제 2 교시

2020학년도 3월 전국연합학력평가 대비 러셀모의고사

수학 영역
(나 형)

홀수형

성명		수험 번호					–				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

모래는 바위다 너는 작지 않다 너는 세상이다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

메가스터디교육(주)

제 2 교시

수학 영역(나 형)

홀수형

5지선다형

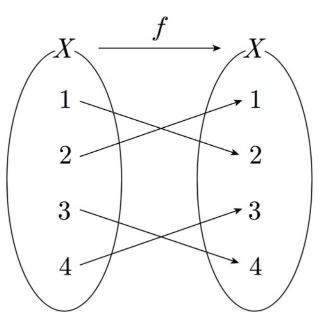
1. 두 집합

$A = \{1,\ 2,\ 4\},\ B = \{1,\ 3,\ 5\}$

에 대하여 $n(A \cup B)$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 그림은 함수 $f: X \to X$ 를 나타낸 것이다.



$(f \circ f)(3)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{3^n - 1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

4. 함수 $y = \dfrac{3x-5}{2x-3}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 양수 a에 대하여 $a^{\frac{3}{2}}=16\sqrt{2}$일 때, a^2의 값은? [3점]

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9}a_k=21,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=19$$

일 때, $\sum_{k=1}^{9}(a_k+b_k)=49$이다. b_{10}의 값은? [3점]

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

7. 좌표평면 위의 두 점 $(\log_2 5,\ \log_3 7)$, $(\log_2 10,\ \log_3 63)$을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

8. 실수 x에 대한 두 조건

$$p : x^2 - a^2 \le 0, \quad q : |x-3| \le 4$$

에 대하여 명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 양수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 7$, $a_{10} - a_8 = -4$일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2n+1}{3n+2}\right) = 2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2 + a_n + 1\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{19}{9}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{23}{9}$ ④ $\frac{25}{9}$ ⑤ 3

11. $\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{40}{21}$ 일 때, n의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3a_{n+1} = na_n$$

일 때, $a_2 = 1$이다. $a_1 + a_4$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

13. 어느 고등학교 3학년 7반 학생 40명을 대상으로 야간자율학습과 방과 후 학교 신청 여부를 조사하였다. 야간자율학습을 하지 않고 방과 후 학교 신청만 한 학생이 18명이고, 둘 다 신청하지 않은 학생이 5명일 때, 야간자율학습을 신청한 학생 수는? [3점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

14. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 4$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n \times a_n)$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{40}{3}$ ⑤ $\frac{50}{3}$

15. 함수 $f(x)=(x-a)^2+a$ 에 대하여 방정식 $f(|x|)=6$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3개일 때, 양수 a 의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 실수 x 에 대한 세 조건

$p : x \geq 5$,
$q : |x-1| \geq 4$,
$r : x^2 - x - a \leq 0$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p \rightarrow q$ 이다.
ㄴ. $a=12$ 이면 $r \rightarrow \sim q$ 이다.
ㄷ. $\sim q \rightarrow r$ 가 참이면 $a \geq 20$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-kx+9=0$의 두 실근이 a_1, a_3이다. $3\sum_{n=1}^{6} a_n = 5\sum_{n=1}^{3} a_{2n}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

18. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$$a^3 = b^4,\ bc^2 = 1$$

가 성립할 때, $|\log_a b| + |\log_b c| + |\log_c a|$ 의 값은? [4점]

① $\frac{47}{12}$　② $\frac{23}{6}$　③ $\frac{15}{4}$　④ $\frac{11}{3}$　⑤ $\frac{43}{12}$

19. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{4}{x}\ (x>0)$ 위의 두 점 A, B와 곡선 밖의 한 점 C$(1,\ -1)$가 다음 조건을 만족시킨다.

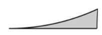
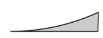
> (가) 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 -1이다.
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 n이다.

