01. 지수와 로그

1. 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대해

$$\log_a b : \log_{bc} ac = 2\log_a bc : 5$$

일 때, $\frac{5}{2}\log_a b - \log_a c$의 값은?

$$\boxed{a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc}$$

$\Rightarrow 5\log_a b = 2\log_a ac,$

$5\log_a b - 2\log_a c = 2$

$\therefore$ (준식) $= 1$

2. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3} = k$$

을 만족시킬 때, $\log_a b \div \log_a c$의 값은?

$= \log_c b = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{2k}$

$\log_a b = k$

$\log_b c = 2k$

$\times \quad \log_c a = 3k$

$1 = 6k^3, \quad k = 6^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore$ (준식) $= \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \times \sqrt[3]{6}$

cf) $\log_\alpha \beta = \frac{\ln\beta}{\ln\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha \neq 1)$

3. 자연수 n이 $2 \le n \le 10$일 때, $n^2 - 10n + 21$의 n 제곱근 중에 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (2106 연계)

$n^2 - 10n + 21 = (n-3)(n-7)$

, n이 홀수, $3 < n < 7$

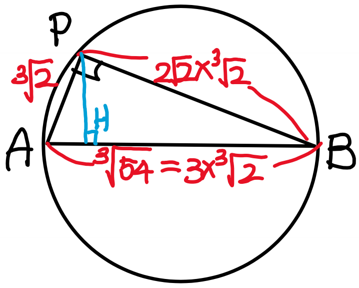
or

n이 짝수, $n < 3$ or $n > 7$

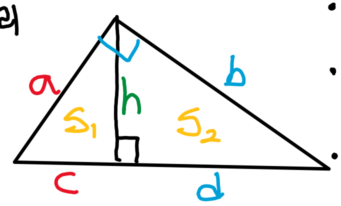
$\Rightarrow n = 2, 5, 8, 10$

$\boxed{\therefore 25}$

4. 길이가 $\sqrt[3]{54}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt[3]{2}$이다. 점P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 PAH의 넓이는 $2^a \times 3^b$이다. a 와 b의 값은?



★사영정리



• $h^2 = cd$

• $a^2 : b^2 = c : d = S_1 : S_2$

• $ab = h(c+d)$

$\therefore \triangle PAH = \frac{1}{9} \triangle PAB$

$= \sqrt{2} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2}$

$= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{-2}$

$\to n=2^m\ (m\geq 1)$

5. $\log_2 n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 양수 a의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) $\log_2 a$는 정수이다. ; $a=2^A$
(나) $\log_a n \times \log_n(n\times a^2)$은 자연수이다.

$f(n)=7$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 할 때, $\log_4 k$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 1$)

(나) $\to \log_a(n\times a^2) = 2+\log_a n$ 이 자연수

$\to \log_a n = -1$ or m의 약수

$\Rightarrow a=\frac{1}{n}$ or $\log_2 a = m$의 약수

인 a가 7개

$\Rightarrow m$의 약수가 6개, 양의 약수

$\to m = \begin{cases} p^5 \geq 2^5 = 32 \\ p^2 q \geq 2^2\times 3 = 12 \end{cases}$

$\therefore m$의 최솟 $=12$,

$\log_4 k = \frac{12}{2} = 6$

$\to x=2^n$

6. 두 집합 $A=\{x\,|\,\log_2 x$ 는 자연수 $\}$, $B=\{x\,|\,\log_p x$ 는 자연수 $\}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, p의 값을 구하시오. (단, p는 1이 아닌 양의 실수이다.)

$\to x=p^n$

(가) $A\cap B=B$ $\Rightarrow A\supset B$, p는 2의 거듭제곱
(나) $a\in A, b\in B, 2\leq a\leq 10, 1\leq b\leq 1000$이고, $\log_a b$가 자연수가 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 7이다.

Let $p=2^k\ (k\geq 1)$

$\Rightarrow A=\{2^1, 2^2, 2^3, \cdots\}$

$B=\{2^k, 2^{2k}, 2^{3k}, \cdots\}$

$a\in A$, $2\leq a\leq 10 \Rightarrow a=2^1$ or 2^2 or 2^3

$b\in B$, $1\leq b\leq 1000 \Rightarrow b=2^k$ or 2^{2k} or $\cdots$

(2^9를 넘지 않음)
$=512$

※ $k\geq 4$이면 b는 2개 이하; (a,b) 개수 $\leq 6 (=3\times 2)$

$\Rightarrow k=2$ or $k=3$

i) $k=2$: $b=2^2$ or 2^4 or 2^6 or 2^8,

$\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} \Rightarrow \frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{6}{1}, \frac{8}{1}$

