1. 좌표평면에서 두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=\frac{1}{6}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

[3점][15년 09월 평가원]

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

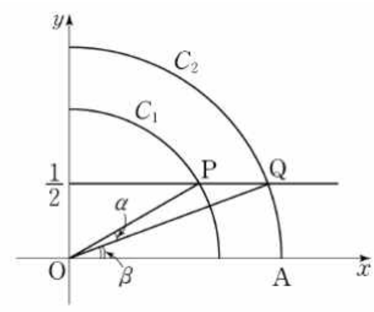
2. $0\leqq x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 2x=2\cos x-2\cos^2 x$를 만족시키는 서로 다른 모든 x의 값의 합은?

[3점][09년 수능]

① π ② $\frac{5}{4}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ 2π

3. 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 직선 $y=\frac{1}{2}$이 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 $A(\sqrt{2},0)$에 대하여 $\angle QOP=\alpha$, $\angle AOQ=\beta$라고 할 때, $\sin(\alpha-\beta)$의 값은?

[3점][10년 06월 평가원]



① $\frac{3-\sqrt{14}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{8}$
④ $\frac{3-\sqrt{21}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{21}}{8}$

4. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}$ 의 값은?

[2점][2011년 6월 평가원]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\sqrt{e}$
④ e ⑤ e^2

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}$의 값을 구하시오. [3점]

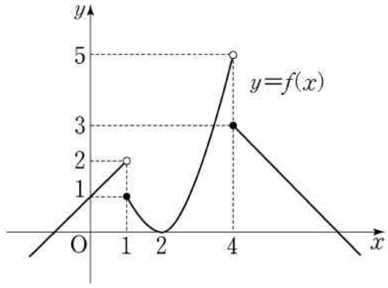
[3점][13년 06월 평가원]

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{ax^2+b}-1}=\frac{2}{3}$가 성립할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[13년 교육청]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



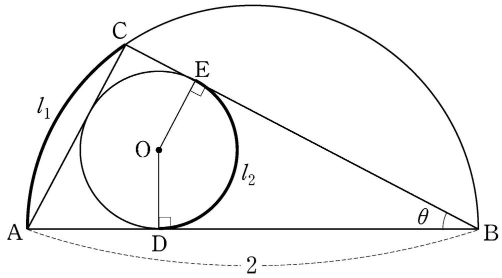
$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?

[3점][10년 06월 평가원]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

8. 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC=\theta$이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta\to 0}\frac{l_1}{l_2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)

[3점][07년 06월 평가원]



① 1 ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{3}{\pi}$

9. 함수 $f(x)=x\ln x+13x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[3점][13년 수능]

10. 좌표평면에서 곡선 $y^3=\ln(5-x^2)+xy+4$ 위의 점 (2,2)에서의 접선의 기울기는?

[3점][11년 수능]

① $-\dfrac{3}{5}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{2}{5}$

④ $-\dfrac{3}{10}$ ⑤ $-\dfrac{1}{5}$

11. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x$ $(a>0)$ 의 극솟값이 0 일 때, 상수 a 의 값은?

[3점][11년 06월 평가원]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$ ③ $\sqrt{e}$

④ e ⑤ $2e$

12. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$ 의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a 의 최댓값은?

[4점][11년 09월 평가원]

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

13. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 일 때, $f(3)$ 의 값은?

[4점][12년 수능]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

14. 1보다 큰 실수 a에 대하여 $f(a)=\int_{1}^{a}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$라 할 때, $f(a^4)$과 같은 것은?

[3점][07년 수능]

① $4f(a)$　② $8f(a)$　③ $12f(a)$　④ $16f(a)$　⑤ $20f(a)$

15. 연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은?

[3점][13년 수능]

① $e-2$　② $\frac{e-1}{2}$　③ $\frac{e}{2}$　④ $e-1$　⑤ $\frac{e+1}{2}$

16. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은?

