나형11번][4]

<보 기>

ㄱ. $f(2006)=3$

ㄴ. $g(2)+g(6)=g(12)+1$

ㄷ. $f(ab)=f(a)+f(b)$ 이면 $g(ab)=g(a)+g(b)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 36%]

5. $0<a<\frac{1}{2}$ 인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$ 가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 (p, p), 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 (q, q) 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[5]
[4점][08년.11수능 - 나형 11번]

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$ 이면 $a=\frac{1}{4}$ 이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률36%]

6. 연립부등식

$$\begin{cases} \log_3|x-3|<4 \\ \log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.
[3점] [04.11수능-나형19번][6]

[정답률42%]

7. 로그부등식 $\log_2 x \leq \log_4(12x+28)$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.
[3점]['10 대수능 20번][7]

[정답률38%]

7. 두 자리의 자연수 N에 대하여 $\log N$의 가수가 α일 때, $\frac{1}{2}+\log N=\alpha+\log_4\frac{N}{8}$ 을 만족시키는 N의 값을 구하시오.
[4점] [07.11수능 - 나형 30번][8]

[정답률45%]

8. 직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
[4점] [07.11수능 - 나형 16번][9]

<보 기>

ㄱ. $x_1>y_2$

ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$

ㄷ. $x_1y_1>x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 45%]

10. 상용로그의 지표가 2인 수 중에서 가장 큰 정수를 a, 상용로그의 지표가 -2인 수 중에서 가장 작은 수를 b라 할 때, ab의 값은?
[4점] [04.11수능-나형27번][10]

① 0.9 ② 0.99 ③ 1 ④ 9.99 ⑤ 10

[정답률 46%]

11. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)11.[3점][08년.11수능-나형 7번]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[정답률 50%]

12. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 가수를 $f(n)$이라 할 때, 집합 $A=\{f(n) \mid 1 \le n \le 150,\ n$은 자연수$\}$의 원소의 개수는?12.

[3점][08년.11수능 - 나형 27번]

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

[정답률20%]

13. 자연수 A에 대하여 $\log A$의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, $n \le 2\alpha$가 성립하도록 하는 A의 개수를 구하시오. (단, $3.1<\sqrt{10}<3.2$)13.

[4점][2010년 11월 수리나형-24번]

[정답률 44%]

14. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 14.

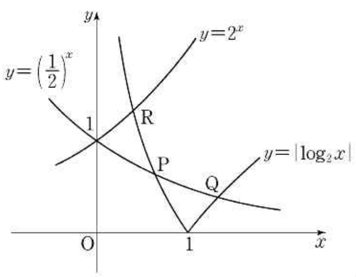
[4점][10년 11월 수능가, 나형-16번]

[보 기]

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 7%]

15. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t$ $(t \ge 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. 15.

(가) $2 \le a \le 10$, $2 \le b \le 10$

(나) $t \ge 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ} \le 10$이다.

[4점][2011년 11월 수능가, 나형-30번]

[정답률 13%]

15. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\left\{(x,\ y) | 2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\right\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이다.

$\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. 16.

[4점][2012년 11월 수능 가,나형-30번]

1. 답 20

$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3} = k$로 놓으면

$3a = k\log_a b$, $b = 2k\log_b a$, $3a+b=3k$

$\therefore\ k\log_a b + 2k\log_b a = 3k$

$\log_a b + 2\log_b a = 3$

$\log_a b = t$로 놓으면 $\log_b a = \frac{1}{t}$이므로

$t + \frac{2}{t} = 3$, $t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-1)(t-2)=0$

$t \neq 1$이므로 $t=2$

$\therefore\ 10\log_a b = 10 \cdot 2 = 20$

[다른 풀이]

$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a}$에서

$6a\log_b a = b\log_a b$, $\frac{6a}{\log_a b} = b\log_a b$

$\frac{6a}{b} = (\log_a b)^2$ …㉠

$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$이므로

$\left(\frac{3a+b}{3}\right)^2 = \frac{3a}{\log_a b} \times \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3ab}{2}$ ($\because$ $\log_a b \times \log_b a = 1$)