$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$

$\frac{6}{3}$ (9개)

ii) $k=3$: $b=2^3$ or 2^6 or 2^9,

$\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} \Rightarrow \frac{3}{1}, \frac{6}{1}, \frac{9}{1}$

$\frac{6}{2}$ (7개)

$\frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}$

$\therefore p=2^3=\boxed{8}$

02. 지수함수와 로그함수

1. 정의역이 $\{x|0 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=2^x+1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. 정의역이 $\{x|0 \le x \le 2\}$인 함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 최댓값과 최솟값이 각각 $-m, -M$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $b>0$, $b \ne 1$)

$$M=5,\ m=2 \Rightarrow \begin{cases} g(0)=-2,\ g(2)=-5\ (b<1) \\ \text{or} \\ g(0)=-5,\ g(2)=-2\ (b>1) \end{cases}$$

• $g(0)=a-1$, $g(x)<a$ ($y=a$)

$g(0)=-5$이면 $a=-4$, $g(2)>a$ (X)

$\therefore g(0)=-2$, $a=-1$,

$-1-\left(\frac{1}{b}\right)^2=-5$; $b=\frac{1}{2}$

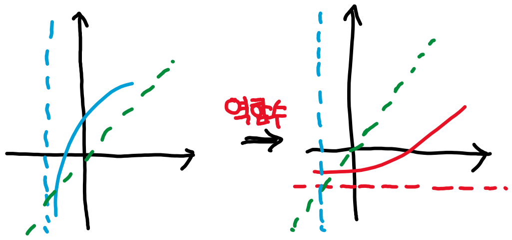
2. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}+b$ $(a>0,\ a \ne 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나고 점근선이 직선 $x=-2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

g가 $(3,0) \rightarrow f$가 $(0,3)$

g 점근선 $x=-2 \rightarrow f$ 점근선 $y=-2 \Rightarrow b=-2$

$f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}-2$,

$f(0)=a-2=3$; $a=5$



3. 함수 $y=\log_2(2x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=2$일 때, $f(a-2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

$g(x)$

$g(x-1) \leftrightarrow f(x)$

$x=2$ $\quad$ $y=2$

g를 x로 +1한 점근선 : $x=2$

$\Rightarrow g$의 〃 : $x=1$

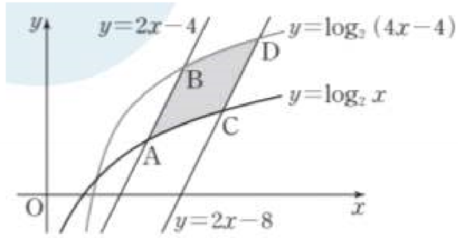
$\rightarrow 2-a=0$, $a=2$

$f(0)$; $g(x-1)=0$이 되는 x

: $x-1=\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$

P.S) $f(x)=2+2^{x-1}$

4. 그림과 같이 제1사분면에서 직선 $y=2x-4$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2x-8$이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는?

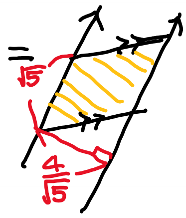


$\log_2(4x-4)=2+\log_2(x-1)$

: $\log_2 x$를 → ↑ 한 그래프

$\Rightarrow$ A⌒C, B⌒D 는 합동,

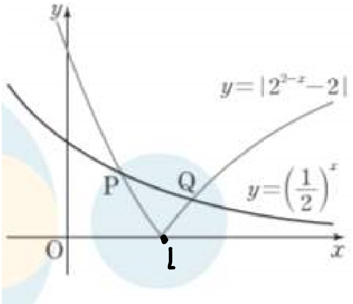
(구하는 넓이) = □ABCD = 4



5. 그림과 같이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=|2^{2-x}-2|$

가 만나는 두 점을 각각

$P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



[보기]

ㄱ. $x_1<1<x_2$

ㄴ. $y_2>\frac{1}{2}$ $(x_2>1)$

ㄷ. $x_1>\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow y_1<\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{4}{9}<\frac{1}{2}$

• $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=y_1$, $\underbrace{2^{2-x_1}}_{=4y_1}-2=y_1$, $y_1=\frac{2}{3}$

• $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=y_2$, $2-2^{2-x_2}=y_2$

6. 자연수 n에 대하여 직선 $y=t$(t는 실수)와 두 곡선 $y=\log_3 x$, $y=\log_3(x-n)$이 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 R라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오. (2106 연계)

