제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설 : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{\ln(1+2x)}=\frac{1}{2}$

2. 두 벡터 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-3,c)$가 서로 수직일 때, $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설 :
$\vec{a}+\vec{b}=(-2,c+2)$이므로, $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 c이다.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 수직이므로, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2c-3=0$이다.
그러므로 $c=\frac{3}{2}$이다.

3. $\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설 : $\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A^C\cup B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

해설 :
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=1-\mathrm{P}\left(\left(A\cap B^C\right)^C\right)=1-\mathrm{P}(A^C\cup B)=\frac{3}{5}$이고
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10}$이므로,
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$이다.

5. $(x+a)^8$의 전개식에서 x^3의 계수가 x^5의 계수의 4배일 때, 자연수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :
x^3의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_3 a^5$이고 x^5의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_5 a^3$이다.
${}_8\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_5$이므로 ${}_8\mathrm{C}_3 a^5 = 4 \times {}_8\mathrm{C}_5 a^3$는 $a^2=4$이고 $a=2$이다.
($\because$ a는 자연수이다.)

6. 구 $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+a=0$이 평면 $x+2y+2z=1$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설 :
$x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+a=0$는
$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14-a$이므로
점 $(2,1,3)$을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{14-a}$인 구이다.
이 구가 평면 $x+2y+2z=1$에 접하므로,
$\dfrac{|2+2+6-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3=\sqrt{14-a}$이다. 그러므로 $a=5$이다.

7. 함수 $f(x)=2^{-x+a}+b$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 점 $(2,1)$에서 만난다. $f(-1)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설 :
함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 점 $(2,1)$에서 만나므로
$f(2)=1$이고 $g(2)=1$이다.
$f(2)=2^{-2+a}+b=\frac{1}{4}\times 2^a+b=1$이고,
$g(2)=1$은 $f(1)=2$이므로 $f(1)=2^{-1+a}+b=\frac{1}{2}\times 2^a+b=2$이다.
두 식을 연립하면 $a=2$이고, $b=0$이다.
그러므로 $f(x)=2^{-x+2}$이고, $f(-1)=8$이다.

★ 감소함수는 역함수와 $y=x$ 위가 아닌 점에서 만날 수 있다.

8. 어느 방송국에서 진행하고 있는 프로그램의 녹화 시간은 평균이 5, 표준편차가 3인 정규분포를 따른다고 한다. 이 방송국에서 진행하고 있는 프로그램들 중에서 9개를 임의추출하여 구한 녹화 시간에 대한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(3 \le \overline{X} \le 6)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8185 ② 0.8351 ③ 0.9104 ④ 0.9544 ⑤ 0.9710

해설 :
이 방송국에서 진행하는 프로그램 중 9개를 임의추출한 표본의 표본평균은 $\mathrm{N}\left(5,\ \dfrac{3^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(5,\ 1)$을 따른다.
그러므로 $\mathrm{P}(3 \le \overline{X} \le 6) = \mathrm{P}(-2 \le Z \le 1) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$

9. $0 \le x \le 2\pi$에서 두 곡선 $y = 2|\cos x|$, $y = \dfrac{4-2\cos x}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3}\pi - 2 + \sqrt{3}\right)$ ② $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3}\pi - 3 + \sqrt{3}\right)$
③ $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{3}\pi - 3 + \sqrt{3}\right)$ ④ $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{3}\pi - 3 + \sqrt{3}\right)$
⑤ $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{2}{3}\pi - 3 + \sqrt{3}\right)$

해설 :
$0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$에서 방정식 $2|\cos x| = 2\cos x = \dfrac{4-2\cos x}{3}$의 실근은 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$이고,
$\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3\pi}{2}$에서 방정식 $2|\cos x| = -2\cos x = \dfrac{4-2\cos x}{3}$의 실근은 $x = \pi$이다. 두 곡선 $y = 2|\cos x|$, $y = \dfrac{4-2\cos x}{3}$은 직선 $x = \pi$에 대하여 대칭인 함수이고 $x = \pi$에서 접하므로, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \left| 2|\cos x| - \frac{4-2\cos x}{3} \right| dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \left\{ \frac{4-2\cos x}{3} - 2|\cos x| \right\} dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left\{ \frac{4-2\cos x}{3} - 2|\cos x| \right\} dx$$

$$= 2 \times \left\{ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4-2\cos x}{3} - 2\cos x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{4-2\cos x}{3} + 2\cos x \right) dx \right\}$$

$$= 2 \times \left(\left[\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}\sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}\pi - 3 + \sqrt{3} \right)$$

10. 곡선 $xe^{x+y} + y^2 = 2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, ab의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설 :
곡선식 $xe^{x+y} + y^2 = 2$의 양변을 미분하면
$e^{x+y} + xe^{x+y} + xe^{x+y}\dfrac{dy}{dx} + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$이므로
식을 정리하면, $\{xe^{x+y} + 2y\}\dfrac{dy}{dx} = -(x+1)e^{x+y}$이다.
그러므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(x+1)e^{x+y}}{xe^{x+y} + 2y}$이고, 점 $(1,\ -1)$에서의 미분계수는 2이다.
따라서 곡선 $xe^{x+y} + y^2 = 2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은 $y = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$이다.
$a = 2$이고 $b = -3$이므로, ab의 값은 -6이다.