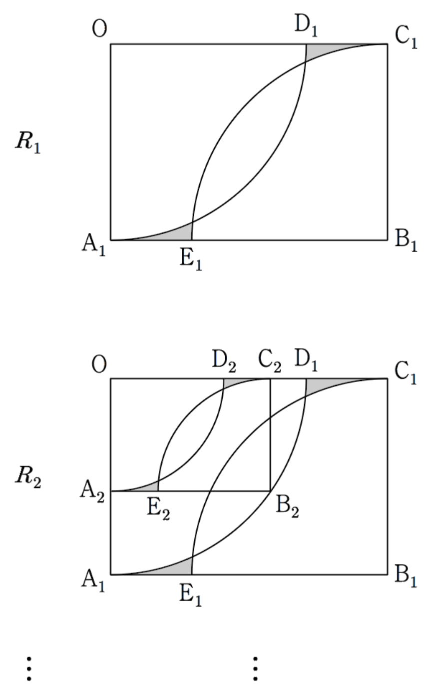
다음은 원점 O에 대하여 선분 OA의 길이를 l_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(l_n)^2}{n}$의 값을 구하는 과정이다. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

> 곡선 $y=\frac{4}{x}\ (x>0)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고,
> 두 점을 지나는 직선의 기울기가 -1이므로
> 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 하면
> 점 B의 좌표는 $(\beta,\ \alpha)$이다.
> 점 C와 두 점 A, B를 지나는 직선 사이의 거리는
> $\frac{|\alpha+\beta|}{\boxed{(가)}}$이므로 삼각형 ABC의 넓이가 n에서
> $\frac{1}{2}\times\frac{|\alpha+\beta|}{\boxed{(가)}}\times\sqrt{2}\,|\beta-\alpha|=n$
> 이다.
> $(l_n)^2=\alpha^2+\beta^2$
> 에서
> $(l_n)^2=\boxed{(나)}$
> 이다. 따라서
> $\lim_{n\to\infty}\frac{(l_n)^2}{n}=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\frac{f(4)}{a\times b}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OC_1과 만나는 점을 D_1, 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 A_1B_1이 만나는 점을 E_1이라 하자. 호 A_1D_1, 호 C_1E_1, 선분 A_1E_1로 둘러싸인  모양의 도형과 호 A_1D_1, 호 C_1E_1, 선분 C_1D_1로 둘러싸인  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 A_1D_1 위의 점 B_2, 선분 OC_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=\sqrt{2}:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에  모양과  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}$
③ $3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}$
⑤ $3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$

21. 세 실수 a, b, c에 대하여 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+3}$ $(c \neq 0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-\dfrac{3}{c}<x_1<2<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(2)|<|f(x_1)|$ 이고, $|f(2)|<|f(x_2)|$ 이다.
>
> (나) $x>0$일 때, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 실근을 $x=1$만 갖는다.

$f(0)$의 값이 짝수일 때, $f(3)$의 최솟값은? [4점]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{5}{2}$

단답형

22. 두 집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

에 대하여 집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 구하시오. [3점]

23. $\log_2 \dfrac{4}{3}+\log_2 12$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$5-\frac{1}{n}<a_n<\frac{5n+4}{n}$$

을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{2x+a}+b$의 그래프와 일치한다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

26. 두 실수 a, b에 대하여

$$2^{a+b}=27,\ 2^{a-2b}=5$$

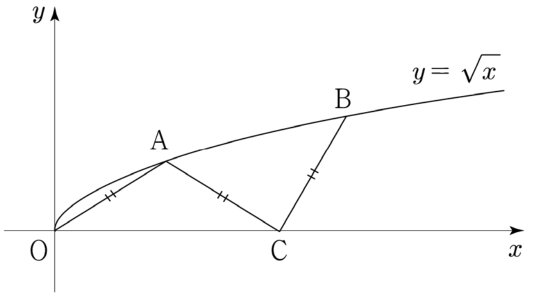
을 만족할 때, $\frac{2^a}{\sqrt[3]{5}}$의 값을 구하시오. [4점]

27. 첫째항이 24인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n\text{의 양의 약수의 개수} & (a_n>3) \\ a_n+1\text{의 양의 약수의 개수} & (a_n \le 3) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 두 점 A, B와 x축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다. 두 삼각형 OAC의 넓이와 OBC의 넓이의 비가 $\sqrt{3}:2\sqrt{2}$일 때, 점 A의 x좌표를 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



29. 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A=\{0,\ 2,\ 3\}$
(나) $n(A\cap B)=2$

