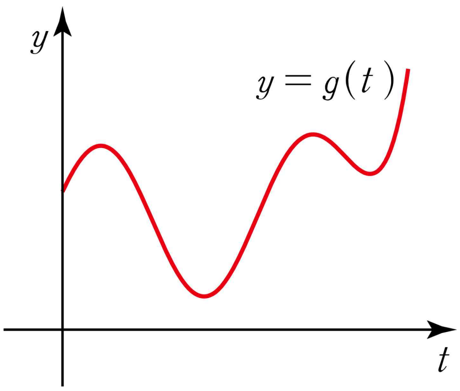
Chapter 8. 상수와 변수, 매개변수

상수와 변수

미적분에서 많이들 헷갈리는 파트이다. 특히 x와 t 등등이 섞이고 $f(x), g(x), h(x)\cdots$식들이 뒤섞이면 매우 혼란을 느낄 수밖에 없다.

그래프 그릴 때부터 보자. 킬러 문제로 갈수록 새로운 변수와 새로운 함수가 정의되는 일이 많고 이에 따라 새로운 함수 그래프 그리는 일이 빈번할 것이다.



예를 들어 $y=g(t)$ 그래프를 그린다고 하면 꼭 이 행동만은 기본적으로 해줘라.

1. **제발 가로축에 t를 써놓자.** x랑 t랑 뒤섞일 수 있기에 반드시 표시해야 한다.

2. **세로축에도 반드시 y를 적어둔다.**

3. **$y=g(t)$를 꼭 써놓자.** 그래프 3개 이상 그리다 보면 그래프들이 구별이 잘 안 된다.

이제 미적분 킬러 조건에 많이 섞여 나오는 x, t가 어떤 조건에서 상수인지 변수인지 따져 보겠다.

이과라면 몇 가지 고정 관념을 버려야 한다.

꼭 x, y만이 변수가 아니다.

또한 뉴턴식 미분 표현인 y'뿐만 아니라 **라이프니츠식 미분 표현인 $\frac{dy}{dx}$도 잘 다뤄야 한다.**

y'이 매우 편하지만 꼭 머릿속에 **'y를 x에 대해 미분한다.'를 의식**해야 한다. 즉 $y'=\frac{dy}{dx}$!

y'을 남용하게 되면 **'미분할 수 있는 변수는 x 뿐인 건가?' 착각**하게 된다.

따라서 **미분 변수의 커버 범위가 훨씬 넓은 라이프니츠식 미분 표현**인 $\frac{dy}{dx}$도 익숙해지도록 하자. 익숙해지면 x, y에 갇혀 있는 사고방식을 깰 수 있을 거다.

$k=\int_a^b f(t)dt$ (a,b는 상수)에서 보면 k, t는 상수인가 변수인가?

$\int_a^b f(t)dt$은 항상 상수이므로 k는 상수이다.

$\int_a^b dt$ 적분 기호 내부에서는 dt가 알려주듯 t가 변수이다.

$g(x)=\int_0^x f(x-t)dt$는 무엇이 상수이고 무엇이 변수인가? 식을 간단히 하면?

미적분 기본정리 꼴이므로 반사적으로 적분 구간에 $x=0$을 대입하여 $g(0)=0$을 뽑아내고, 양변을 x에 대해 미분하려 하는데 뭔가 이상하다.

$\int_0^x dt$ 내부에도 x가 있기 때문이다.

x, t는 서로의 매개변수가 아니다.

따라서 $\int_0^x dt$ 내부에서는 dt가 알려 주듯 t가 변수이고 x는 상수이다.

$g(x)=\int_0^x f(x-t)dt$로 보면 $\int_0^x dt$ 외부에서는 x가 변수가 된다.

$f()$에서 괄호 안을 최대한 간단한 형태로 바꾸는 것이 좋기 때문에 $x-t=a$로 치환한다.
x, t는 서로의 매개변수가 아니므로 $x-t=a$ 양변을 t에 대해 미분하면 $-dt=da$이다.
$g(x)=\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(a)da$로 바뀌고 양변을 미분하면 $g'(x)=f(x)$가 나온다.

※ 여러 질문들이 생길 수 있다.

1. x, t가 서로의 매개변수가 아닌 걸 왜 따지는가?

   $x=g(t)$꼴처럼 표현되면 t는 x의 매개변수이고 $t=h(x)$로 표현되면 x는 t의 매개변수이다.

   x, t가 매개변수 관계이면 $x-t=a$ 양변을 t에 대해 미분하면
   $-1=\frac{da}{dt}$가 아닌 $\frac{dx}{dt}-1=\frac{da}{dt}$가 된다.

   x, t가 서로의 매개변수가 아니어야 $x-t=a$ 양변을 t에 대해 미분할 때
   t입장에서 x가 상수 같은 입장이므로 $\frac{dx}{dt}=0$으로 $-1=\frac{da}{dt}$이다.