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. $t \ge 0$인 실수 t에 대하여 $x=0$에서 $x=t$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이가 $f(t)-e^{-t}$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2+1}{4e}$ ② $\frac{e^2+1}{2e}$ ③ $\frac{e^2-1}{2e}$ ④ $\frac{e^2-1}{4e}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{8e}$

해설 :

0보다 큰 실수 t에 대하여 $x=0$에서 $x=t$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이므로

$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = f(t)-e^{-t}$이다. … ㉠

양변을 t에 대하여 미분하면,

$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}=f'(t)+e^{-t}$이고 양변의 식을 정리하면,

$f'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$를 얻는다.

이 식을 t에 대하여 적분하면, $f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}+C$ (단, C는 상수)

이고 식 ㉠에서 $t=0$일 때, $f(0)=1$이므로 $C=0$이다.

그러므로 $f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이고, $f(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}=\frac{e^2+1}{2e}$이다.

12. 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|f(x)|\,dx$$

라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n}$의 값은? [3점]

① π ② 2π ③ 4π ④ 8π ⑤ 16π

해설 :

$a_{2n}=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}|f(x)|\,dx$

$=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}|x\sin x|\,dx$

$=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}(-x\sin x)\,dx=-\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}x\sin x\,dx$

$=-\left\{[-x\cos x]_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}-\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}-\cos x\,dx\right\}$

$=-\left\{-2n\pi-(2n-1)\pi+[\sin x]_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\right\}$

$=4n\pi-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi n-1}{n}=4\pi$

13. 좌표공간에 점 $A(0, 3\sqrt{3}, 3)$과 정사면체 OABC가 있다. 점 B는 z축 위에 있고 점 C의 x좌표는 양수이다. 삼각형 ABC를 포함하는 평면은 점 $(a, 0, 0)$을 지날 때, a의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ 6 ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

해설 :

$\overline{OB}=\overline{OA}=6$이므로, 점 B의 좌표는 $(0, 0, 6)$이다.

점 C는 점 A와 z좌표가 같으므로 점 C의 좌표를 $(m, n, 3)$이라 하자.

$\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$이므로, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{18}{6\times\sqrt{m^2+n^2+9}}$ 이다. 식을 정리하면, $m^2+n^2=27$이다. … ㉠

마찬가지로 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$이므로,

$\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}n+9}{6\times\sqrt{m^{2+}n^2+9}}$ 이고 $\sqrt{3}n+3=\sqrt{m^2+n^2+9}$ 이다. … ㉡

식 ㉠을 식 ㉡에 대입하면, $\sqrt{3}n+3=6$이므로 $n=\sqrt{3}$이다. … ㉢

식 ㉢을 식 ㉠에 대입하면, $m=2\sqrt{6}$이다. ($\because m$은 양수)

따라서 점 C의 좌표는 $(2\sqrt{6}, \sqrt{3}, 3)$이다.

정사면체 OABC에서 삼각형 ABC를 포함하는 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$와 평행하므로 상수 k에 대하여 $k(2\sqrt{6}, 4\sqrt{3}, 12)$ 이다.

이 평면은 법선벡터가 $k(2\sqrt{6}, 4\sqrt{3}, 12)$이고, 점 B를 지나므로 평면의 방정식은 $2\sqrt{6}kx+4\sqrt{3}ky+12k(z-6)=0$이다.

이 평면이 점 $(a, 0, 0)$을 지나므로 $2\sqrt{6}ka-72k=0$이고, $a=6\sqrt{6}$이다.

14. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x+8}$일 때, 부등식

$$(x-k)\{f(x)-m(x-k)\}\le 0$$

이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 m의 최솟값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설 :

문제에서 주어진 부등식을 풀면

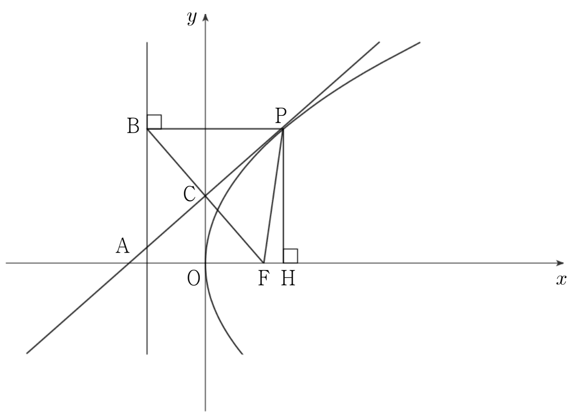
$x<k$일 때, $f(x)\ge m(x-k)$이고

$x\ge k$일 때, $f(x)<m(x-k)$이다.

주어진 부등식이 성립하기 위해서는 직선 $y=m(x-k)$가 함수 $f(x)$와 x축과의 교점이면서 함수 $f(x)$의 변곡점인 점 $(2, 0)$을 지나야 하고, 직선의 기울기 m은 $m\ge f'(2)$이어야 한다.