$\frac{9a^2+6ab+b^2}{9} = \frac{3ab}{2}$에서

$18a^2 + 12ab + 2b^2 = 27ab$

$18a^2 - 15ab + 2b^2 = 0$

$b \neq 0$이므로 양변을 b^2으로 나누면

$18\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 15 \cdot \frac{a}{b} + 2 = 0$

$\frac{a}{b} = t$로 놓으면

$18t^2 - 15t + 2 = 0$

$(3t-2)(6t-1) = 0$

$t = \frac{2}{3}$ 또는 $t = \frac{1}{6}$

$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2 = 4$

$\log_a b > 1$이므로 $\log_a b = 2$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2 = 1$

$\log_a b > 1$이므로 모순

따라서 $\log_a b = 2$이므로

$10\log_a b = 20$

2. 정답 20

(풀이) 점 P의 x좌표를 α라 하면

$$k \cdot 3^{\alpha} = 3^{-\alpha}$$

따라서 $k \cdot 3^{\alpha} = \frac{1}{3^{\alpha}}$ 이므로 양변에 3^{α}을 곱하여 정리하면

$$(3^{\alpha})^2 = 3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$$

이 때, 점 Q의 x좌표는 2α이므로

$$k \cdot 3^{2\alpha} = -4 \cdot 3^{2\alpha} + 8$$

이 때, $3^{2\alpha} = \frac{1}{k}$ 이므로 , $k \cdot \frac{1}{k} = -4 \cdot \frac{1}{k} + 8$

$k > 0$이므로 $1 = -\frac{4}{k} + 8$, $\therefore$ $k = \frac{4}{7}$, $\therefore$ $35k = 20$

3. 정답 ⑤

(풀이) ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}$

$$= \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4+2\cdot 4^x}{4^x}} = \frac{4}{2\cdot 4^x + 4} = \frac{2}{4^x+2}$$ 이므로

$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{2}{4^x+2} = \frac{4^x+2}{4^x+2} = 1 = 1$(참)

ㄷ.

$\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right) = f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{2}{101}\right) + f\left(\frac{3}{101}\right) + \cdots + f\left(\frac{100}{101}\right)$

$= \left\{f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{100}{101}\right)\right\} + \left\{f\left(\frac{2}{101}\right) + f\left(\frac{99}{101}\right)\right\}$

$\cdots + \left\{f\left(\frac{50}{101}\right) + f\left(\frac{51}{101}\right)\right\}$

$= 1 \times 50 = 50$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ⑤

(풀이) ㄱ. 2006은 4자리의 자연수이므로 $\log 2006$의 지표는 3이다. $\therefore$ $f(2006) = 3$ (참)

ㄴ. $\log 2$, $\log 6$의 가수는 각각 $\log 2$, $\log 6$이므로

$g(2) = \log 2$, $g(6) = \log 6$이다.

또, $12 = 1.2 \times 10^{1}$이므로 $\log 12$의 가수는 $\log 1.2$이다.

$\therefore$ $g(12) = \log 1.2$

$\therefore$ $g(2) + g(6) = \log 2 + \log 6$

$= \log 12 = \log 1.2 + 1 = g(12) + 1$ (참)

ㄷ. 임의의 양수 x에 대하여

$\log x=$(지표)$+$(가수)$=f(x)+g(x)$이므로

$\log a=f(a)+g(a)$, $\log b=f(b)+g(b)$이고

$\log ab=f(ab)+g(ab)$이다.

그런데, $\log ab=\log a+\log b$이므로

$f(ab)+g(ab)=f(a)+g(a)+f(b)+g(b)$이다.