2. 왜 $x-t=a$ 양변을 t에 대해 미분하면 $-dt=da$일까?

$-1=\frac{da}{dt}$에서 $\frac{da}{dt}$**를 분수처럼 다뤘다.** 고등학교 교육과정 내는 아니지만 **이 사실을 알면 매우 편하다.** 증명은 Chain Rule을 이용하면 된다. (치환적분의 역과정)

$\frac{da}{dt}$**를** $\frac{1}{\frac{dt}{da}}$**로 다룰 수도 있고** $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$**로 다룰 수 있다.**

이는 수능 문제 풀 때도 엄청난 편리함을 가져다준다. 18학년도 수능 21번 풀이를 통해 느낄 수 있을 것이다.

11학년도 9월 평가원 28번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

1. x, t는 서로의 매개변수가 아니다.

따라서 $\int_0^2 dx$ 적분 기호 내부에서는 dx가 알려주듯 x가 변수이고 t가 상수이다.

$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$로 보다시피 적분 기호 외부에서는 t가 변수임을 알 수 있다.

2. x, t는 서로의 매개변수가 아니므로 $tx = a$로 치환하면 $tdx = da$이다.

이렇게 치환한다면 $\int_0^{2t} \frac{1}{t^2} \times af(a)da = 4t^2$로 표현된다.

x는 a의 매개변수이지만 t, a는 서로의 매개변수가 아니다.

따라서 $\int_0^{2t} da$ 적분 기호 내부에선 da가 알려주듯 a가 변수이고 t가 상수이다.

$\frac{1}{t^2}\int_0^{2t} af(a)da = 4t^2$로 바꿀 수 있다.

3. $\int_0^{2t} af(a)da = 4t^4$ 의 양변을 t에 대해 미분하면 $2 \times 2tf(2t) = 16t^3$이므로 $t = 1$을 대입하면 $f(2) = 4$이다. 답은 ④!!

질문은 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서 마음껏 받아줌.

매개변수

이제 x, t 또는 y, t가 매개변수 관계일 때 식을 다뤄보자. **15학년도 6월 평가원 21번** **박스 안 내용을 잘 숙지하자!** 학습 후 박스 없이도 풀이할 수 있어야 한다.

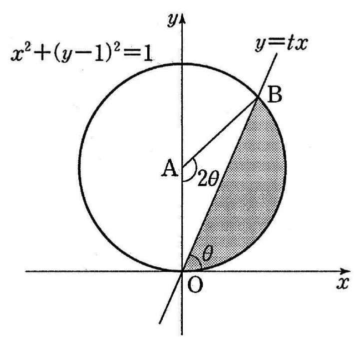
15학년도 6월 평가원 21번

양의 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 x, y 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$ 라 하자. 다음은 $f'(2)$ 의 값을 구하는 과정이다.

원 $C : x^2+(y-1)^2=1$ 의 중심을 A,
원 C 와 직선 $l : y=tx$ 가 만나는 두 점을 각각 O, B 라 하자.
직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\angle\mathrm{OAB}=2\theta$ 이다.
주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하면



$$g(\theta)=\theta-\boxed{(가)}$$

이다. $t=\tan\theta$ 이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$ 이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(\theta)=f'(t)\times\boxed{(나)}$$

이다.
$t=2$ 일 때, $\tan\theta=2$ 이므로 $f'(2)=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$ 라 하고 (다)에 알맞은 수를 a 라 할 때, $a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{8}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{12}{25}$ ④ $\frac{14}{25}$ ⑤ $\frac{16}{25}$

박스 안을 그대로 따라가도 되지만 매개변수 미분법을 설명하기 위해 독자적인 풀이를 하도록 하겠다.

1. $f(t)$를 구하면 바로 해결 되지만 **색칠된 영역의 넓이를 t로 바로 표현하기에는 무리가 있어 보인다.** **직선의 기울기를 보면 $\tan\theta$를 자동적으로 떠올려야 한다.** 따라서 직선의 기울기인 t를 $t=\tan\theta$로 잡아준다. **θ는 t의 매개변수이다.**

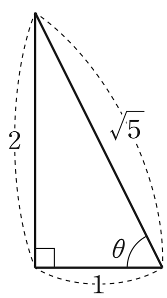
2. θ를 이용하면 색칠된 영역의 표현이 쉬워진다. 부채꼴 OAB 넓이에서 $\triangle OAB$ 넓이를 빼면 된다.
부채꼴 OAB 넓이$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\theta$이고 $\triangle OAB$ 넓이$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 2\theta$
따라서 $f(t)=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$이다.

