합성함수 그래프 쉽게 그리기

가장 쉽게 접할 수 있는 일차함수와 일차함수의 합성함수는 구간을 나누고 대입하여서 쉽게 그릴 수 있습니다. 예시를 통해 살펴봅시다.

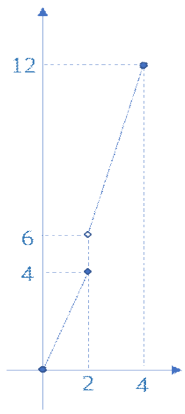
예시

$0 \leq x \leq 4$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 2) \\ 3x & (2 < x \leq 4) \end{cases}$라 하자. $0 \leq x \leq 2$에서 정의된 함수 $h(x) = (f \circ f)(x)$의 그래프를 그려라.

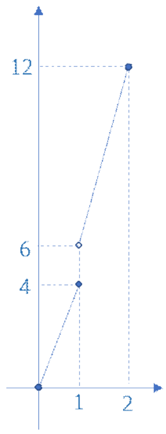
위와 같은 문제는 함수를 직접 대입하는 것이 효율적입니다.

풀이

$h(x) = f(f(x))$, $h(x) = \begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) \leq 2) \\ 3f(x) & (2 < f(x) \leq 4) \end{cases}$이다. $f(x)$는 아래의 그림과 같이 나타낼 수 있습니다.



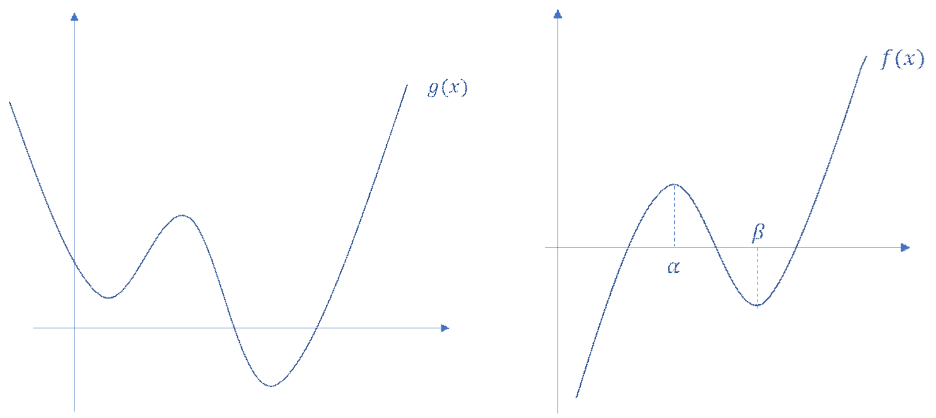
그림에서 $0 \leq f(x) \leq 2$인 x의 범위는 $0 \leq x \leq 1$입니다. 이 범위에서 $h(x) = 2f(x) = 4x$가 됩니다. 또한 $2 < f(x) \leq 4$인 x의 범위는 $1 \leq x \leq 2$입니다. 이 범위에서 $h(x) = 3f(x) = 6x$입니다. 종합하면 $h(x)$의 그래프는 아래와 같습니다.



하지만 차수가 클수록 대입을 하여서 그래프를 그리기는 어려워집니다. 이번에는 차수가 클 때 합성함수의 그래프를 쉽게 그리는 방법을 알아보도록 하겠습니다. 아래의 방법을 사용하면 그래프의 모든 요소를 정확히 그릴 수는 없지만, 함수의 증감/극값을 효율적으로 파악할 수 있습니다. 역시 예시를 통해 살펴봅시다.

예시

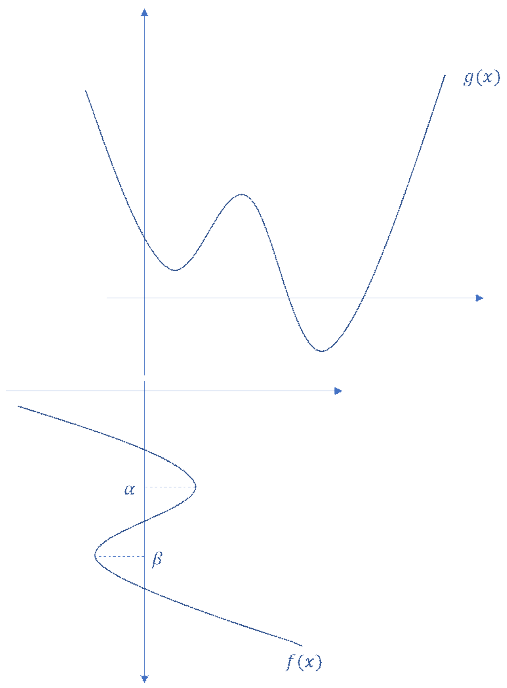
사차함수 $g(x)$와 두 개의 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $g(f(x))$ 그래프의 개형을 그려라.



