$x$

미지수

: 수학 실력 상승의 무한한 가능성

수학 칼럼

# 지수, 로그 그래프에서의 진위판단 - 적용

지난 칼럼에서 정리했던 내용을 바탕으로 이제 6평 18번을 직접 풀어보도록 하겠습니다.

2020학년도 6월 (가) 18번

**18.** 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

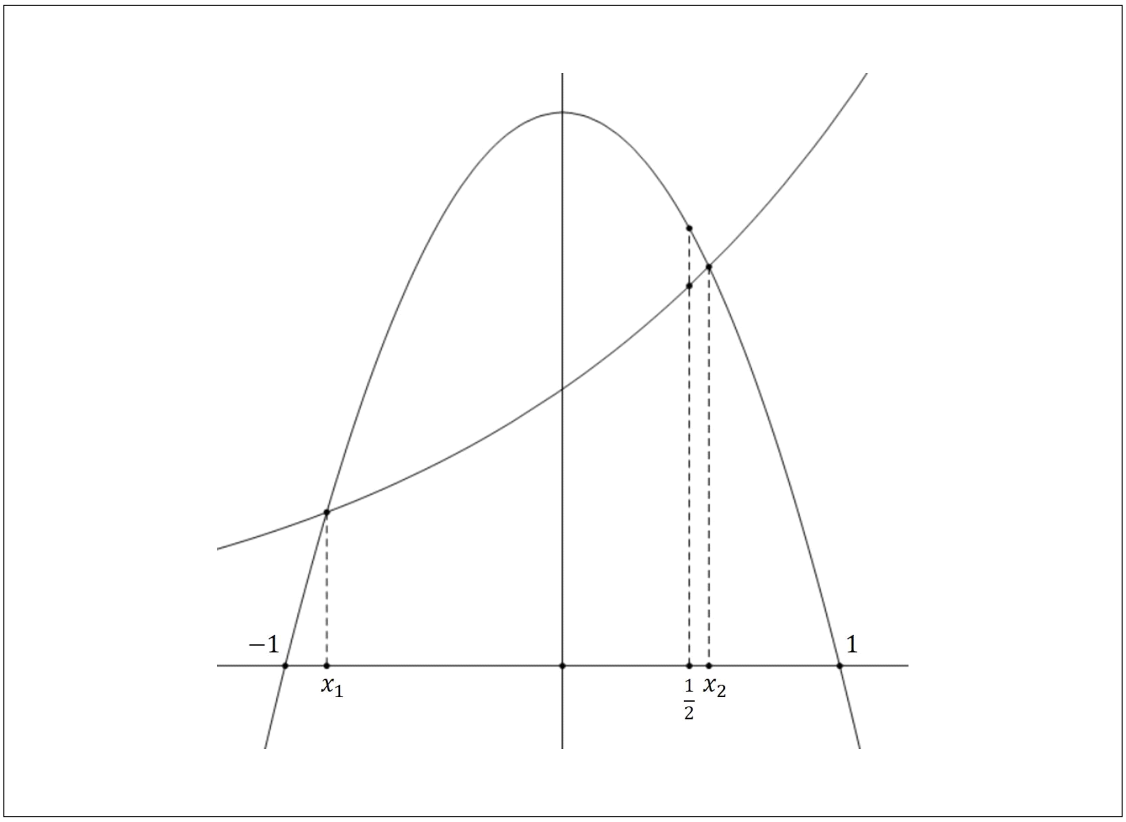
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선지 하나하나씩 자세히 살펴보도록 합시다.

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

해의 범위를 묻는 문제이므로, 사이값 정리를 사용할 가능성이 높습니다. 함수의 그래프를 그려보면 교점이 정확히 두 개가 생기고, 하나는 음수, 하나는 양수임을 알 수 있습니다.