3. 박스 안을 그래도 따라가도 되지만 매개변수 미분법을 설명하기 위해 독자적인 풀이를 하도록 하겠다.
$f(t)=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$이고 우리는 $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=2}$가 필요하다.

현재 $f(t)$를 보면 θ로 미분해주는 건 쉬울 것 같다.
$t=\tan\theta$**이 있어 t 입장에서도 θ로 미분해주는 건 쉬울 것 같다.**

따라서 구하고자 하는 식을 $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=2}=\left.\frac{df(t)}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=2}$ 이렇게 바꿔준다.

4. $\frac{df(t)}{d\theta}=1-\cos 2\theta$로 쉽게 구할 수 있고 $\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$로 쉽게 구할 수 있다.
아니, 근데 우리는 $\frac{d\theta}{dt}$가 필요하잖아!! 문제없다.
$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{d\theta}}=\frac{1}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta$로 바꿔 주면 끝!



5. $t=2$일 때, θ가 예각이므로 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이다.
$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{3}{5}$
$f'(2)=\left.\frac{df(t)}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=2}=(1-\cos 2\theta)\cos^2\theta\big|_{t=2}=\frac{8}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{8}{25}$

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

미안하다 이거 보여주려고 어그로 끌었다.. 기출의 파급효과 수준 ㄹㅇ실화냐? 진짜 세계관 기출 실전서다.. 그 찐따 같던 파급효과 맞나? 진짜 파급효과는 전설이다.. 진짜 옛날에 파급 EBS 선별 때부터 봤는데 오르비 저자 돼서 ‘기출의 파급효과’까지 쓴거 보면 감격스럽고 파급의 프로 옯창 시절이 뇌리에 스치면서 가슴이 웅장해진다.. 와 진짜 파급효과가 저렇게 되다니 진짜 눈물나려고했다.. 옛날 EBS 선별자료 만드려고 밤 새던 것도 생각나고 고딩 때 수학 때문에 고생하던 것도 생각나고 뭔가 슬프기도하고 좋기도하고 감격도하고 여러가지감정이 복잡하네.. 아무튼 파급효과는 진짜 실전서 중 최고임..

어그로 끌어서 죄송합니다.
이렇게 텐션 높은 실전서가 마음에 든다면
기출의 파급효과 다른 시리즈도 잘 맞을 것입니다.

이유는
이 원고도 기출의 파급효과 미적분 교재 ‘일부’이기 때문입니다.
기출로 얻을 수 있는 일관된 태도, 도구로 단시간에 수학을 뚜까패는 걸 보여드리고 싶습니다.

2월 말에 확통이 나왔고,
수2는 4월 중순, 미적은 4월 말, 수1은 6평 전후로 나올 예정입니다.

구매 링크는 https://atom.ac/books/7241 입니다.
atom에서 사기 싫으면 Yes24나 교보문고 등에서도 구입 가능합니다.

https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서는 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료들도. 받아볼 수 있고** 교재 인증 시 컨텐츠 질문 답변도 언제든 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀 TWCG가 (유명한 헬린이 님, 도비 님이 계시는 팀)**
정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.

질문은 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서 마음껏 받아줌.

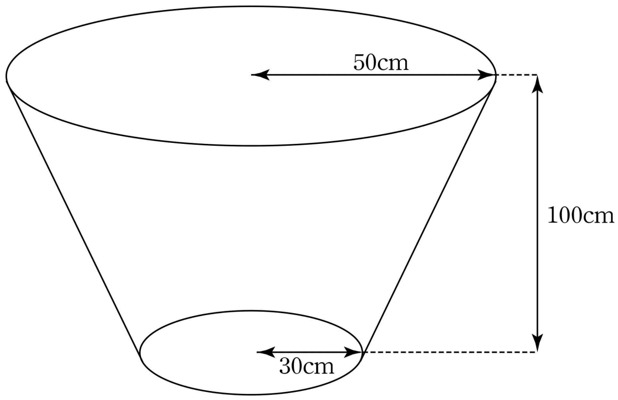
97학년도 수능 23번

그림과 같이 높이가 100cm 이고 윗면은 반지름이 50cm, 아랫면은 반지름이 30cm인 원으로 된 원뿔대 모양의 물통에 물이 가득 차 있었다. 이 물통의 바닥에 구멍이 나서 바닥에서부터 수면까지의 높이가 h cm일 때 매초 $4\sqrt{h}\,\mathrm{cm}^3$ 의 양으로 물이 새어 나가고 있다. $h=50$ 일 때 높이의 순간 변화율은? (단위는 cm/sec) [4점]