집합 C가

$$C=\{x^2+kx\,|\,x\in A\cup B\}$$

이다. $n(C)=2$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6\}$와 함수 $f:X\rightarrow X$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=f(x)\{f(x)-1\}$ 이다.
(나) 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 모든 실근의 개수는 2이다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2020학년도 3월 전국연합학력평가 대비 러셀모의고사

정답 및 해설

• 수학 영역 •

(나)형 정답

1	①	**2**	③	**3**	②	**4**	③	**5**	⑤
6	⑤	**7**	④	**8**	①	**9**	④	**10**	①
11	⑤	**12**	⑤	**13**	③	**14**	④	**15**	②
16	③	**17**	②	**18**	①	**19**	④	**20**	②
21	②	**22**	18	**23**	4	**24**	5	**25**	17
26	9	**27**	87	**28**	3	**29**	10	**30**	13

해설

1. [정답] ①
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로
$n(A\cup B)=5$ 이다.

2. [정답] ③
$f(3)=4\ \ f(4)=3$ 이므로
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=3$ 이다.

3. [정답] ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-2^n}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

4. [정답] ③

$$y=\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{\frac{3}{2}(2x-3)-\frac{1}{2}}{2x-3}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$ 이고

점근선은 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ 이므로 두 점근선의

교점은 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ 이다.

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

5. [정답] ⑤
$a^{\frac{3}{2}}=16\sqrt{2}=2^4\times2^{\frac{1}{2}}=2^{4+\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}}$ 이므로

$a=\left(2^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=2^3=8$ 이다. 따라서 $a^2=8^2=64$ 이다.

6. [정답] ⑤
$\sum_{k=1}^{9}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{9}b_k=21+\sum_{k=1}^{9}b_k=49$ 이므로

$\sum_{k=1}^{9}b_k=49-21=28$ 이다.

이때, $\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{9}b_k+b_{10}=19$ 이므로

$b_{10}=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{9}b_k=19-28=-9$ 이다.

7. [정답] ④
두 점 $(\log_2 5, \log_3 7)$, $(\log_2 10, \log_3 63)$ 을 지나는
직선의 기울기는

$$\frac{\log_3 63-\log_3 7}{\log_2 10-\log_2 5}=\frac{\log_3\frac{63}{7}}{\log_2\frac{10}{5}}=\frac{\log_3 9}{\log_2 2}=2$$ 이다.

8. [정답] ①
두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$P=\{x\,|-a\le x\le a\}$, $Q=\{x\,|-1\le x\le 7\}$ 이다.
명제 $p\to q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이므로
$-a\ge-1,\ a\le7$ 이다.
따라서 $a\le1$ 이므로 양수 a 의 최댓값은 1 이다.

9. [정답] ④
등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1, 공차를 d 라 하면
$a_{10}-a_8=-4$ 에서 $2d=-4$ 이므로 $d=-2$ 이다.
$a_3=7$ 에서 $a_1+2d=7$ 이므로 $a_1=11$ 이다.
즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=-2n+13$ 이므로
$a_k=-2k+13<0$ 에서 $k>\frac{13}{2}$ 이다.
따라서 자연수 k 의 최솟값은 7 이다.

10. [정답] ①
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{3n+2}\right)=2$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{3n+2}\right)=0$ 이다.

$a_n-\frac{2n+1}{3n+2}=b_n$ 이라 하면 $\lim_{n\to INF}b_n=0$이다.

$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^2+a_n+1\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(b_n+\frac{2n+1}{3n+2}\right)^2+\left(b_n+\frac{2n+1}{3n+2}\right)+1\right\}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+1=\frac{19}{9}$

11. [정답] ⑤

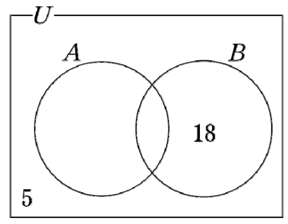
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(2k-1)(2k+1)}&=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{4n}{2n+1}=\frac{41}{20}\end{aligned}$$

이므로 $2-\frac{2}{2n+1}=\frac{40}{21}$ 에서

$\frac{2}{2n+1}=\frac{2}{21}$, $n=10$ 이다.