따라서 $f(ab)=f(a)+f(b)$이면

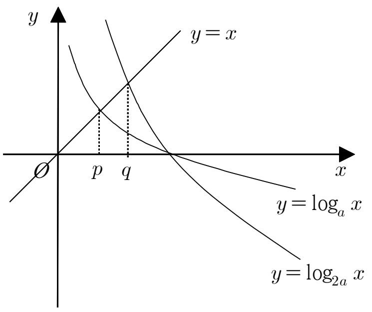
$g(ab)=g(a)+g(b)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5. 답 ⑤

$0<a<\frac{1}{2}$에서 $0<a<2a<1$이므로

두 함수$y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $p=\log_a p$에서 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $p<q$ (참)

ㄷ. $p=\log_a p$, $q=\log_{2a} q$이므로 $a^p=p$, $(2a)^q=q$

즉, $a^p=p$, $a^q=\frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q}=a^p\cdot a^q=p\cdot\frac{q}{2^q}=\frac{pq}{2^q}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6. 정답 80

(풀이) (진수)>0에서 $x>2$, $x\neq 3$ ……㉠

$\log_3|x-3|<4$ 에서 $|x-3|<3^4$

$\therefore\ -78<x<84$ ……㉡

$\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$ 에서 $\log_2 x(x-2)\geq 3$

$x(x-2)\geq 8$

$(x-4)(x+2)\geq 0$ $\quad\therefore\ x\geq 4,\ x\leq -2$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 정수인 x는

$x=4, 5, 6, \cdots, 83$, 따라서 80개다.

7. [09년 수능]

로그의 진수의 조건에서

$x>0$, $12x+28>0$이므로 $x>0$ ……㉠

㉠일 때, $\log_2 x\leq\log_4 x^2$이므로

$\log_2 x\leq\log_4(12x+28)$

$\log_4 x^2\leq\log_4(12x+28)$

$x^2\leq 12x+28$

$x^2-12x-28\leq 0$

$(x+2)(x-14)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq x\leq 14$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\leq 14$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 14이다.

답 14

8. 64

N은 두 자리의 자연수이므로 $\log N=1+\alpha$

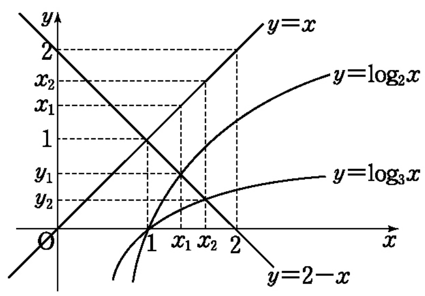
$\frac{1}{2}+1+\alpha=\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{\log 2}-3\right)$, $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{\log 2}-3\right)$

$3=\frac{1+\alpha}{\log 2}-3$, $6=\frac{1+\alpha}{\log 2}$

$\log N=1+\alpha=6\log 2=\log 64$

$\therefore N=64$

9. ⑤주어진 함수의 그래프를 그리면 아래와 같다.



ㄱ. $x_1>y_2$ $\quad\therefore$참

ㄴ. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

$y_2-y_1=x_1-x_2$ $\quad\therefore$참

ㄷ. $F(x)=xy=x(2-x)=-x^2+2x$

$=-(x-1)^2+1$

$1<x_1<x_2<2$이므로 $F(x_1)>f(x_2)$

$\therefore x_1y_1>x_2y_2$ $\quad\therefore$참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10. 정답④

(풀이) 상용로그의 지표가 2인 수를 x라 하면

$2\leq\log x<3$에서

$100 \leqq x < 1000$ 이므로 $a = 999$

상용로그의 지표가 -2인 수를 y라 하면

$-2 \leqq \log y < -1$ 에서 $\frac{1}{100} \leqq x < \frac{1}{10}$

$\therefore \ b = \frac{1}{100}$

$\therefore \ ab = 999 \times \frac{1}{100} = 9.99$

11. 답 ①

$f(x) = a^{bx-1}$ 의 그래프와 $g(x) = a^{1-bx}$ 의 그래프는 직선$x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$f(2) = g(2)$ 가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1} = a^{1-2b}$ 에서

$2b-1 = 1-2b$, $4b = 2$ $\therefore$ $b = \frac{1}{2}$

$f(4) = g(0)$, $g(4) = f(0)$ 이므로

$f(4) + g(4) = g(0) + f(0) = \frac{5}{2}$

$a + a^{-1} = \frac{5}{2}$

$2a^2 - 5a + 2 = 0$

$(a-2)(2a-1) = 0$

$0 < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $a + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

12. 답 ③

$1 \leqq n \leqq 9$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 0이므로

가수 $f(n)$ 의 값은

$\log 1, \log 2, \log 3, \cdots, \log 9$ …㉠

의 9개이고, 이들은 서로 다른 값이다.