① $-\dfrac{20\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$ ② $-\dfrac{5\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$ ③ $-\dfrac{20\sqrt{2}}{9\pi}\times 10^{-2}$

④ $-\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}\times 10^{-2}$ ⑤ $-\dfrac{4\sqrt{2}}{5\pi}\times 10^{-2}$

1. 일단 화내지 마라. 나도 생각이 있어서 예시로 낸 거다. 내가 막 옛날 기출 성애자 이런 거 아니다. 이 문제로 매개변수 미분법 활용이 보다 자유자재로 될 것이다. 왜냐면 내가 그랬거든. 먼저 그림부터 그리자.



2. ‘매초 $4\sqrt{h}\,\mathrm{cm}^3$의 양으로 물이 새어 나가고 있다.’를 식으로 표현해보자.

물의 부피를 V로 잡으면 $\dfrac{dV}{dt}=-4\sqrt{h}$이다. 불편한가? 왜?

당연히 **t에 대해 미분하면 $\dfrac{dV}{dt}$가 t에 관한 식으로 나와야 마음이 편할 거 같다.**

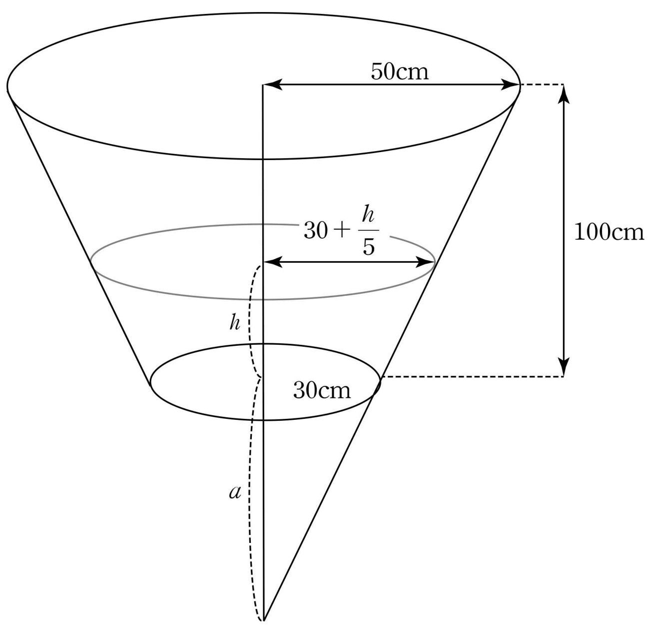
그런데 앞으로 그런 편견 버려라. 그럴 필요 없다.

다만 t, h, V는 **매개변수 관계**이므로 나중에 관계식을 구해야 한다.

3. $h=50$일 때 높이의 순간 변화율은 $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=50}$로 표현이 가능하다.

h의 식을 t로 direct로 표현할 수 있으면 좋겠지만 아쉽게도 그건 힘들다.

먼저 구할 수 있는 식부터 구해보자.



높이 h에서 원뿔대의 단면의 반지름은 비율 관계를 이용하면 $30+\frac{h}{5}$이다.

a도 비례식 $a:a+100=30:50$을 풀면 $a=150$.

물의 높이가 h일 때, 물의 부피는

반지름이 $30+\frac{h}{5}$cm이고 높이가 $h+150$cm인 원뿔의 부피에서

반지름이 30cm이고 높이가 150cm인 원뿔의 부피를 빼면 된다.

반지름이 30cm이고 높이가 150cm인 원뿔의 부피는 상수 A로 잡자.

왜냐면 $\frac{dV}{dt}$를 구할 때 상수 부분은 미분해서 0이기에 굳이 힘들게 반지름이 30cm이고 높이가 150cm인 원뿔의 부피를 구할 필요 없다.

4. 따라서 물의 높이가 h일 때, 물의 부피는 $V=\frac{\pi}{3}(30+\frac{h}{5})^2(h+150)-A$으로 표현이 가능하다.

V, h에 관한 식을 이용하려면 $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=50}$을 $\left.\frac{dh}{dV}\times\frac{dV}{dt}\right|_{h=50}$로 바꿔라.

$$\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=50}=\left.\frac{\pi}{3}\left\{(\frac{h}{5}+30)^2+\frac{2}{5}(h+150)(\frac{h}{5}+30)\right\}\right|_{h=50}=1600\pi$$

$$\left.\frac{dh}{dV}\right|_{h=50}=\frac{1}{\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=50}}=\frac{1}{1600\pi}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=50}=-4\sqrt{h}\,|_{h=50}=-20\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=50}=\left.\frac{dh}{dV}\times\frac{dV}{dt}\right|_{h=50}=\frac{-20\sqrt{2}}{1600\pi}=-\frac{5\sqrt{2}}{4\pi}\times10^{-2}$$

답은 ④!!