12. [정답] ⑤
$3a_{n+1}=na_n$ 에서 $a_2=1$ 이므로
$n=1$을 대입하면 $3a_2=a_1=3$ 에서 $a_1=3$,
$n=2$를 대입하면 $3a_3=2a_2=2$ 에서 $a_3=\frac{2}{3}$,
$n=3$을 대입하면 $3a_4=3a_3=2$ 에서 $a_4=\frac{2}{3}$ 이다.
$\therefore a_1+a_4=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

13. [정답] ③



3학년 7반 학생들의 집합을 U,
야간자율학습을 신청한 학생들의 집합을 A,
방과 후 학교를 신청한 학생들의 집합을 B 라 하자.
야간자율학습을 신청하지 않고 방과 후 학교만 신청한
학생은 18 명이므로 $n(A^C\cap B)=18$ 이다.
또한, 둘 다 신청하지 않은 학생은 5 명이므로
$n(A^C\cap B^C)=5$이다.
$40=n(A\cup B)+n(A^C\cap B^C)$
$\quad=n(A)+n(A^C\cap B)+n(A^C\cap B^C)$
이므로 $40=n(A)+18+5$, $n(A)=17$ 이다.

14. [정답] ④
$a_1=4$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$ 이므로 $\frac{4}{1-r}=5$, $r=\frac{1}{5}$ 이다.

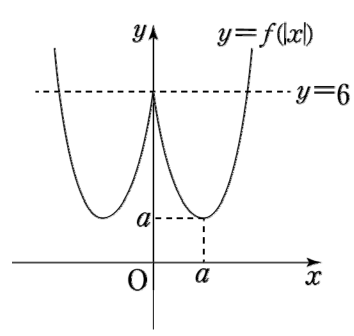
즉, $a_n=4\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ 이다.

따라서 수열 $\{2^n\times a_n\}$은 첫째항이 $2\times a_1=8$,

공비가 $\frac{2}{5}$ 인 등비수열이다.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n\times a_n\right)=8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{8}{1-\frac{2}{5}}=\frac{40}{3}$

15. [정답] ②
방정식 $f(|x|)=6$ 의 실근의 개수가 3 이 되려면
함수 $y=f(|x|)$ 의 그래프와 직선 $y=6$ 의 교점의
개수가 3 이어야 한다.
$a>0$ 이므로 함수 $y=f(|x|)$ 의 그래프 개형은
다음과 같다.



그림과 같이 함수 $y=f(|x|)$ 가

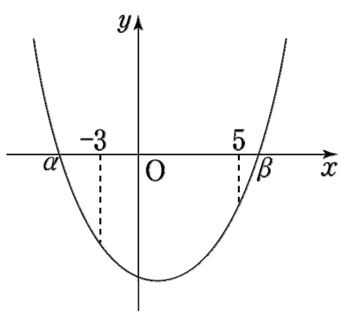
점 $(0,\ 6)$ 을 지나야 하므로 $f(0)=6$ 이다.
따라서 $a^2+a=6$, $(a-2)(a+3)=0$ 에서
$a>0$ 이므로 $a=2$ 이다.

16. [정답] ③

ㄱ. $p : x \geq 5$ 이고 $q : |x-1| \geq 4$ 에서
$x \leq -3$ 또는 $x \geq 5$ 이므로 $p \rightarrow q$ 이다. $\therefore$ (참)

ㄴ. $a=12$ 이면 $r : x^2-x-12 \leq 0$ 에서
$-3 \leq x \leq 4$ 이다.
$\sim q : |x-1|<4$ 에서 $-3<x<5$ 이므로
$r \rightarrow \sim q$ 는 $x=-3$ 에서 성립하지 않는다.
$\therefore$ (거짓)

ㄷ. $\sim q : -3<x<5$ 이고, 이차방정식
$x^2-x-a=0$ 의 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면
$r : x^2-x-a \leq 0$ 에서 $\alpha \leq x \leq \beta$ 이다.