따라서 실수 m의 최솟값은 $f'(2)=\frac{1}{2}$이다,

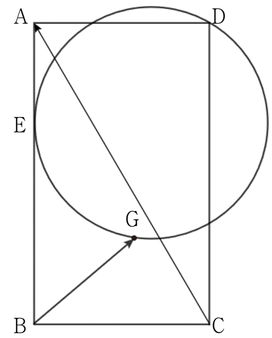
15. 그림과 같이 좌표평면에 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 PAH의 넓이는 $16\sqrt{3}$이다. 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 점 B, 직선 FB가 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 PCF의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{9}{4}\pi$ ② $\frac{25}{4}\pi$ ③ $\frac{49}{4}\pi$ ④ $\frac{81}{4}\pi$ ⑤ $\frac{121}{4}\pi$

해설 :
점 P를 $(a, 2\sqrt{3a})$라 할 때, 점 A는 $(-a, 0)$이고 점 H는 $(a, 0)$이므로 삼각형 PAH의 넓이는 $2a\sqrt{3a}$은 $16\sqrt{3}$이다.
따라서 양수 a는 4이다.
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\overline{FH}=\overline{AQ}$이므로 $\overline{FA}=\overline{AH}=\overline{PB}=\overline{PF}$이다. 그러므로 사각형 AFPB는 마름모이고 점 C는 선분 PA와 선분 BF의 중점이다.
점 P의 x좌표는 4이고, 점 A의 x좌표는 -4이므로 점 C의 x좌표가 0이므로 y축 위에 있고, 마름모의 대각선은 서로 수직이므로 삼각형 PCF는 점 C에서 직각인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 PCF의 외접원의 지름은 선분 PF의 길이와 같다.
$\overline{PF}=7$이므로 삼각형 PCF의 외접원의 넓이는 $\frac{49}{4}\pi$이다.

16. 그림과 같이 $\overline{AB}=3\sqrt{3}$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 E라 할 때, 점 E에서 선분 AB에 접하고 점 D를 지나는 원 위의 점 G와 선분 EF가 이 원의 지름이 되는 점 F에 대하여 $\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BF}$인 1이 아닌 실수 k가 존재한다. $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CA}$의 값은? [4점]

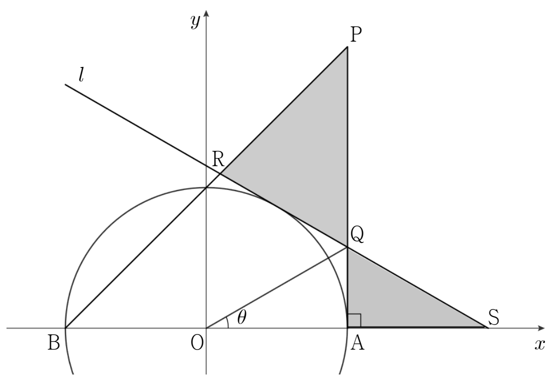


① $\frac{15}{7}$ ② $\frac{18}{7}$ ③ 3 ④ $\frac{24}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

해설 :
원의 중심을 O, 점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 점 H라 하고, 원의 반지름을 r이라 하자.
$\overline{OH}=\sqrt{3}$, $\overline{OD}=r$, $\overline{HD}=3-r$이고 삼각형 OHD는 점 H에서 수직이므로 피타고라스 정리에 의하여 $r=2$이다.
$\overline{EB}=2\sqrt{3}$, $\overline{EF}=4$이므로 $\overline{BF}=2\sqrt{7}$이고 $\overline{EB}:\overline{BG}=\overline{FB}:\overline{BE}$이므로 $\overline{BG}=\frac{6\sqrt{7}}{7}$이다. 따라서 $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BF}$임을 알 수 있다.
점 B의 좌표를 $(0, 0)$으로 할 때, 점 F의 좌표는 $(4, 2\sqrt{3})$, 점 C의 좌표는 $(3, 0)$, 점 A의 좌표는 $(0, 3\sqrt{3})$이므로 $\overrightarrow{BF}=(4, 2\sqrt{3})$이고 $\overrightarrow{CA}=(-3, 3\sqrt{3})$이다.
그러므로 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{3}{7}(-12+18)=\frac{18}{7}$이다.

17. 좌표평면에 그림과 같이 두 점 A$(1, 0)$, B$(-1, 0)$을 지름의 양 끝점으로 갖는 원이 있다. 점 P$(1, 2)$에 대하여 선분 AP 위의 점 Q를 $\angle$QOA$=\theta$가 되도록 잡는다. 점 Q에서 원에 그은 접선 중 기울기가 음수인 접선을 l이라 할 때, 직선 l과 선분 BP가 만나는 점을 R, 직선 l과 x축이 만나는 점을 S라 하자. $\triangle$PQR의 넓이를 $f(\theta)$, $\triangle$QSA의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^4}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$이고, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설 :

점 O에서 선분 RQ에 내린 수선의 발을 점 H라 할 때,

삼각형 OHQ와 삼각형 OAQ는 합동이다. 따라서 $\angle$HOQ$=\angle$AOQ$=\theta$이고 삼각형 QSA의 넓이는 삼각형 OHS의 넓이에서 삼각형 OAQ의 넓이의 2배를 빼면 된다. $\overline{\text{OH}}=1$이므로 $\overline{\text{HS}}=\tan 2\theta$이고 따라서

삼각형 OHS의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\tan 2\theta$이다. $\overline{\text{OA}}=1$이므로 $\overline{\text{AQ}}=\tan\theta$이고,

따라서 삼각형 OAQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\tan\theta$이다.

그러므로 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\tan 2\theta-\tan\theta$이다.