18학년도 수능 21번

양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은? [4점]

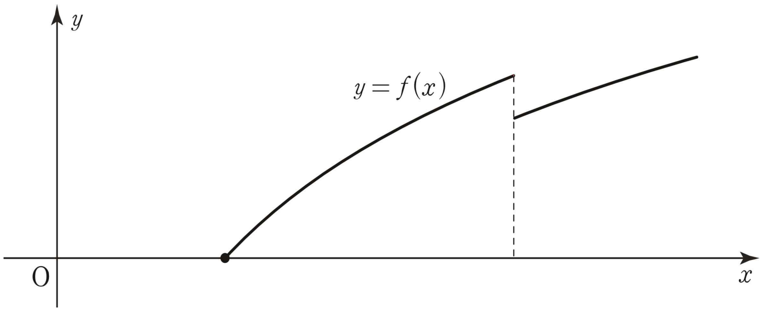
① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$ ④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

1. 문제 읽으면서 **양수 t, 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수** $f(x)$부터 먼저 제대로 표시!!

   문제를 더 읽어 보니 x, t, a가 나오고, $f(x), g(x), h(t)$가 나오니 정신을 차릴 수 없다.
   따라서 **킬러 같은 경우 문제를 한꺼번에 다 읽고 풀려고 하지 말고 한 문장씩 끊어가면서 해줄 수 있는 행동을 취해야 한다.**
   말로 된 조건을 수식으로 표현한다든지, **수식으로 된 조건을 말로 풀어** 생각해본다든지. **그래프 그리기** 등등을 꼭 해줘야 한다.

2. 이에 따라 $f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$ 를 보면 먼저 $f(x)$ 그래프부터 그리자.
   x와 t가 섞여 있다. $f(x)$는 x에 관한 식이기에 여기서 t는 상수 역할이다.

   $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



3. 박스 안 조건까지 읽었다. $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$로 다루는 건 너무 불편하다.
   $\begin{cases} g(x) \le f(x) & (1 \le x < e) \\ g(x) \ge f(x) & (x \ge e) \end{cases}$로 바꾸고 난 후에 문제를 풀어나가자.

   일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$라고 한다. 아하! **$h(t)$에게는 $f(x), g(x)$와는 다르게 t가 상수가 아닌 변수이다.**

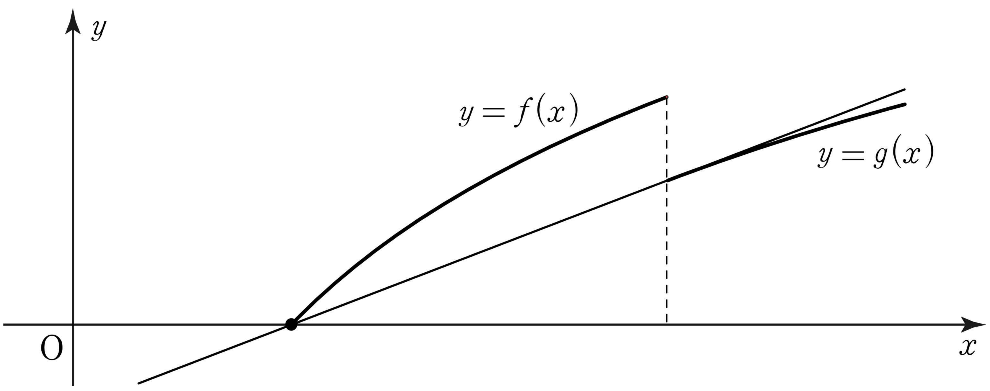
   문제에 대한 감을 더 잡기 위해 t에 구체적인 값을 넣어가며 $f(x)$를 그려보고
   $\begin{cases} g(x) \le f(x) & (1 \le x < e) \\ g(x) \ge f(x) & (x \ge e) \end{cases}$조건과 기울기가 최소가 될 수 있도록 하는 $g(x)$를 그려보자.

   그림을 계속 그려가다 보면 조건들을 만족시키며 **기울기가 최소가 되는 $g(x)$는 t에 관계없이 $(1, 0)$을 지나야 한다**는 사실을 알 수 있다.

4. 이제 $h(t)$에 대해 파악해 보자. 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값이 $h(t)$이다.
이전 기출들을 통해 '$g(x)$와 $f(x)$가 접하면 되겠네!'가 떠올랐을 것이다.
하지만 유의할 점이 있다. t의 값에 따라 접선이 안 그려질 수 있다.