그림과 같이 함수 $f(x)=x^2-x-a$ 에서
대칭축은 $x=\frac{1}{2}$ 이므로 $f(3)<f(5)$ 이다.
즉, $f(5) \leq 0$ 이면 $\sim q \rightarrow r$ 이 참이다.
따라서 $20-a \leq 0$, $a \geq 20$ 이다. $\therefore$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

17. [정답] ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하자.
이차방정식 $x^2-kx+9=0$ 의 두 근이 a_1, a_3 이므로
$a_1+a_3=a(1+r^2)=k$, $a_1a_3=(ar)^2=9$ 에서
수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $ar=3$ 이다.
$3\sum_{n=1}^{6}a_n=5\sum_{n=1}^{3}a_{2n}$ 에서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은
첫째항이 $a_2=ar$, 공비가 r^2 인 등비수열이므로
$3a\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right)=5ar\left(\frac{r^6-1}{r^2-1}\right)$, $3+3r=5r$ 에서
$r=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 $a=3\times\frac{2}{3}=2$ 이므로
$k=a(1+r^2)=2\left(1+\frac{9}{4}\right)=\frac{13}{2}$ 이다.

18. [정답] ①

$a^3=b^4$ 에서 $a=b^{\frac{4}{3}}$, $bc^2=1$ 에서 $b=c^{-2}$ 이므로
두 식을 연립하면 $a=c^{-\frac{8}{3}}$ 이다.
따라서 $\log_a b=\log_{b^{\frac{4}{3}}}b=\frac{3}{4}$, $\log_b c=\log_{c^{-2}}c=-\frac{1}{2}$,
$\log_c a=\log_c c^{-\frac{8}{3}}=-\frac{8}{3}$ 이므로
$|\log_a b|+|\log_b c|+|\log_c a|$
$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}=\frac{9+6+32}{12}=\frac{47}{12}$ 이다.

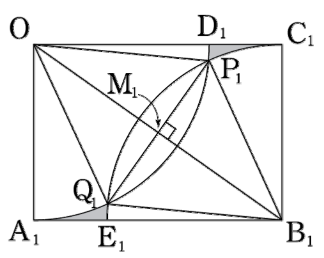
19. [정답] ④

곡선 $y=\frac{4}{x}\ (x>0)$ 는 $y=x$ 에 대하여 대칭이고
두 점을 지나는 직선의 기울기가 -1 이므로
점 A 의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ 라 하면
점 B 의 좌표는 $(\beta,\ \alpha)$ 이다.
즉, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은
$y=-(x-\alpha)+\beta=-x+\alpha+\beta$
이고, 점 C 와 두 점 A, B 를 지나는 직선
사이의 거리는 $\frac{|\alpha+\beta|}{\boxed{(가)=\sqrt{2}}}$ 이므로
삼각형 ABC 의 넓이가 n 에서
$\frac{1}{2}\times\frac{|\alpha+\beta|}{\boxed{\sqrt{2}}}\times\sqrt{2}\,|\beta-\alpha|=n$ 이다.
$(l_n)^2=\alpha^2+\beta^2$ 에서
$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=4n^2+64$
이므로
$(l_n)^2=\boxed{(나)=2\sqrt{n^2+16}}$
이다. 따라서
$\lim_{n\rightarrow INF}\frac{(l_n)^2}{n}=\lim_{n\rightarrow INF}\frac{2\sqrt{n^2+16}}{n}=\boxed{(다)=2}$이다.

즉, $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $f(4)=2\sqrt{4^2+16}=8\sqrt{2}$ 이므로
$\frac{f(4)}{a\times b}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times 2}=4$ 이다.

20. [정답] ②

사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$의 넓이는 $\sqrt{2}$, 두 부채꼴 $\mathrm{OA_1D_1}$,
$\mathrm{B_1C_1E_1}$의 넓이는 각각 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 호 $\mathrm{A_1D_1}$ 과
호 $\mathrm{C_1E_1}$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 k_1 이라 하면
그림 R_1 에 색칠되어있는 부분의 넓이는
$S_1=\sqrt{2}-2\times\frac{\pi}{4}+k_1$ 이다.