점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 점 N이라 하자.

삼각형 PQR의 넓이는 삼각형 PRN의 넓이와 삼각형 NRQ의 넓이의 합과 같다. $\overline{\text{RN}}=h$라 할 때, $\angle$PBA$=\dfrac{\pi}{4}$이므로, $\overline{\text{PN}}=h$이다.

또한 $\angle$RQN$=2\theta$이므로, $\overline{\text{QN}}=\dfrac{h}{\tan 2\theta}$이다. $\overline{\text{PA}}=2$이고, $\overline{\text{QA}}=\tan\theta$

이므로 $\overline{\text{PQ}}=2-\tan\theta$이고 $\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{PN}}+\overline{\text{QN}}=h+\dfrac{h}{\tan 2\theta}$이므로 \

$h=\dfrac{\tan\theta(2-\tan\theta)}{\tan 2\theta+1}$이다.

그러므로 삼각형 PQR의 넓이 $f(\theta)$는

$\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{RN}}=(2-\tan\theta)\times\dfrac{\tan\theta(2-\tan\theta)}{\tan 2\theta+1}$이다.

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta(2-\tan\theta)^2(\tan 2\theta-2\tan\theta)}{2\theta^4(\tan 2\theta+1)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(2-\tan\theta)^2}{2\theta^3(\tan 2\theta+1)}\times\left\{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(2-\tan\theta)^2}{\theta^2(\tan 2\theta+1)}\times\left\{\frac{1}{1-\tan^2\theta}-1\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(2-\tan\theta)^2}{\theta^2(\tan 2\theta+1)}\times\frac{\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(2-\tan\theta)^2}{(\tan 2\theta+1)}\times\frac{1}{1-\tan^2\theta}=4$$

18. 집합 $S=\{2, 3, 4, \ldots, 14\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(A) 집합 A의 모든 원소의 합은 짝수이다. (B) 집합 A의 모든 원소의 곱은 4의 배수이다.

다음은 집합 A의 개수를 구하는 과정이다.

> 조건 (A)에서 집합 A의 원소 중 홀수의 개수는 0이거나 짝수이다. 집합 S의 원소 중 홀수의 개수는 6이므로 이 중에서 홀수를 뽑지 않거나 짝수 개를 뽑는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> 조건 (B)에서 집합 A의 원소 중 짝수만 고려하면, '(i) 4의 배수가 1개 이상인 경우', '(ii) 4의 배수는 없으나 2의 배수가 2개 이상인 경우'가 있다.
>
> (i)의 경우 :
> 집합 S의 원소 중 짝수의 개수는 7이고 이 중에서 4의 배수는 3개다. 따라서 홀수는 포함하지 않고 4의 배수를 1개 이상 포함하는 집합의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (ii)의 경우:
> 집합 S의 원소 중 짝수의 개수는 7이고 이 중에서 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수는 4개다. 따라서 홀수와 4의 배수를 포함하지 않지만 2의 배수를 2개 이상 포함하는 집합의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 두 조건 (A), (B)를 만족시키는 집합 A의 개수는 $\boxed{(가)}\times(\boxed{(나)}+\boxed{(다)})$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 151 ② 152 ③ 153 ④ 154 ⑤ 155

해설 :

서로 다른 6개의 홀수 중 0개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_0$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 4개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 6개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_6$이다.
따라서 (가)$=\frac{1}{2}(1+1)^6=2^5$이다.

홀수를 포함하지 않고 4의 배수를 한 개 이상 포함하는 집합의 개수는 모든 원소가 짝수인 집합의 개수에서 모든 원소가 4의 배수가 아니지만 2의 배수인 집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 (나)$=2^7-2^4$이다.

서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$이다.
서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3$이다.
서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_4$이다.
따라서 (다)$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4$이다.

19. $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{CD}=\frac{7}{5}$이 되도록 선분 CA 위에 점 D를 잡을 때, $\tan(\angle ABD)$의 값은? [4점]

① $\frac{10\sqrt{3}}{21}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{16\sqrt{3}}{21}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{7}$

해설 :

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 H라 하고, $\overline{BH}=x$라 하자. $\overline{AH}^2=25-x^2=49-(8-x)^2$이므로 $x=\frac{5}{2}$이다.

직각삼각형 ABH의 빗변 AB의 길이가 5이고 선분 BH의 길이가 $\frac{5}{2}$이므로 $\angle ABH=\frac{\pi}{3}$이다.

선분 CH의 길이가 $\frac{11}{2}$이므로 $\angle ACB=\beta$라 할 때,

$\cos\beta=\frac{11}{14}$, $\sin\beta=\frac{5\sqrt{3}}{14}$이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 할 때,

$\overline{CE}=\overline{CD}\cos\beta=\frac{7}{5}\cos\beta=\frac{11}{10}$이고 $\overline{DE}=\overline{CD}\sin\beta=\frac{7}{5}\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$\angle DBC=\alpha$라 하자.

그러면, $\tan\alpha=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}-\overline{CE}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{8-\frac{11}{10}}=\frac{5\sqrt{3}}{69}$이다.

$\tan(\angle ABD)=\tan(\angle ABH-\angle DBE)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\angle DBE\right)$

$=\frac{\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{69}}{1+\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{69}}=\frac{16}{21}\sqrt{3}$이다.