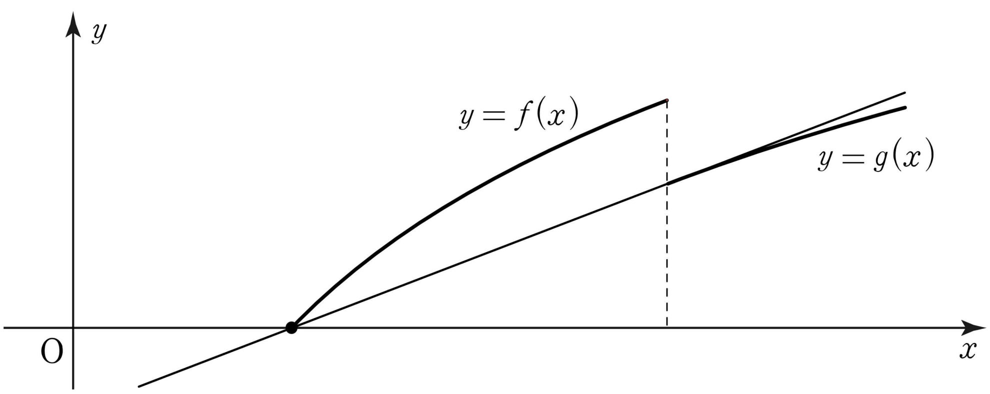
아까 전에 그림을 t를 바꿔가며 여러 번 그래프를 그려보면서 깨달아야 하는 점은 **t가 너무 작으면 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$에 그은 접선이 존재하지 않는다는 점**이다.

접선이 처음 생기는 시점은 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$위의 $(e,\ -t+1)$에서의 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때이다. 이 때 $t=\dfrac{1}{e}$이다.



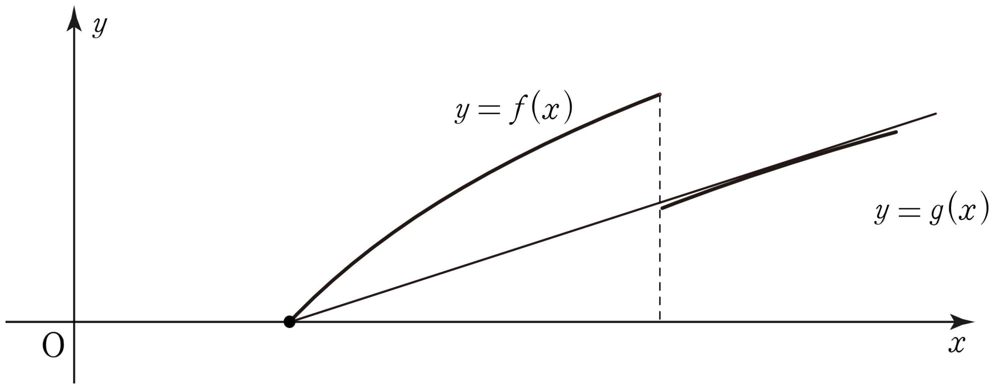
따라서 **$h(t)$는 $t=\dfrac{1}{e}$를 기준으로 정의역을 두 구간으로 나누어 식을 세워야 한다.**

5. $t<\dfrac{1}{e}$일 때, 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값을 갖기 위해서는
$g(x)$가 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$을 지나야 한다.



따라서 $h(t)=\dfrac{-t+\ln e}{e-1}=\dfrac{-t+1}{e-1}\ \left(t<\dfrac{1}{e}\right)$

6. $t \geq \frac{1}{e}$일 때, 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값을 갖기 위해서는 $g(x)$가 점 $(1,0)$에서 $y=-t+\ln x$ $(x \geq e)$에 그은 접선이어야 한다.



$h(t)$에 관한 식을 써야하는데 t로 표현하기 좀 까다롭다.
뭔 걱정인가? 매개변수 잡자. 접점의 x좌표를 k라 하자.

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $(x \neq e)$이므로 $x=k$에서 $f'(k)=\frac{1}{k}$이다.

$h(t)=f'(k)=\frac{1}{k}$ $(t \geq \frac{1}{e})$이다. 매우 간편하지 않은가?

$h(t)$의 식이 t로 나오지 않아 불편한가? 이과라면 그런 생각을 버려라.
대신 t, k의 관계를 나타내는 식을 써줘야 한다.

접점 $(k, \ln k-t)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{k}(x-k)+\ln k-t$이다.

점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $t=\ln k+\frac{1}{k}-1$이다.