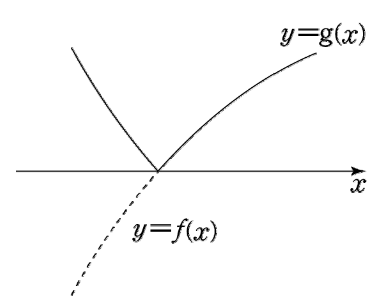


호 $\mathrm{A_1D_1}$ 과 호 $\mathrm{C_1E_1}$ 이 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P_1}$,
$\mathrm{Q_1}$ 이라 하자. $\overline{\mathrm{OP_1}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}=\overline{\mathrm{B_1P_1}}=\overline{\mathrm{B_1Q_1}}=1$이므로
사각형 $\mathrm{OP_1B_1Q_1}$은 마름모이고, 마름모 $\mathrm{OP_1B_1Q_1}$의
두 대각선인 선분 $\mathrm{OB_1}$과 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$은 서로 수직이다.
선분 $\mathrm{OB_1}$과 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$ 의 교점을 $\mathrm{M_1}$이라 하면
$\overline{\mathrm{OM_1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 직각삼각형 $\mathrm{OP_1M_1}$ 에서
$\overline{\mathrm{P_1M_1}}=\frac{1}{2}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=1$ 이므로 삼각형 $\mathrm{OP_1Q_1}$ 과 삼각형
$\mathrm{B_1P_1Q_1}$은 모두 한 변의 길이가 1 인 정삼각형이다.
즉, $k_1=2\times\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,
$S_1=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ 이다.
$\overline{\mathrm{OB_1}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OB_2}}=1$ 이므로 사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$과
$\mathrm{OA_2B_2C_2}$의 닮음비는 $\sqrt{3}:1$ 이고,
넓이비는 $3:1$이다.
$\therefore \lim_{n\rightarrow\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$
$=\left(\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{3}}\right)$
$=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}$

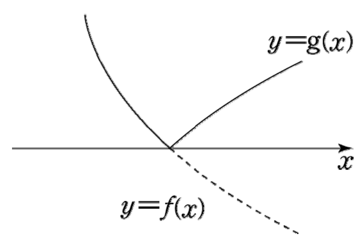
21. [정답] ②

조건 (가)에서 $g(x)=|f(x)|$ 라 하면
$g(2)<g(x_1)$, $g(2)<g(x_2)$ 이므로
그림과 같이 두 가지 그래프가 가능하다.

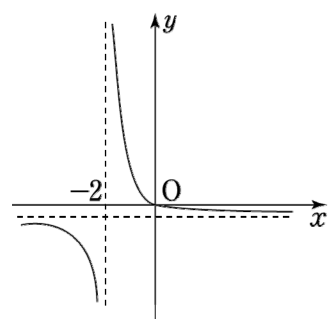
i)



ii)



따라서 $g(2)=|f(2)|=0$ 이므로
$|f(2)|=\left|\frac{2a+b}{2c+3}\right|=0$ 에서 $b=-2a$ 이다.
조건 (나)에서 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 실근은
$f(x)=x$ 의 실근과 같고, 만족하는 실근은
$x=1$ 뿐이므로 함수 $f(x)$ 는 점 $(1,\ 1)$ 을 지난다.
즉, $f(1)=1$ 이므로 $-a=c+3$ 이다.
이때, i)의 그래프에서 $0<f(0)<1$ 이므로
$f(0)$ 이 짝수인 조건에 모순이다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 ii)의 그래프이고, $f(0)>0$ 이다.
즉, $f(0)=\frac{b}{3}=-\frac{2a}{3}>0$ 에서 $a<0$ 이고
$-\frac{2a}{3}$ 의 값은 짝수이므로 가능한 a 의 값은
$a=-3,\ -6,\ \cdots$ 이다.
$f(3)=\frac{a}{-3a-6}$ 의 최솟값을 구하기 위하여
함수 $h(x)=\frac{x}{-3x-6}$ 의 그래프 개형을 그리면
다음과 같다.



그림과 같이 $x=a=-3$ 이면 $c=0$ 이므로

조건 (가)에 모순이다.

즉, $h(a)=\dfrac{a}{-3a-6}$ 은 $a=-6$ 일 때 최솟값을 가진다.

따라서 $f(3)$ 의 최솟값은 $\dfrac{-6}{18-6}=-\dfrac{1}{2}$ 이다.

22. [정답] 18

$B-A=\{5,\ 6,\ 7\}$ 이므로

모든 원소의 합은 $5+6+7=18$ 이다.