(가) $1 \le n \le 50$
(나) 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ} \ge 20$이다. ; $t\ge0$서 항상 $\overline{PQ}+\overline{RQ}<20$이면 OUT

$P(3^t, t)$

$Q(3^t+n, t)$

$R(3^t+n, \log_3(3^t+n))$

$\Rightarrow \overline{PQ}=n$, $\overline{RQ}=\left|\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)\right|$

$t\ge0$서 항상 $n+\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)<20$인 n을 배제

$\Rightarrow$ $n+\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$은 $t=0$서 최댓값 $n+\log_3(1+n)$을 가짐

$\Rightarrow$ $n+\log_3(1+n)\ge 20$인 n이 (나)를 만족.

$n=17$: $17+\log_3 18=19.xx$ (X)

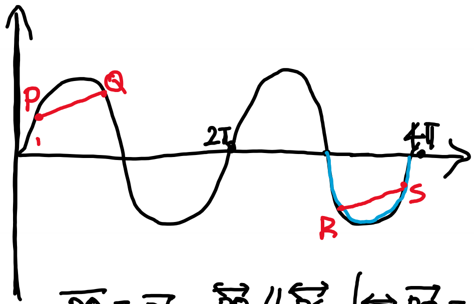
$n=18$: $18+\log_3 19=20.xx$ (O)

$\therefore$ $n=18\sim50$, 33개

03. 삼각함수의 뜻과 그래프

1. $0 \le x \le 4\pi$에서 곡선 $y=\sin x$ 위에 x좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2}{3}\pi$인 두 점 P, Q가 있다. 이 곡선 위에 있으며 x좌표가 3π 이상이고 4π 이하인 두 점 R, S를 사각형 PRSQ가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 삼각형 QRS의 무게중심의 좌표는 (a, b)이다. $\frac{a}{b}$의 값은?

$P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$\overline{PQ}=\overline{RS}$, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ $\left(\Leftrightarrow \vec{PQ}=\vec{RS}\right)$

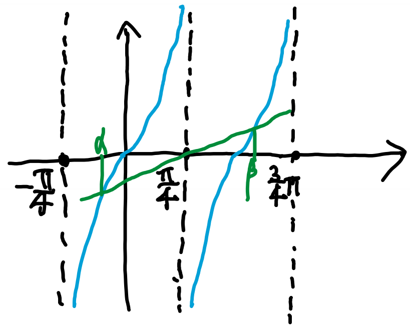
$\Rightarrow R\left(\frac{10}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $S\left(\frac{23}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ QRS의 G

$=\left(\frac{47}{18}\pi, -\frac{1}{6}\right)$

$\therefore -\frac{47}{3}\pi$

2. $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$에서 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=m\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $(m>0)$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi$이다. $3\pi m$의 값을 구하시오.



$\tan 2x$는 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$에 점대칭

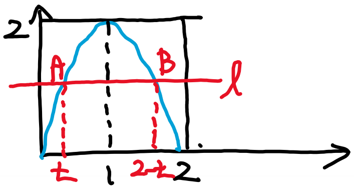
$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}\pi$, $\tan\beta=\tan\frac{5}{4}\pi$

$=1$

$m=$ 기울기 $=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{3}{8}\pi}=\frac{8}{3\pi}$

$\therefore 8$

3. $0 \le x \le 2$일 때, 그림과 같이 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 x축에 평행한 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}$일 때, $\left(\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^2$의 값은?



$\overline{AB}=\frac{4}{3} \rightarrow t=\frac{1}{3}$, $l: y=1$

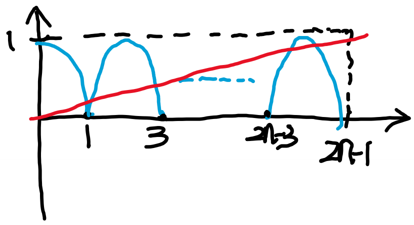
$\Rightarrow \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{1+\frac{25}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{17}{5}$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$ (단, $-1 \le x \le 1$)
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x+2)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여서 $0 \le x \le 2n-1$에서 방정식 $(2n-1)f(x)=2x$의 서로 다른 실근의 개수가 51일 때, n의 값을 구하시오.

준식 변형: $\frac{f(x)}{2}=\frac{1}{2n-1}x$



실근: $[0,1)$서 1개

$(1,3)$서 2개

$(3,5)$서 2개 $\Rightarrow (2n-1)$개

⋮

$(2n-3,2n-1)$서 2개

$2n-1=51$

$\Rightarrow n=26$