두 실근의 위치

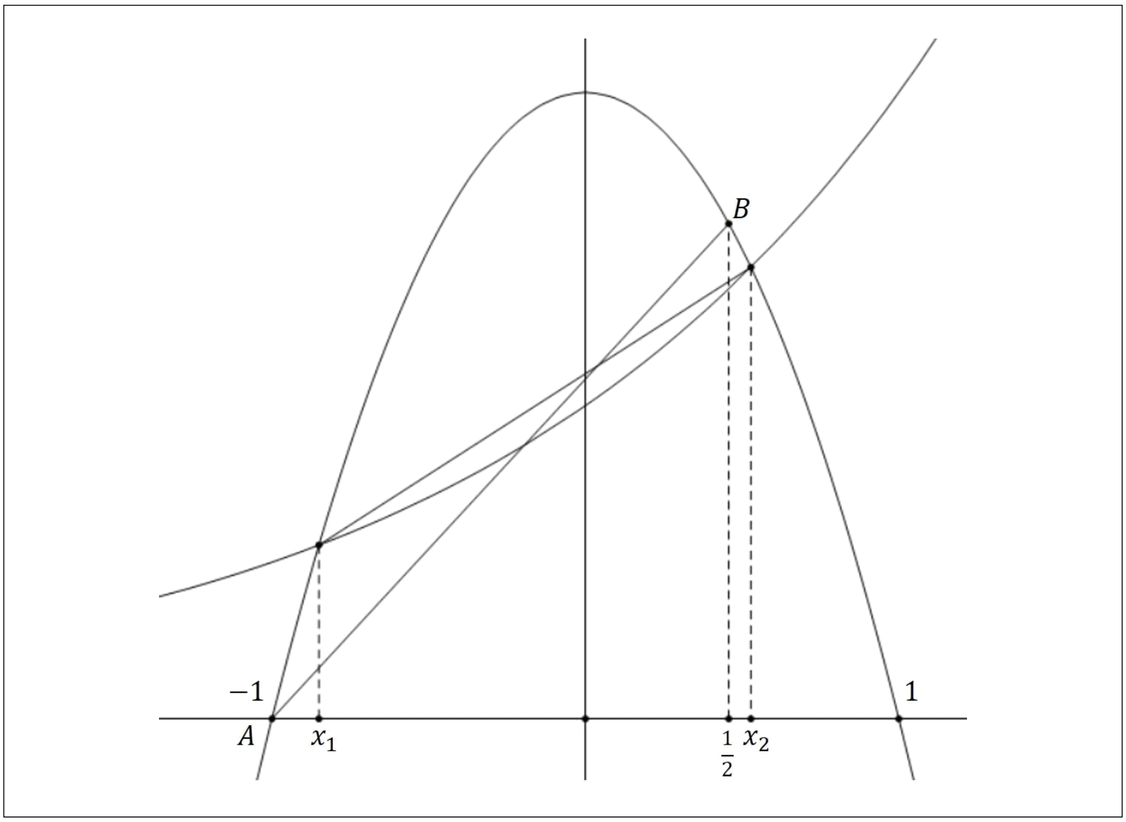



이때 $x_2$는 양수인 해가 됩니다. $\frac{1}{2}$에서 두 함수의 함수값을 비교하면, $2^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}$이므로 $y = -2x^2 + 2$가 더 위쪽에 위치함을 알 수 있습니다. 그러나 $x$가 충분히 커진다면, $2^x$가 $-2x^2 + 2$보다 커지게 됩니다. 따라서 사이값 정리에 의해 $x_2$는 $\frac{1}{2}$보다 큼을 알 수 있습니다.

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

$x$좌표의 차와 $y$좌표의 차를 비교하는 문제이므로, 직선의 기울기를 사용할 가능성이 높습니다. 식을 정리하면 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$, 즉 두 교점을 잇는 직선의 기울기가 1보다 큰지 작은지를 묻는 문제가 됩니다. 이를 알아내기 위해서는 기울기가 1인 직선을 찾아 비교해야 합니다. $A(-1,0)$과 $B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$를 생각해 봅시다. 두 교점을 잇는 직선의 기울기는 $A$와 $B$를 잇는 직선의 기울기보다 작습니다.