23. [정답] 4

$\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2 12=\log_2\left(\dfrac{4}{3}\times 12\right)=\log_2 16=4$

24. [정답] 5

부등식 $5-\dfrac{1}{n}<a_n<\dfrac{5n+4}{n}$ 에서

$n\to\infty$ 의 극한값은

$\lim\limits_{n\to INF}\left(5-\dfrac{1}{n}\right)\le\lim\limits_{n\to INF}a_n\le\lim\limits_{n\to INF}\dfrac{5n+4}{n}$이다.

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{n}\right)=5$, $\lim\limits_{n\to INF}\dfrac{5n+4}{n}=5$이므로

수열의 극한의 성질에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$ 이다.

25. [정답] 17

곡선 $y=\sqrt{2x}$ 를 x축의 방향으로 2,

y축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y=\sqrt{2(x-2)}+1=\sqrt{2x-4}+1$ 이다.

따라서 $a=-4,\ b=1$ 이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+1^2=17$ 이다.

26. [정답] 9

$2^{a+b}=27,\ 2^{a-2b}=5$ 에서

$\left(2^{a+b}\right)^2=2^{2a+2b}=27^2$ 이므로

$2^{2a+2b}\times 2^{a-2b}=2^{(2a+2b)+(a-2b)}=2^{3a}=27^2\times 5$,

$2^a=\sqrt[3]{27^2\times 5}=9\sqrt[3]{5}$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{2^a}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{9\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=9$

27. [정답] 87

$a_1=24$ 이고 $24=2^3\times 3$ 이다.

$a_1>3$ 이므로 $a_2=(3+1)\times(1+1)=8$ 이다.

$a_2>3$ 이고, 8 의 약수의 개수는 4 이므로 $a_3=4$,

$a_3>3$ 이고, 4 의 약수의 개수는 3 이므로 $a_4=3$ 이다.

이때, $a_4\le 3$ 이므로 a_5 는 $a_4+1=4$ 의

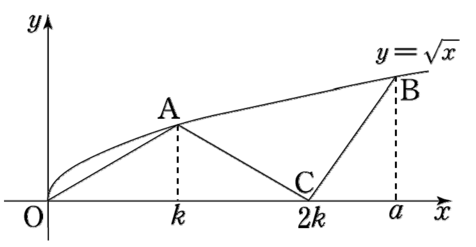
약수의 개수인 3 이다.

즉, $n\ge 4$일 때, $a_n=3$이므로

$a_n=\begin{cases}24\ (n=1)\\ 8\ \ (n=2)\\ 4\ \ (n=3)\\ 3\ \ (n\ge 4)\end{cases}$ 이다.

$\therefore\ \sum\limits_{k=1}^{20}a_n=24+8+4+3\times 17=87$

28. [정답] 3



점 A 의 x 좌표를 k 라 하면 $\mathrm{A}(k,\ \sqrt{k})$ 이고,

점 C의 x 좌표는 $2k$ 이므로 $\mathrm{C}(2k,\ 0)$이다.

점 B의 x 좌표를 a 라 하면 $\mathrm{B}(a,\ \sqrt{a})$이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\sqrt{k^2+k}=\sqrt{(a-2k)^2+a}$ 이다.

즉, $(k-a)(3k-a-1)=0$ 이고

$k\ne a$ 이므로 $a=3k-1$ 이다.

한편, 두 삼각형 OAC 와 OBC 는 넓이비가

$\sqrt{3}:2\sqrt{2}$ 이고, 밑변의 길이가 같으므로

두 삼각형의 높이비는 넓이비와 같다.

따라서 삼각형 OAC의 높이가 $\sqrt{k}$,

삼각형 OBC 의 높이가 $\sqrt{a}=\sqrt{3k-1}$ 이므로

$\sqrt{k}:\sqrt{3k-1}=\sqrt{3}:2\sqrt{2}$ 에서

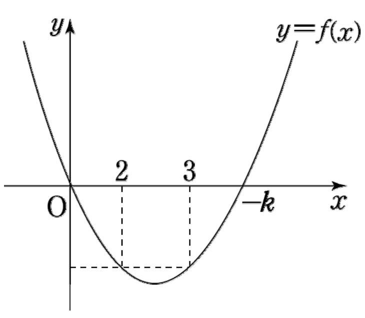
$9k-3=8k$, $k=3$ 이다.