결론적으로 $h(t)=\frac{1}{k}$ $(t \geq \frac{1}{e})$, $t=\ln k+\frac{1}{k}-1$ $(t \geq \frac{1}{e})$을 같이 써주면 CLEAR.

7. 이제 드디어 마지막 문장을 읽자!
$h(a)=\frac{1}{e+2}$을 만족하는 상수 a가 있고 $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$을 구하란다.

$h'\left(\frac{1}{2e}\right)$는 일단 쉽다. $\frac{1}{2e}<\frac{1}{e}$이므로 $h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$ $(t<\frac{1}{e}), h'(t)=\frac{-1}{e-1}$ $(t<\frac{1}{e})$.
$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$

$h'(a)$은 구하기 좀 까다롭다. 상수a를 직접 구하기에는 너무 복잡하다.
$h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$ $(t<\frac{1}{e})$는 감소함수이고 $h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}=h\left(\frac{1}{e}\right)$이다.

따라서 $a \geq \frac{1}{e}$이므로 $h(t)=\frac{1}{k}$ $(t \geq \frac{1}{e})$, $t=\ln k+\frac{1}{k}-1$를 이용해야 한다.

$h(t)=\frac{1}{k}\ (t \geq \frac{1}{e})$에 의하면 $t=a$일 때, $k=e+2$이다.

$h'(a)=\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\times\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}$ 를 이용해보자.

$\left.\frac{dh(t)}{dk}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{-1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\frac{-1}{(e+2)^2}$이다.

$\left.\frac{dt}{dk}\right|_{t=a}=\left.\frac{dt}{dk}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{k-1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\frac{e+1}{(e+2)^2}$

$\left.\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}=\frac{1}{\left.\frac{dt}{dk}\right|_{t=a}}=\frac{(e+2)^2}{e+1}$이다.

따라서 $h'(a)=\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\times\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}=\frac{-1}{(e+2)^2}\times\frac{(e+2)^2}{e+1}=\frac{-1}{e+1}$이다.

결론적으로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ 답은 ④!!

문제 Comment

이제 라이프니츠식 미분 표현과 매개변수 미분에 좀 익숙해졌는가? 그래도 쉽지 않다. 아니 어렵다. $h(t)$ 식을 $t=\frac{1}{e}$기준으로 따로 구하는 것도 꽤나 머리를 썼는데 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)$ 마무리 단계도 만만치 않다. **18학년도 평가원 이후로 마무리 단계도 킬러 아이디어가 섞여있다.**

x, t 섞여 있을 때 상수 변수 구별법과 새로운 변수 k를 잡아 매개변수 미분법을 적극적으로 이용하기를 바란다.

하지만 더 말해주고 싶은 점은 절대 이런 킬러부터 풀지 말라는 점이다.
고정 96점이나 100점이 아니라면 비킬러 및 준킬러를 다 풀고 도전해라.

그러면 이런 의문이 들 수 있다.
'아니 나는 킬러 2개 빼고 다 맞춰서 1등급 받을 건데 이런 어려운 문제를 왜 공부하냐?' 내가 2등급 이하 학생들에게 제일 많이 듣는 질문이다.

나의 답변은 이러하다.
대다수가 똑같이 생각하고 있기에 고정 1등급이 안 나오는 것이다.
기출 킬러들을 푸는 이유는 킬러를 꼭 시험장에서 맞추는 게 목적이 아니다.
평가원은 진화하기 때문에 기존 킬러 아이디어가 준킬러 및 비킬러에 쓰인다.
따라서 기출 킬러 학습을 안 하면 진화하는 수능의 속도에 못 따라가게 되고
킬러뿐만 아니라 준킬러 및 비킬러에 털려서 1등급이 나올 수 없다. 명심해라.

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

2020 파급효과 칼럼 모음

왜 라디안을 쓸까? (노베용): https://orbi.kr/00028479675/

삼각함수 값 실수없이 구하기 (노베용): https://orbi.kr/00028924522/

사인법칙, 코사인법칙 활용: https://orbi.kr/00028624520/

기출 파급 미적 chapter 3 그래프 그리기: https://orbi.kr/00028230748/

기출 파급 확통 chapter 5 전체: https://orbi.kr/00028507131/

기출 파급 확통 chapter 2 전체: https://orbi.kr/00028063419/

기출 파급 확통 출고!: https://atom.ac/books/7241

질문은 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서 마음껏 받아줌.