기울기 비교

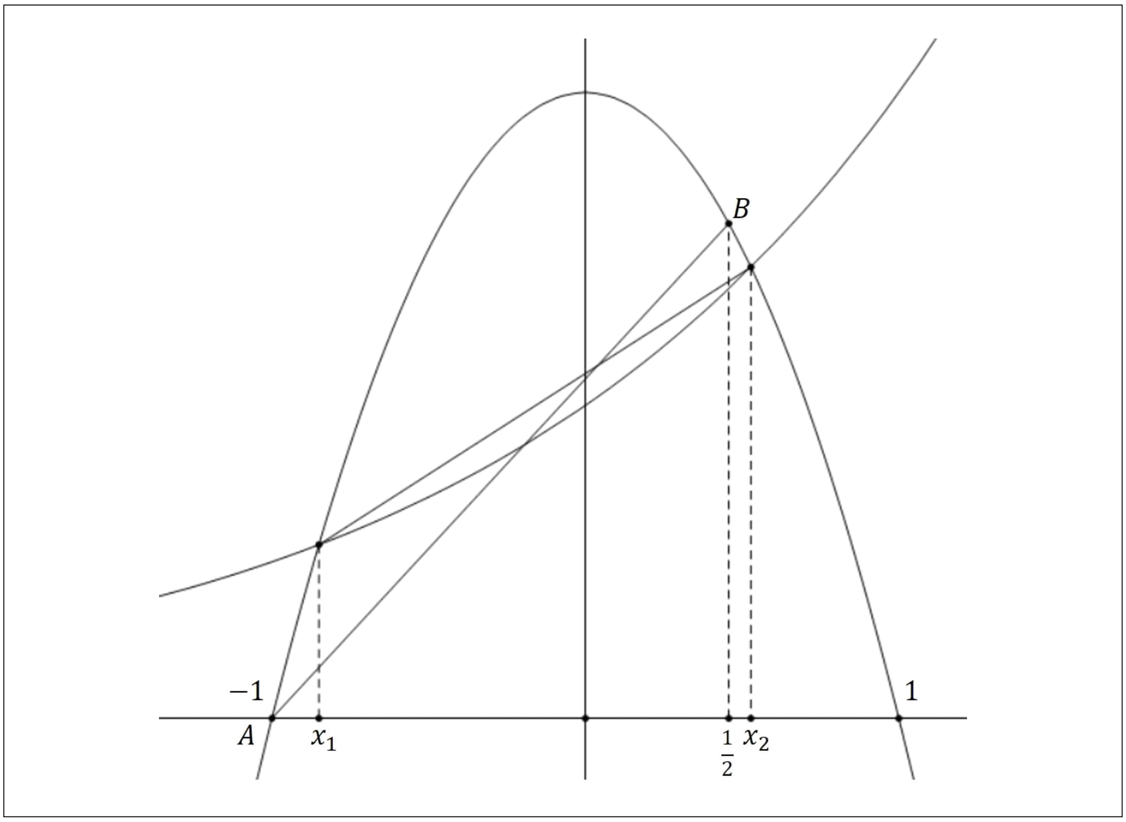



$A$와 $B$를 잇는 직선의 기울기는 정확히 1이므로, 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있습니다. 여기서 $B$를 잡는 것이 굉장히 뜬금없다고 생각할 수도 있는데, ㄱ이 큰 단서를 주고 있음을 알아내셔야 합니다. ㄱ에서 양수인 해가 $\frac{1}{2}$보다 크다고 한 것에 힌트를 얻어서 $B$라는 점을 잡은 것입니다.