20. 좌표공간에 평면 α와 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영은 넓이가 $4\sqrt{3}$인 정삼각형이다. 평면 α가 직선 AB, 직선 BC, 직선 CA와 이루는 각 중 크기가 가장 큰 각을 θ라 하자. 삼각형 ABC를 포함하는 평면을 β라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

ㄴ. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

ㄷ. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{4\tan^2\theta+5}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x \neq 0$이고 $x \neq 1$인 모든 실수에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$-n \le x < -n+1 \text{일 때, } f'(x) = a\pi\cos(2n\pi x)$$
$$n \le x < n+1 \text{일 때, } f'(x) = b\pi\cos(2n\pi x)$$

를 만족시키고, $0 \le x < 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{(f \circ f)(t) - t\}dt = 0$$

이다. 방정식 $(f \circ f)(x) = f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 6이고, 그 근을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, $\frac{1}{2}$, α_5라 할 때, $\int_{\alpha_4}^0 f(x)dx + \int_1^{\alpha_5} f(x)dx$의 최댓값은?

(단, a와 b는 정수이다.) [4점]

① $\frac{1}{4\pi}$　② $\frac{1}{2\pi} + \frac{7}{12}$　③ $\frac{3}{4\pi} + \frac{7}{12}$　④ $\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{7}{12}$　⑤ $\frac{1}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{7}{12}$

해설 :

자연수 n에 대하여 $-n \le x < -n+1$과 $n \le x < n+1$에서

함수 $f'(x)$가 연속한 함수이므로 적분하면

$-n \le x < -n+1$일 때, $f(x) = \frac{a}{2n}\sin(2n\pi x) + C_1$,

$n \le x < n+1$일 때, $f(x) = \frac{b}{2n}\sin(2n\pi x) + C_2$ 이다.

(단, C_1과 C_2는 상수이다.)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속하므로 함수 $(f \circ f)(x)$는 연속함수이고, 그러므로 $\int_0^x \{(f \circ f)(t) - t\}dt = 0$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $0 \le x < 1$인 모든 실수 x에 대하여

$(f \circ f)(x) - x = 0$, 즉 $(f \circ f)(x) = x$임을 알 수 있다.

구간 $[0, 1)$의 모든 실수에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$가 성립하므로

역함수의 정의에 의하여 $f(x) = f^{-1}(x)$이다.

1) 구간 $[0, 1)$에서 함수 $f(x)$가 증가함수라 하자.

주어진 구간에서 증가함수이면서 $f(x) = f^{-1}(x)$인 함수 $f(x) = x$ 뿐이다.

이 때, $(f \circ f)(x) = x = f(x)$이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = f(x)$는 무수히 많은 서로 다른 실근을 가진다.

그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 함수가 아니다.

2) 구간 $[0, 1)$에서 함수 $f(x)$가 감소함수라 하자.

이때, 함수 $f(x)$는 $f(0) = 1$이고 $f(1) = 0$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = C_1 = 1$이고 $\lim_{x \to 1+} f(x) = C_2 = 0$이다.

방정식 $(f \circ f)(x) = f(x)$의 실근은 방정식 $f(x) = x$의 모든 실근 β_i에 대하여 방정식 $f(x) = \beta_i$의 실근과 같다.

구간 $[0, 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소함수이고 일대일대응이기 때문에

주어진 조건에 의하여 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 즉 $x = \frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$가 만나고 다른 점에서는 만나지 않는다.

그러므로 α_1, α_2, α_3, α_4는 모두 0보다 작고 α_5는 1보다 크다.

그리고 $f(\alpha_i) = \frac{1}{2}$인 $i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$가 존재한다.

만약 $a > 2$ 또는 $a < -2$이면,

$n = 1$일 때, $-1 \le x < 0$에서 함수 $f(x) = \frac{a}{2}\sin(2\pi x) + 1$는 반드시 함수 $y = x$와 두 점에서 만난다. 또한 $f(x) = \frac{1}{2}$인 서로 다른 x가 2개 존재하므로 α_1, α_2, α_3, α_4는 모두 -1보다 크거나 같고 0보다 작다. 하지만 $n = 2$일 때, $-2 \le x < 0$에서도 함수 $f(x) = \frac{1}{2}$인 실수 x가 존재하므로 조건에 모순이다.

그러므로 $-2 \le a \le 2$이다.

만약 $a = 0$이면, 모든 자연수 n에 대하여 $-n \le x < -n+1$에서 $f(x) = \frac{1}{2}$인 실수 x가 존재하지 않으므로, 조건에 모순이다.

만약 $a = -1$ 또는 $a = 1$이면, $n = 1$일 때, $-1 \le x < 0$에서 함수 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + 1$은 함수 $y = \frac{1}{2}$과 한 점에서 만난다.

$n = 2$일 때, $-2 \le x < -1$에서 함수 $y = \frac{1}{4}\sin(4\pi x) + 1$의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이므로 $y = \frac{1}{2}$과 만나지 않는다.

$n>2$일 때, $-n\le x<-n+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$보다 크다. 따라서 $x<0$에서 방정식 주어진 방등식의 서로 다른 실근의 개수가 4라는 조건에 모순이다.