29. [정답] 10

집합 $C=\{x^2+kx\,|\,x\in A\cup B\}$ 의 원소는

정의역이 $A\cup B$인 함수 $f(x)=x^2+kx$ 의

치역과 같다.



그림과 같이 함수 $f(x)$ 는

$f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-k)$ 를 치역으로 갖는다.

이때, $f(0)=f(-k)=0$ 이고 $n(C)=2$ 이므로

$f(2)=f(3)$ 이다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2}$ 이므로

$\dfrac{0-k}{2}=\dfrac{5}{2}$ 에서 $k=-5$이다.

따라서 $A\cup B=\{0,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 이므로

집합 B 의 원소의 합의 최댓값은 $2+3+5=10$ 이다.

30. [정답] 13

함수 $(f\circ f)(x)$ 의 공역은 X 이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $(f\circ f)(x)$ 의 값은

다음과 같다.

i) $(f\circ f)(x)=0$

방정식 $f(x)\{f(x)-1\}=0$ 에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$ 이다.

ii) $(f\circ f)(x)=1$

방정식 $f(x)\{f(x)-1\}=1$ 에서 $f(x)$ 의 값이

정수가 될 수 없으므로 $(f\circ f)(x)\ne 1$ 이다.

iii) $(f\circ f)(x)=2$

방정식 $f(x)\{f(x)-1\}=2$ 에서 $f(x)=2$ 이다.

iv) $(f\circ f)(x)=3$

방정식 $f(x)\{f(x)-1\}=3$ 에서 $f(x)$ 의 값이

정수가 될 수 없으므로 $(f\circ f)(x)\ne 3$ 이다.

v) $(f\circ f)(x)=6$

방정식 $f(x)\{f(x)-1\}=6$ 에서 $f(x)=3$ 이다.

이때, X 의 어떤 원소 x 에 대하여 $f(x)=6$ 이면

$(f\circ f)(x)=30$ 인데, 함수 f 의 공역은 X 이므로

$f(x)\ne 6$ 이고, $(f\circ f)(x)\ne 6$ 이다.

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=x$ 의

서로 다른 모든 실근의 개수가 2 이므로

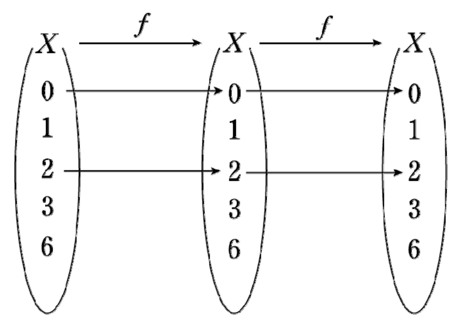
i), iii)에서 $f(0)=0$, $f(2)=2$ 이다.

집합 X 의 어떤 원소 x 에 대하여 $f(x)=3$ 이면

$(f\circ f)(x)=6$ 이고, 이는 $(f\circ f)(x)\ne 6$ 에 모순이므로

$f(x)=3$ 을 만족시키는 x 는 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)\ne 3$ 이다.



즉, 방정식 $f(x)=x$ 의 모든 근이

$x=0$, $x=2$ 이므로 $f(1)\ne 1$ 이다.

$f(1)=0$ 일 때, $f(3)$ 과 $f(6)$ 은 모두 0, 1, 2 중

하나의 값을 가질 수 있으므로 이를 만족시키는

함수 f 의 개수는 $3\times 3=9$ 이다.

$f(1)=2$ 일 때, $f(x)=1$ 을 만족시키는 X 의 원소

x 가 존재하면 $(f\circ f)(x)=f(x)\{f(x)-1\}$ 에서

좌변은 2, 우변은 0 이 되어 모순이므로 $f(x)=1$ 을

만족시키는 X 의 원소 x 는 존재하지 않는다.

따라서 $f(3)$ 과 $f(6)$ 은 모두 0, 2 중 하나의 값을

가질 수 있으므로 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$2\times 2=4$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 함수 f 의 개수는

$9+4=13$ 이다.