$10 \leqq n \leqq 99$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 1이므로

가수$f(n)$ 의 값은

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{11}{10}, \log\frac{12}{10}, \cdots, \log\frac{99}{10}$ …㉡

의 90개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{20}{10}, \log\frac{30}{10}, \cdots, \log\frac{90}{10}$ 의 9개는 ㉠의 값과 중복된다.

$100 \leqq n \leqq 150$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 2이므로

가수$f(n)$ 의 값은

$\log\frac{100}{100}, \log\frac{101}{100}, \log\frac{102}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$ 의 51개이고,

이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\frac{100}{100}, \log\frac{110}{100}, \log\frac{120}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$ 의 6개는 ㉠,㉡의 값과 중복된다.

따라서 집합 A 의 원소의 개수는

$9 + (90-9) + (51-6) = 135$ (개)

이다.

13. [정답] 77

[해설]

가수 α의 범위는 $0 \le \alpha < 1$ 이므로

(i) $n=0$일 때

$n \le 2\alpha$에서 $0 \le \alpha < 1$이므로

따라서 만족하는 자연수 A는

$1, 2, 3, \cdots, 9$

이므로 9개다.

(ii) $n=1$일 때

$1 \le 2\alpha$에서 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이므로

이때 $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$ 이므로

$\log 3.1 < \frac{1}{2} < \log 3.2$

따라서 만족하는 자연수 A는

$32, 33, 34, \cdots, 99$

이므로 68개다.

(i), (ii)에 의하여 구하고자 하는 자연수 A의 개수는

$9 + 68 = 77$

14. [정답] ③

[해설]

ㄱ. $y = -\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$과 $P(x_1, y_1)$의 위치를 비교하면 $y_1 < 1$이므로

$\frac{1}{2} < x_1 < 1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y = 2^x$의 역함수는 $y = \log_2 x$이고,

$y = -\log_2 x$의 역함수는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$y = 2^x$와 $y = -\log_2 x$의 교점 $R(x_3, y_3)$와

$y = \log_2 x$와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2, y_2)$는

직선 $y = x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3 = y_2,\ x_2 = y_3 \cdots\cdots (*)$

$\therefore x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$ $\therefore$ 참

ㄷ. 점 $(1, 0)$을 S라 하면

($\overline{RS}$의 기울기) < ($\overline{PS}$의 기울기) 이므로

$\frac{y_3}{x_3 - 1} < \frac{y_1}{x_1 - 1}$ 이고, 여기에 위의 $(*)$을 대입하면

$\frac{x_2}{y_2-1} < \frac{y_1}{x_1-1}$ 이 성립하므로

$x_2(x_1-1) < y_1(y_2-1)$ ($\because x_1-1<0,\ y_2-1<0$)

∴거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

15. $f(x)=a^{x+1}-b^x$ 라 하자.

$f(x)=b^x\left\{a\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right\}$ 이므로,

$a \geqq b$ 이면 $x \geqq 1$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수

(i) $a \geqq b$ 일 때,

$x \geqq 1$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1)$ 이고

$f(1)=a^2-b \geqq a^2-a>0$ 이므로

∴ $a^2-b \leqq 10$

가능한 경우는

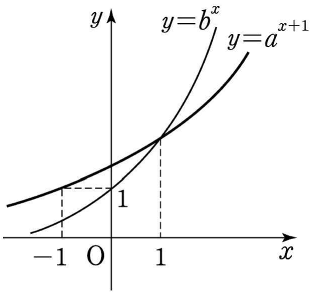
$a=2$ 일 때 $b=2$

$a=3$ 일 때 $b=2,\ 3$

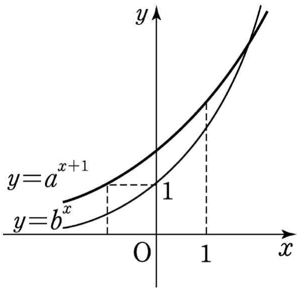
$a \geqq 4$ 이면 $a^2-b \geqq a^2-a \geqq 12$

따라서 $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$ 의 3 가지

(ii) $a<b$ 일 때,



[그림 1]



[그림 2]

$f(x)=0$ 의 근을 α 라 하자.

