x

미지수

: 수학 실력 상승의 무한한 가능성

합성함수의 연속성 판단

이번 칼럼에서는 수능 수학 나형에서 자주 접하는 유형을 살펴볼 텐데요, 바로 불연속 점에서 합성함수를 합성하면 합성함수가 불연속인지 연속인지를 판단하는 유형입니다. 정의를 떠올리면 합성함수가 연속이 되기 위해서는 우극한과 좌극한, 그리고 함수값이 모두 같아야 합니다.

우선 가장 기본적인 함수를 통해서 합성함수의 연속과 불연속을 판단하는 방법에 대해 간단히 알아보겠습니다.

예시

$f(x)=\begin{cases}1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0\end{cases}$ 일 때 $f(f(x))$는 연속인가?

풀이

$x \geq 0$일 때 $f(x)=1$이고, $f(f(x))=f(1)=1$ 입니다.
$x < 0$일 때 $f(x)=-1$이고, $f(f(x))=f(-1)=-1$ 입니다.
따라서 $f(f(x))=\begin{cases}1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0\end{cases}$이고 $x=0$에서 극한값을 갖지 않으므로 불연속입니다.

위의 경우에서는 합성함수가 불연속이 되었지만, 사실 원래 함수에 불연속점이 존재한다 해서 합성함수가 반드시 불연속인 것은 아닙니다. 즉 아래의 네 가지 경우가 모두 가능합니다.

가) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $f(f(x))$ 역시 $x=a$에서 연속
나) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $f(f(x))$는 $x=a$에서 불연속
다) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $f(f(x))$는 $x=a$에서 연속
라) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $f(f(x))$ 역시 $x=a$에서 불연속

이와 같은 상황이 모두 가능하므로 결국 중요한 것은 기본적인 정의에 충실하게 문제를 해결하는 것입니다.

즉, 가)나 다)와 같은 상황이 되려면 다음 조건을 만족해야 합니다.

1) $f(f(x))$가 $x=a$에서 정의된다.
2) $x=a$에서 $f(f(x))$의 극한값이 존재한다.
3) 함수값과 극한값이 일치한다.

반대로 1), 2), 3) 중 하나라도 만족하지 못한다면 나) 또는 라)와 같은 상황이 되겠죠.

이번에는 합성함수에서 극한값을 쉽게 판단하는 방법에 대해 알아보겠습니다.

예를 들어 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ x^2+1 & x \geq 0 \end{cases}$ 와 같은 함수에서 $x \to 0-$, $x \to 0+$으로의 극한을 구할 때, $\lim_{x \to 0+} f(x)=a_1$과 같이 표현하는 것이 아니라 극한의 방향을 포함하여 $\lim_{x \to 0+} f(x)=a_1+$와 같이 표현한다면 합성함수의 극한을 계산하는 것이 더 편해집니다. 실제로 합성함수의 극한을 구할 때 $\lim_{x \to 0+} f(f(x))=\lim_{t \to a_1+} f(t)$ 가 된다는 것을 위의 극한 표현으로부터 바로 알 수 있으므로 계산을 더 편하게 할 수 있습니다.

마찬가지로 $f(f(f(x)))$등 합성함수를 다시 합성한 함수의 연속 불연속을 확인할 때도 이러한 방법을 쓸 수 있습니다. 이때도 결국 $f(f(f(x)))$의 연속성을 확인하려면 최종적으로 합성된 함수에서의 값들, 즉 $f(f(f(x)))$의 우극한과 좌극한, 그리고 함숫값을 확인하여 연속성을 판단하면 됩니다.