만약 $a=2$이면, $n=1$일 때, $-1\le x<0$에서 함수 $f(x)=\sin(2\pi x)+1$은 함수 $y=\frac{1}{2}$과 서로 다른 두 점에서 만난다. $n=2$일 때, $-2\le x<-1$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(4\pi x)+1$은 함수 $y=\frac{1}{2}$과 두 점에서 만난다.

$n\ge 3$일 때, $-n\le x<-n+1$에서 함수 $f(x)$은 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 크고, 따라서 함수 $y=\frac{1}{2}$와 만나는 점은 없다.

또한 $a=-2$일 때도, 유사한 방법으로 조건에 모두 만족함을 알 수 있다.

마찬가지로 $x>1$에서 함수 $f(x)$가 함수 $y=\frac{1}{2}$와 한 점에서만 만나기 위해서는 $b=1$ 또는 $b=-1$이고 $1\le x<2$에서만 한 점에서 만나면 된다.

이때, $\int_{\alpha_4}^{0}f(x)dx+\int_{1}^{\alpha_5}f(x)dx$의 값이 최대가 될 때는 $a=-2$이고 $b=1$이 되어 $\alpha_4=-\frac{7}{12}$이고 $\alpha_5=\frac{5}{4}$이면 된다.

그러므로 최댓값은

$$\int_{-\frac{7}{12}}^{0}\{-\sin(2\pi x)+1\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\frac{1}{2}\sin(2\pi x)dx=\frac{1}{\pi}+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}+\frac{7}{12}$$ 이다.

단답형

22. ${}_6\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{C}_2$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : ${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$이고 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 ${}_6\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{C}_2=28$이다.

23. 부등식 $\log_2(x^2-4x+3)\le 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

해설 :
로그의 진수는 항상 0보다 커야 하므로 $x^2-4x+3>0$이다.
그러므로 $x>3$ 또는 $x<1$이다.
이 때, $3=\log_2 8$이므로 $x^2-4x+3\le 8$이고 $x^2-4x-5\le 0$이다.
그러므로 $-1\le x\le 5$이다.
따라서 해집합은 $-1\le x<1$ 또는 $3<x\le 5$이므로
주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값은 -1, 0, 4, 5이고
합은 8이다.

24. 자연수 8을 8의 양의 약수로만 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

해설 :
8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이다.
$8=8$
$=4+4$
$=4+2+2$
$=4+2+1+1$
$=2+2+2+2$
$=2+2+2+1+1$
$=2+2+1+1+1+1$
$=4+1+1+1+1$
$=2+1+1+1+1+1+1+1$
$=1\times8$

총 10가지이다.

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $g(x)=\cos x$에 대하여 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{2h(x+1)-1}{x}=1$$

을 만족시킬 때, $15\{f'(1)\}^2$의 값을 구하시오. [3점]

해설 :
주어진 극한이 수렴하고 함수 $h(x)$는 연속하는 함수이므로
$h(1)=\frac{1}{2}$이고, $h'(1)=\frac{1}{2}$이다.
함수 $g(x)$는 구간 $[0, \pi]$에서 정의되었으므로 $h(1)=g(f(1))=\frac{1}{2}$인
$f(1)$은 $\frac{\pi}{3}$이다.
$h'(1)=g'(f(1))\times f'(1)=g'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f'(1)=-\sin\frac{\pi}{3}\times f'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times f'(1)$
$=\frac{1}{2}$이므로 $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.
그러므로 $15\{f'(1)\}^2=15\times\frac{1}{3}=5$이다.

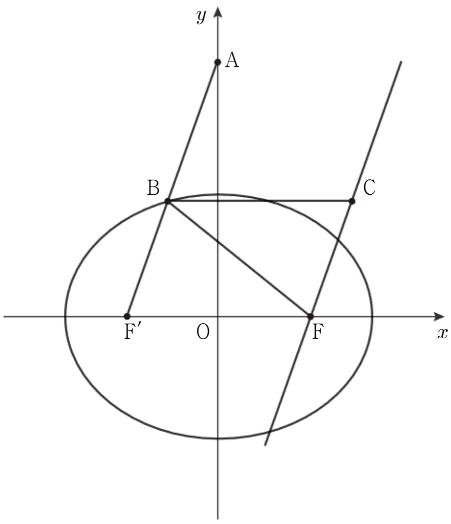
26. 자연수 k에 대하여 확률변수 X가 가지는 값이 k 이하의 자연수이고,

$$\mathrm{P}(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}\quad(1\le n\le k)$$

를 만족시킨다. $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)=8$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이고, a는 상수이다.) [4점]

해설 :
$\sum_{n=1}^{k}\mathrm{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a}{n(n+1)}=a\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{ak}{k+1}=1$이다.
$\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{k}n^2\times\frac{a}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{k}n\times\frac{a}{n(n+1)}$
$=\sum_{n=1}^{k}\frac{an}{n+1}+\sum_{n=1}^{k}\frac{a}{n+1}$
$=\sum_{n=1}^{k}\frac{a(n+1)}{n+1}=\sum_{n=1}^{k}a=ak=8$이므로 위 식에 대입하면
$k=7$이다.

