무한등비급수의 도형 활용

도형을 활용한 무한등비급수 문제를 쉽게 해결하는 순서는 다음과 같습니다 : 1. 첫째항을 구한다. 2. 구한 그 수는 헷갈리지 않게 표시해 둔다. 3. 닮음을 찾는다. 4. 닮음비를 이용해 넓이비를 구하고, 공비를 구한다. 5. 무한등비급수 공식에 대입한다. 특히 무한등비급수의 도형 활용 문제는 문제가 기므로 문제를 끝까지 읽을 필요 없이 핵심만 밑줄을 긋거나 찾고 풀면 시간을 절약을 할 수 있습니다.

예를 들어 이러한 문제가 있습니다.

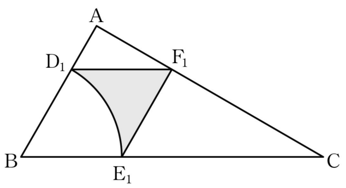
2019학년도 10월 모의고사

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle ABC=60°$인 삼각형 ABC가 있다. 사각형 $D_1BE_1F_1$이 마름모가 되도록 세 선분 AB, BC, CA 위에 각각 점 D_1, E_1, F_1을 잡고, 마름모 $D_1BE_1F_1$의 내부와 중심이 B인 부채꼴 BE_1D_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

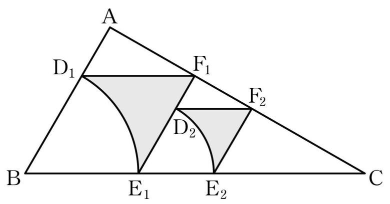
그림 R_1에서 사각형 $D_2E_1E_2F_2$가 마름모가 되도록 세 선분 F_1E_1, E_1C, CF_1 위에 각각 점 D_2, E_2, F_2를 잡고, 마름모 $D_2E_1E_2F_2$의 내부와 중심이 E_1인 부채꼴 $E_1E_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ② $\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$ ③ $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ④ $\frac{2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$ ⑤ $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$

위 문제의 풀이는 아래와 같다.

풀이

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C가 닮음이므로 $\overline{AB} : \overline{F_1E_1} = \overline{BC} : \overline{E_1C}$

마름모 $D_1BE_1F_1$의 한 변의 길이를 x라 하면 $2 : x = 4 : (4-x)$이므로 $x = \frac{4}{3}$

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 마름모 $D_1BE_1F_1$의 넓이에서 부채꼴 BE_1D_1의 넓이를 뺀 값이므로

$a_1 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \sin 60° - \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{60°}{360°} = \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$

그림 R_2에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C의 닮음비는 $1 : \frac{2}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \frac{4}{9}a_n$이 성립한다.

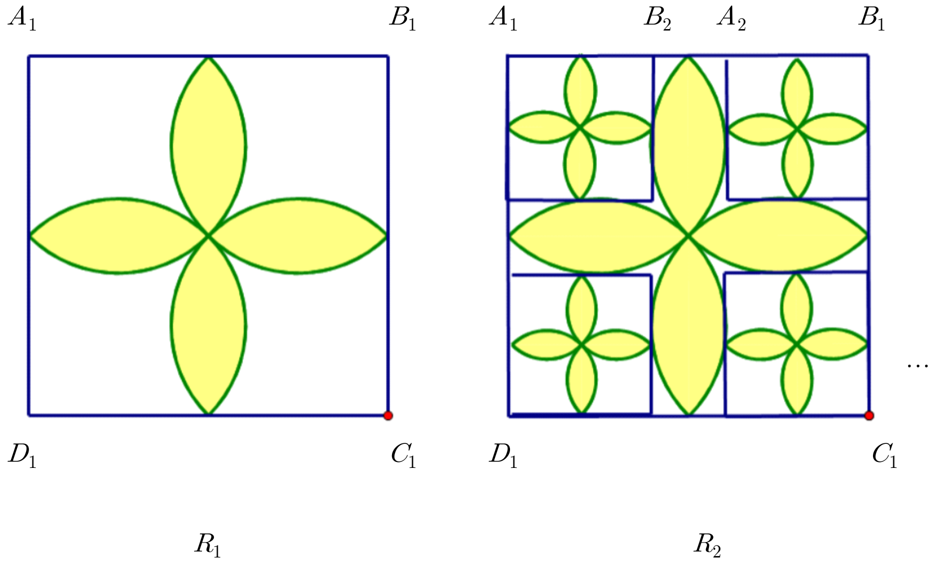
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$이고, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$$

위와 같은 문제에서는 각 단계를 거칠 때마다 늘어나는 도형이 하나입니다. 하지만 문제 유형에 따라 단계를 거칠 때 여러 개의 도형이 추가될 수도 있습니다. 예를 들어서, 닮음인 도형이 n개씩 새로 생긴다고 가정해 봅시다. 이때 도형의 개수를 직접 구해서 도형의 넓이에 곱해 주어도 되겠지만, 수능에서 문제를 빨리 해결하기 위해서는 단순히 공비가 n배 되는 것으로 생각하면 됩니다.

(예를 들어, 위의 문제처럼 도형이 하나씩 추가되는 경우에는 공비가 $\frac{4}{9}$이지만 n개씩 늘어나는 경우 공비는 $\frac{4}{9}n$이 됩니다.)

응용 자작문제



그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$가 있다. $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, S_1이라 하고, P_1R_1과 Q_1S_1의 교점 M_1을 잡자. 네 호 $\overset{\frown}{P_1M_1S_1}, \overset{\frown}{Q_1M_1P_1}, \overset{\frown}{R_1M_1Q_1}, \overset{\frown}{S_1M_1R_1}$이 만드는 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. $A_1B_1C_1D_1$과 두 변을 공유하고, R_1에서 색칠된 부분과 외접하는 네 정사각형을 잡자. 네 정사각형 각각에 위와 같은 작업을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 마찬가지로 R_2에서 그린 네 정사각형 각각에 R_2를 그릴 때와 같은 작업을 반복하여 얻은 도형을 R_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

풀이

A_1, P_1, M_1, S_1을 지나는 원을 그리고 반지름을 찾으면 이때 원의 반지름은 $\sqrt{2}$입니다. 그 후 부채꼴 모양을 찾은 후, 부채꼴 모양에서 삼각형을 빼면 색칠 되어있는 도형에서 한 날개의 반쪽이 나옵니다. 그 반쪽이 8개 생기므로 첫째항은 $8(\frac{1}{2}\pi-1)$입니다. 닮음비는 $4:3-\sqrt{2}$이고 넓이비는 $16:11-6\sqrt{2}$입니다. (아래 그림 참조)이때 한 단계를 거칠 때마다 도형이 4개씩 생기고 있으므로 넓이비인 $\frac{11-6\sqrt{2}}{16}$에 4배를 해준 후, 등비급수 공식에 대입하면 답은 $\frac{16(\pi-2)(6\sqrt{2}+7)}{23}$가 됩니다.