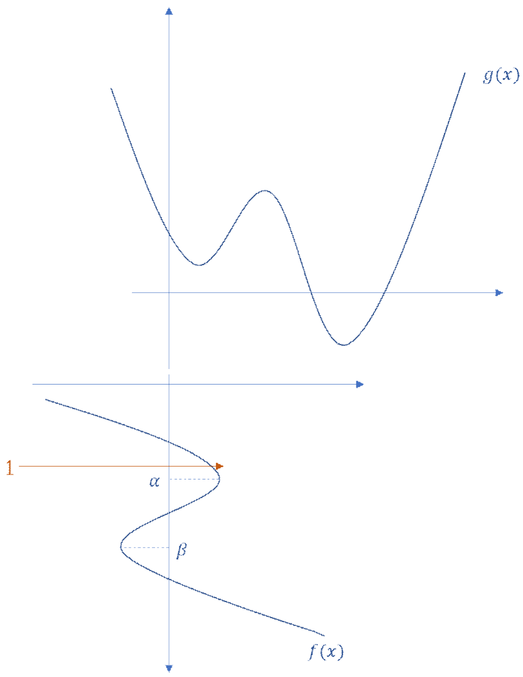
사차함수와 삼차함수의 합성은 12차 함수가 될 텐데, 이 함수를 직접 미분해서 그래프의 개형을 그리는 것은 어렵습니다. 따라서 다른 방법을 사용하는 것이 좋습니다.

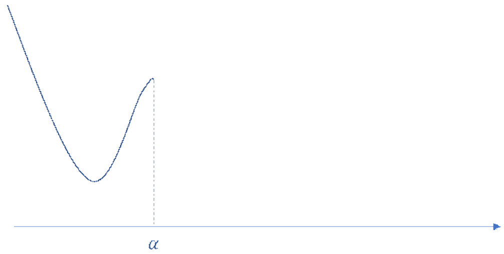
풀이

우선 겉에 있는 함수인 $g(x)$는 그대로 두고 속에 있는 함수인 $f(x)$는 90도로 돌립니다. 그 이후 두 그래프를 합칩니다.

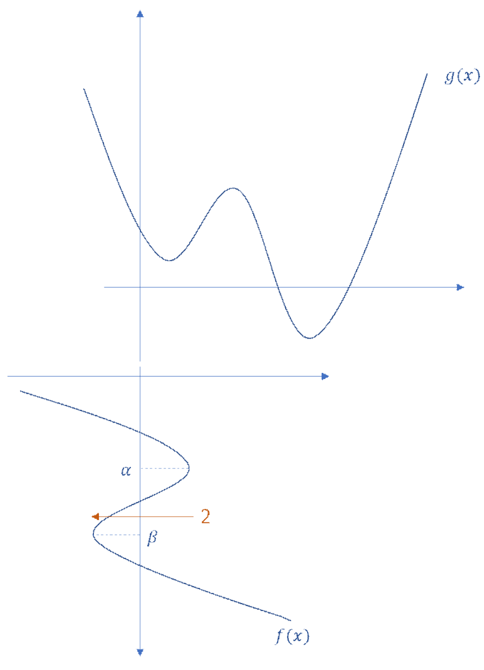


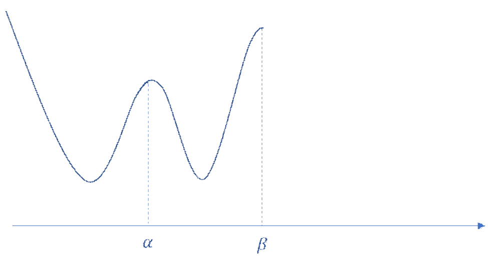
$(-\infty, \alpha)$ 에서는 $f(x)$가 1의 방향으로 증가하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.



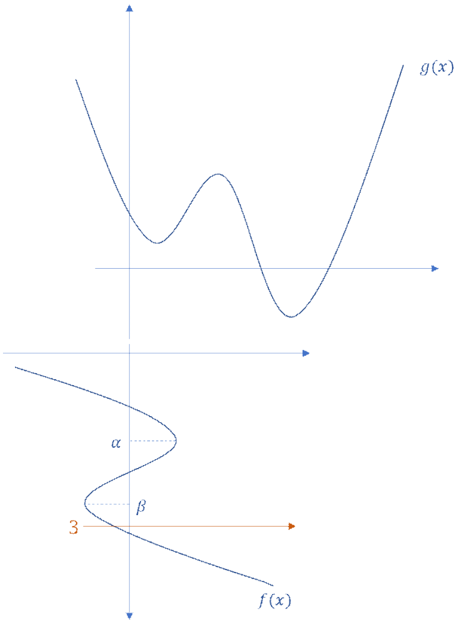


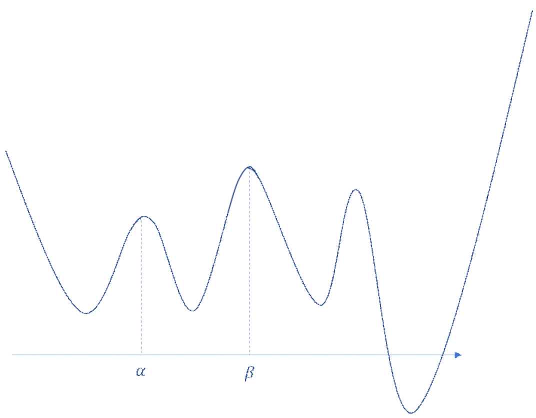
(α, β) 에서는 $f(x)$가 2를 따라 감소하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.





(β, ∞) 에서는 $f(x)$가 3을 따라 증가하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.





이렇게 세 부분을 합치면 합성함수의 그래프를 파악할 수 있습니다.

위와 같은 방법을 사용한다면 각 범위에서의 합성함수의 증가와 감소를 쉽게 파악하여 합성함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있습니다.