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

$y$좌표에 관한 부등식이 나왔는데, 조금 관찰을 한다면 $y$좌표를 직접 다루는 것이 쉽지 않음을 알 수 있습니다. 그런데 두 교점이 모두 $2^x$위에 있으므로, 이 명제는 $x$좌표에 관한 명제로 바꿀 수 있음을 관찰할 수 있습니다. $y_1 = 2^{x_1}, y_2 = 2^{x_2}$임을 이용하면 ㄷ은 결국 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$과 같음을 알 수 있습니다. 이는 결국 해의 범위에 대한 부등식을 다시 만들어야 함을 의미합니다. 우선 그래프의 모양을 보면, $x_1 + x_2 < 0$임은 거의 자명합니다. $y = -2x^2 + 2$은 좌우 대칭이지만 $y = 2^x$는 증가하기 때문에, $x_2$가 $x$축에 더 가까울 수 밖에 없기 때문입니다.

해의 범위




이제 반대쪽 부등식을 살펴봅시다. 역시 ㄱ을 활용해야 합니다. $x_2 > \frac{1}{2}$이므로, $x_1$에 관한 식을 찾아내면 충분합니다. 그런데 역시 그래프를 살펴보면, $2^x$는 항상 양수이므로 $x_1 > -1$임을 알 수 있습니다.

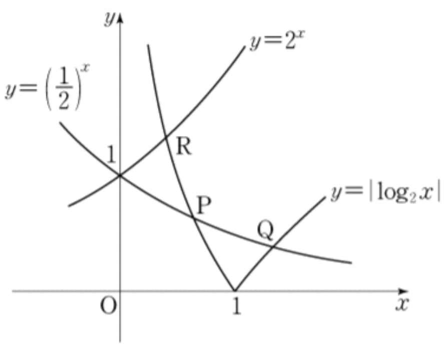
두 부등식을 더하면 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2$를 얻을 수 있습니다.

다른 유명한 문제 하나를 더 살펴보겠습니다.

2011학년도 수능 (가) 16번

**16.** 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]




<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

역시 선지 하나하나씩 자세히 살펴보도록 합시다.

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

해의 범위를 묻고 있으므로 사이값 정리를 활용하는 것이 자연스럽습니다. $x=1$에서 $y=(\frac{1}{2})^x$와 $y=|\log_2 x|$의 함수값을 비교하면 $\frac{1}{2} > 0$으로 $(\frac{1}{2})^x$가 더 크고, $x=\frac{1}{2}$에서 두 함수의 함수값을 비교하면 $\sqrt{\frac{1}{2}} < 1$로 $|\log_2 x|$가 더 큽니다. 따라서 두 그래프의 교점인 $x_1$은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 존재합니다.

### ㄴ. $x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

로그함수와 지수함수가 등장했으므로 대칭성을 관찰해볼 수 있습니다. $y = 2^x$와 $y = \log_2 x$는 $y = x$ 대칭이고, $y = (\frac{1}{2})^x$와 $y = -\log_2 x$ 역시 $y = x$ 대칭입니다. 따라서 $R$과 $Q$ 역시 $y = x$ 대칭임을 알 수 있습니다. 따라서 $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$가 성립합니다.

### ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

일단 같은 첨자끼리 정리하면 $\frac{x_2}{y_2 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$이 됩니다. 이때 부등식의 우변은 $X(1,0)$과 $P$를 잇는 직선의 기울기임을 알 수 있습니다. 이제 좌변 역시 기울기로 해석된다면 굉장히 편하겠죠. 그러나 $x$좌표가 분모에 있어 기울기로 바로 해석하는 것이 어렵습니다. 이때 대칭성을 활용합니다. ㄴ에서 $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$을 얻었으므로 $\frac{x_2}{y_2 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$는 결국 $\frac{y_3}{x_3 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$와 동치임을 알 수 있습니다. 이제 부등식의 좌변은 $X$와 $R$을 잇는 직선의 기울기가 됩니다. 그래프에서 확인할 수 있듯이 $X$와 $P$를 잇는 직선의 기울기가 더 크므로(기울기가 음수임을 생각해야 합니다!) 틀린 보기임을 알 수 있습니다.