27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(c,0)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{64}=1$에 대하여 점 $\mathrm{A}(0,k)$와 점 F'를 지나는 선분이 타원과 만나는 점을 B라 하자. 점 F를 지나고 직선 AF'과 평행한 직선이 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선과 만나는 점을 C라 할 때, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{FBF}'$을 만족시킨다. 삼각형 BCF의 둘레의 길이가 32일 때, 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



해설 :

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCF}$이고 $\angle\mathrm{BFC}=\angle\mathrm{FBF}'=\angle\mathrm{ABC}$이므로

삼각형 BFC는 $\angle\mathrm{BFC}=\angle\mathrm{BCF}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=x$라 할 때, $\overline{\mathrm{BF}}=x$이고 $\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{BF}'}=2a-x$이다.

삼각형 BCF의 둘레의 길이는 32이므로 $x+x+2a-x=x+2a=32$이다.

한편 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{FF}'}$이므로 $x=2c$이고, 이를 위 등식에 대입하면 $2a+2c=32$이다. 즉, $a+c=16$이다.

c는 초점의 x좌표이므로 $c=\sqrt{a^2-64}$이고 이를 $a+c=16$과 연립하면 $a=10$, $c=6$이고 $x=12$이다.

점 F에서 선분 BF'에 내린 수선의 발을 M이라 할 때, 선분 FM의 길이는 $8\sqrt{2}$이다.

따라서 삼각형 BFF'의 넓이는 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 점 H라 할 때,

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}'}\times\overline{\mathrm{FM}}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF}'}\times\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\times 12\times\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$이고 $\overline{\mathrm{F'H}}=\dfrac{8}{3}$이다.

삼각형 BHF'과 삼각형 AOF'은 닮음이므로 $\dfrac{8}{3}:\dfrac{16\sqrt{2}}{3}=6:k$이고

따라서 $k=12\sqrt{2}$이다. 그러므로 $k^2=288$이다.

28. 방정식 $x+y+z=9$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x,y,z) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍이 부등식 $(x-z)^2(x-1)(y-2)(z-3)\le 0$을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

해설 :

전체 경우의 수는 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x,y,z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\dfrac{11\times 10}{2\times 1}=55$이다.

여사건의 경우의 수를 구해보면 다음과 같다.

문제에서 주어진 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z) 중에서

부등식 $(x-z)^2(x-1)(y-2)(z-3)>0$을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하자.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$(x-z)^2(x-1)(y-2)(z-3)>0$

$\Leftrightarrow$ $x\ne z$, $(x-1)(y-2)(z-3)>0$

$\Leftrightarrow$ $x\ne z$, $x>1$, $y>2$, $z>3$

또는 $x\ne z$, $x<1$, $y<2$, $z>3$

또는 $x\ne z$, $x<1$, $y>2$, $z<3$

또는 $x\ne z$, $x>1$, $y<2$, $z<3$

1) $x\ne z$, $x>1$, $y>2$, $z>3$일 때,

위의 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z)는 $(2,3,4)$뿐이므로 순서쌍의 개수는 1이다.

2) $x\ne z$, $x<1$, $y<2$, $z>3$

위의 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z)는 $(0,0,9)$, $(0,1,8)$이고, 순서쌍의 개수는 2이다.

3) $x\ne z$, $x<1$, $y>2$, $z<3$

위의 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z)는 $(0,8,1)$, $(0,7,2)$이고, 순서쌍의 개수는 2이다.

4) $x\ne z$, $x>1$, $y<2$, $z<3$

위의 조건을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z)는

$(9,0,0)$, $(8,0,1)$, $(7,0,2)$, $(8,1,0)$, $(7,1,1)$, $(6,1,2)$

이고, 순서쌍의 개수는 6이다.

그러므로 모든 경우의 수는 $1+2+2+6=11$

따라서 여사건의 확률은 $\dfrac{11}{55}=\dfrac{1}{5}$이고 $\dfrac{q}{p}=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$이다.

$\therefore$ $p+q=9$

29. 좌표공간에서 움직이는 점 P가 있다. 구 $x^2+y^2+z^2=9$와 평면 $\sqrt{3}x+z=2$가 만나서 생기는 원 위를 움직이는 두 점 Q, R이 $|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{PR}|^2=34$를 만족시킨다. $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$이 최소일 때, $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{RP}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

해설 :

구 $x^2+y^2+z^2=9$와 평면 $\sqrt{3}x+z=2$이 만나서 생기는 원은 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다. 따라서 이 원 위를 움직이는 두 점 Q, R에 대하여 $|\overrightarrow{QR}|$은 부등식 $0\le|\overrightarrow{QR}|^2\le 32$을 만족시키며 움직인다.

$|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}|$이므로 위 부등식에 대입하면,

$0\le|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}|^2\le 32$이고

$0\le|\overrightarrow{PR}|^2-2\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}+|\overrightarrow{PQ}|^2\le 32$이다.

$|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{PR}|^2=34$이므로 위 부등식에 대입하면

$0\le 34-2\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}\le 32$이고 이를 정리하면 $1\le\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}\le 17$이다.

즉, $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최솟값은 1이다.

$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}$가 1일 때, $|\overrightarrow{QR}|^2=|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}|^2=32$이므로 $|\overrightarrow{QR}|=4\sqrt{2}$ 이므로 두 점 Q, R은 원의 지름의 양 끝에 있다.