20학년도 수능 30번

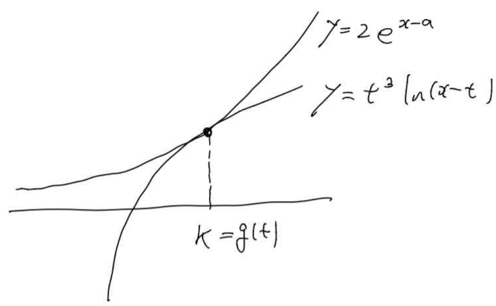
양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

1. 뭐부터 해야 할까? 당연히 $y=t^3\ln(x-t)$, $y=2e^{x-a}$**의 그래프를 그려줘야 한다.**

   $y=t^3\ln(x-t)$**의 그래프를 그릴 때 x가 변수이고 t는 상수이다.** 따라서 $y=t^3\ln(x-t)$ 그래프는 $y=\ln x$의 그래프 개형과 유사한 꼴이다. **로그함수를 보면 밑과 진수 조건을 따져야 한다.** $y=t^3\ln(x-t)$는 $x>t$에서 정의되는 함수이다.

   $y=2e^{x-a}$**의 그래프를 그릴 때 x가 변수이고 a는 상수이다.** 따라서 $y=2e^{x-a}$ 그래프는 $y=2e^x$의 그래프 개형과 유사한 꼴이다.

2. 이를 반영하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 그래프를 그리면 아래와 같다. 두 곡선의 접점의 x좌표를 k라고 두자. 단, $a=f(t)$로 a는 t에 관한 함수임을 알 수 있다. 따라서 **k는 단순히 '숫자'가 아닌 t에 관한 함수이다.**



   곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$이 접하는 형태이고 이를 만족하기 위해서는 모든 양의 실수 t에 대하여 아래의 식들이 성립해야 한다.

   $2e^{k-a}=t^3\ln(k-t)$

   $2e^{k-a}=\dfrac{t^3}{k-t}$

   $k=g(t)>t$

3. 이를 $a=f(t)$, $k=g(t)$를 반영하여 식을 정리하며 아래와 같다.

   $2e^{g(t)-f(t)}=t^3\ln(g(t)-t)$

   $2e^{g(t)-f(t)}=\dfrac{t^3}{g(t)-t}$

   이로써 **모든 양의 실수 t에 대하여 성립하는 t에 대한 항등식 2개**를 보다 직관적으로 확인할 수 있다. 위의 두 식을 정리하여 $t^3\ln(g(t)-t)=\dfrac{t^3}{g(t)-t}$임을 알 수 있다. $t>0$이므로 양변에 t^3을 나눠주면 $\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$을 얻을 수 있다.

4. $\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$의 양변을 t로 미분하면 $\dfrac{g'(t)-1}{g(t)-t}=\dfrac{-g'(t)+1}{\{g(t)-t\}^2}$이다. $g(t)>t$이기에 **모든 양의 실수 t에 대하여 $g'(t)=1$이다.**

$2e^{g(t)-f(t)}=\dfrac{t^3}{g(t)-t}$의 식을 정리하여 $\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2$을 구하기 쉬운 꼴로 바꿔주자.
양변에 $\ln$을 씌워주면 $g(t)-f(t)+\ln 2=3\ln t-\ln(g(t)-t)$이고
이는 곧 $f(t)=g(t)-3\ln t+\ln(g(t)-t)+\ln 2$이다.

양변을 t에 대해 미분하면 $f'(t)=g'(t)-\dfrac{3}{t}+\dfrac{g'(t)-1}{g(t)-t}$이고 $g'(t)=1$을 이용하면 $f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$이다. 따라서 $\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=(-8)^2=64$이고 **답은 64!!**

문제 Comment

상수, 변수를 잘 구분해 주어야 한다. $\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$**가 방정식이 아닌 항등식이기에 양변을 t로 미분할 수 있음을 놓치지 말자.**

$\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$에서 $g(t)-t$를 바로 상수 m으로 두고 푸는 풀이도 많을 것이다. 하지만 이를 보고 '**$g(t)-t$가 왜 꼭 상수 m이어야 하지? $g(t)-t$가 t에 대한 함수이면서 $\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$을 만족할 순 없나?**'라고 생각하는 사람들을 위해 $h(t)=g(t)-t$ 형태로 풀이를 진행했다.

결국 $\ln(g(t)-t)=\dfrac{1}{g(t)-t}$의 양변을 t에 대해 미분하여 $t>0$에서 $g'(t)=1$임이 나오기에 $g(t)-t$가 상수임을 알아차릴 순 있긴 하다. 문제를 **더 엄밀히 풀기 위해서는 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$의 볼록성을 확인**하여 오직 한 점에서 만나기 위해 그래프 개형 형태가 위 풀이처럼 될 수밖에 없음을 보여주면 금상첨화이다.