$\alpha<1$ 이면 [그림 1] 에서 $|f(x)|$ 의 최솟값은 $f(1)$

$\alpha \geqq 1$ 이면 [그림 2] 에서 $|f(x)|$ 의 최솟값은 0

∴ $f(1)<0$ 이면 $-10 \leqq f(1)<0$ 이어야 하고,

$f(1) \geqq 0$ 이면 항상 성립한다.

∴ $f(1) \geqq -10$ 이면 항상 성립한다.

그런데, $f(1)=a^2-b \geqq 2^2-10 \geqq -10$ 이므로

∴ $a<b$ 이면 항상 성립한다.

$2 \leqq a<b \leqq 10$ 에서 $(a,\ b)$ 의 순서쌍은

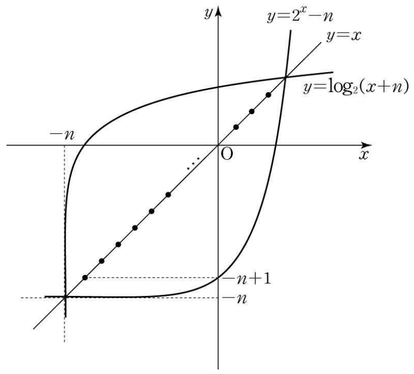
${}_9C_2=36$ 개

따라서 (i), (ii)에서 구하는 순서쌍은

$3+36=39$ 개

16. 정답 573

$y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



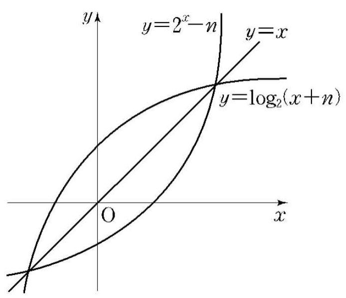
a_n은 $-n<x$이고 $2^x-n \leq x$를 만족시키는 정수 x의 개수이다. $n=k$일 때 만족하는 x는

$-k+1,\ -k+2,\ \cdots,\ -1,\ 0$까지의 k개와 $2^x-x \leq k$를 만족시키는 자연수 x가 있다.

이때, $2^1-1=1$, $2^2-2=2$, $2^3-3=5$, $2^4-4=12$, $2^5-5=27$이므로

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{k=1}^{30} k+(2-1)\times1+(5-2)\times2$$
$$+(12-5)\times3+(27-12)\times4+(30-27+1)\times5$$
$$=573$$

[다른 풀이]



a_n은 $2^x-n \leq x \leq \log_2(x+n)$을 만족하는 정수의 개수이다. 두 함수 $f(x)=2^x-n$, $g(x)=\log_2(x+n)$이라 놓으면 $f(x)$, $g(x)$는 증가함수이고 서로 역함수이다. 위 그림에서 $2^x-n \leq x$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하면 된다.

i) $x<0$일 때

$-n<2^x-n \leq 1-n$이므로

$-n+1 \le x \le 0$이면 주어진 조건을 만족한다.
(n개 존재)
ii) $x>0$일 때
$2^x - x \le n$을 만족하는 양수 x를 구하면 된다.
$h(x)=2^x - x$라 하면
$h(1)=1,\ h(2)=2,\ h(3)=5,\ h(4)=12,\ h(5)=27,$
$h(6)=58$이므로
$n=1$일 때 $x=1$
$n=2,\ 3,\ 4$일 때 $x=1,\ 2$
$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$일 때 $x=1,\ 2,\ 3$
$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$일 때, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$
$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
따라서 i), ii)에서
$n=1$이면 $a_n=n+1$
$n=2,\ 3,\ 4$이면 $a_n=n+2$
$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$이면 $a_n=n+3$
$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$이면 $a_n=n+4$
$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$이면 $a_n=n+5$
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{30} a_n$
$=\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{30} n\right)+(1\times1)+(3\times2)+(7\times3)+(15\times4)+(4\times5)$
$=465+108=573$