이 원의 중심, 즉 두 점 Q, R의 중심을 점 M이라 할 때,

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{PQ}|^2+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}+|\overrightarrow{PR}|^2\right)$$

$=\frac{1}{4}(34+2)=9$ 이므로 점 P는 점 M을 중심으로 하고 반지름이 3인 구 위의 임의의 점이다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{RP}&=\overrightarrow{OQ}\cdot(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\\&=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{MP}\\&=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{MP}=8+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{MP}\end{aligned}$$

에서 이 값이 최대가 되기 위해서는 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{MP}$가 평행하면 된다. 그러므로 최댓값은 $8+|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{MP}|=8+3\times3=17$이다.

30. 이차함수 $f(x)$와 $-e\le t\le e$인 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}e^{-f(x)} & (x<1)\\ e^{-f(x-t)}-t & (x\ge 1)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{g(x)-2ex-e}{x}<0$이다.
>
> (나) $-e\le t\le 0$일 때, $x_1<0<x_2<1<x_3$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2, x_3에 대하여 $g''(x_1)g''(x_2)g''(x_3)<0$이다.
>
> (다) $t=\dfrac{1}{2}$일 때, 함수 $g(x)$는 극댓값 또는 극솟값만을 갖고 그 개수는 2이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 t의 값을 $\alpha(\alpha>0)$라 할 때, $f(3)+\ln|e^{-f(\alpha)}-\alpha|$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

함수 $h(x)$를 $h(x)=e^{-f(x)}$라 할 때,

함수 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases}h(x) & (x<1)\\ h(x-t)-t & (x\ge 1)\end{cases}$이다.

$t=0$일 때, 함수 $g(x)$는 함수 $h(x)$와 같다.

조건 (가)에서 부등식의 양변에 x^2을 곱하면

$x\{g(x)-(2ex+e)\}<0$이고, 부등식을 풀면

$x>0$일 때, $g(x)<2ex+e$이므로

$\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)\le\lim_{x\to0+}(2ex+e)=e$이다.

$x<0$일 때, $g(x)>2ex+e$이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)\ge\lim_{x\to0-}(2ex+e)=e$이다.

$\therefore$ $g(0)=e$ 즉, $f(0)=-1$이다.

조건 (나)에서 $g''(x_1)$, $g''(x_2)$, $g''(x_3)$의 부호는 다음의 네 가지 경우가 있다.

1) $g''(x_1)<0$, $g''(x_2)<0$, $g''(x_3)<0$

2) $g''(x_1)<0$, $g''(x_2)>0$, $g''(x_3)>0$

3) $g''(x_1)>0$, $g''(x_2)<0$, $g''(x_3)>0$

4) $g''(x_1)>0$, $g''(x_2)>0$, $g''(x_3)<0$

$t=0$일 때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 함수 $h(x)$를 조사해보자.

① 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

함수 $f(x)$를 $f(x)=a(x-m)^2+k$ $(a>0)$로 두면

함수 $h(x)$는 $x=m$에서 대칭이다. ($\because$ $h(x)=h(2m-x)$)

함수 $h(x)$의 극점과 변곡점을 조사하자.

$h'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}=0$에서

$-f'(x)=-2a(x-m)=0$

$x=m$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $h(x)$는 $x=m$에서 극대이다.

$h''(x)=\{\{f'(x)^2-f''(x)\}\}e^{-f(x)}=0$에서

$f'(x)^2=f''(x)$

$4a^2(x-m)^2=2a,\ a>0$이므로

$(x-m)^2=\frac{a}{2}$ 즉, $x=m+\sqrt{\frac{a}{2}}$ 또는 $x=m-\sqrt{\frac{a}{2}}$

$x=m+\sqrt{\frac{a}{2}}$ 의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고

$x=m-\sqrt{\frac{a}{2}}$ 의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로

바뀌므로 함수 $h(x)$는

구간 $\left(-\infty,\ m-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$, $\left(m+\sqrt{\frac{a}{2}},\ \infty\right)$에서 아래로 볼록이고

구간 $\left(m-\sqrt{\frac{a}{2}},\ m+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$에서 위로 볼록이다.

이를 만족시키는 경우는 앞서 살펴본 4가지 경우 중

3) $g''(x_1)>0,\ g''(x_2)<0,\ g''(x_3)>0$ 뿐이다.

사이값정리에 의해 $m-\sqrt{\frac{a}{2}}=0,\ m+\sqrt{\frac{a}{2}}=1$이다.

$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ a=2$

$f(0)=-1$이므로 함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2-2x-1$

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} h(x) & (x<1) \\ h(x-t)-t & (x\geq 1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 t의 값인 α를 찾아보자.

함수 $h(x-t)-t$의 그래프는 함수 $h(t)$의 그래프를 x축의 방향으로 t, y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 것이므로

점 $(1,e)$를 지나고 기울기가 -1인 직선인 $y=-x+e+1$과

함수 $h(x)$의 그래프의 교점을 생각하자.

그 교점의 x좌표를 β라 하면

$\alpha=1-\beta$ ($\because$ 직선의 기울기가 -1)

이때 직선 $y=-x+e+1$을 $x=\frac{1}{2}$에 대해 대칭이동한

직선 $y=x+e$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α이다.

($\because\ \beta=1-\alpha$)

$\therefore\ h(\alpha)=\alpha+e$ 즉, $e^{-f(\alpha)}-\alpha=e$

$f(3)=11,\ f(3)+\ln\left|e^{-f(\alpha)}-\alpha\right|=1$이다.

답 12