[3점][15년 수능]

① $\ln 2$　② $\ln 3$　③ $2\ln 2$　④ $\ln 5$　⑤ $\ln 6$

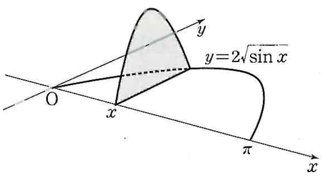
17. 함수 $y=e^x$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=ax$ $(0<a<e)$ 에 의하여 이등분될 때, 상수 a 의 값은?

[3점][14년 09월 평가원]

① $e-\frac{1}{3}$ ② $e-\frac{1}{2}$ ③ $e-1$

④ $e-\frac{4}{3}$ ⑤ $e-\frac{3}{2}$

18. 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{\sin x}$ $(0\le x\le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?



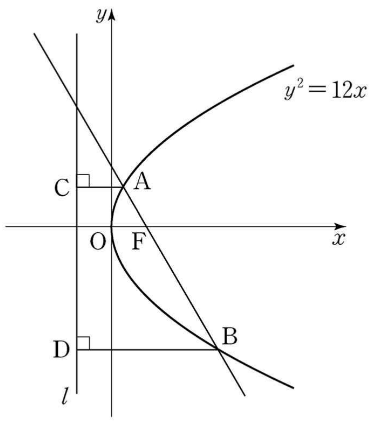
[16년 교육청]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

19. 그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$일 때, 선분 BD의 길이는 [3점]

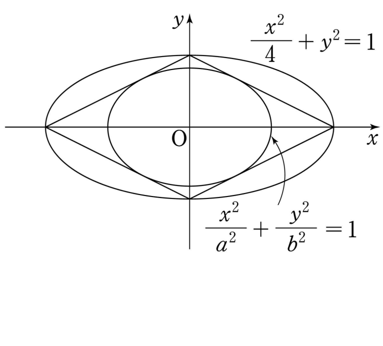
[3점][15년 수능]



① 12 ② $\frac{25}{2}$ ③ 13 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 14

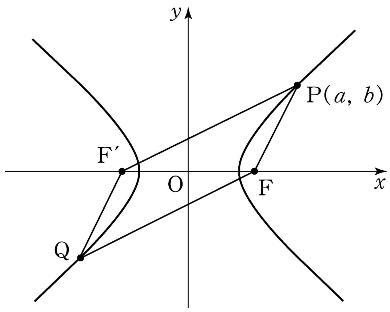
20. 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F$(b,0)$, F$'(-b,0)$일 때, $a^2b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][09년 수능]



21. 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 꼭지점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P의 원점에 대한 대칭인 점을 Q라 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $|a|+|b|$의 값은?

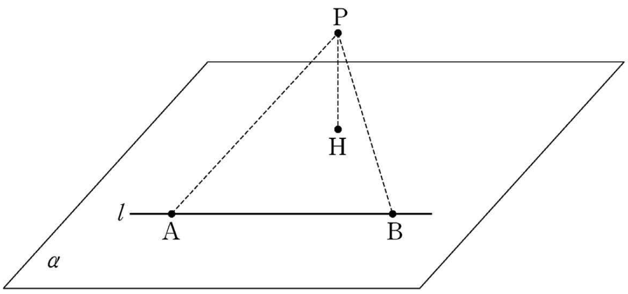
[3점][06년 수능]



① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

22. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}=\overline{PA}=\overline{PB}=6$, $\overline{PH}=4$일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는? [3점]

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$



23. 다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

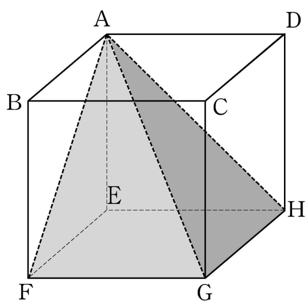
[3점][08년 09월 평가원]

> 좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구
>
> $x^2+y^2+z^2=1$
>
> $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$
>
> 에 동시에 외접한다.

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$ ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

24. 정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

[3점][07년 수능]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

25. 좌표공간에서 두 점 $A(a,5,2)$, $B(-2,0,7)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(0,b,5)$이다. $a+b$의 값은?

[14년 수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

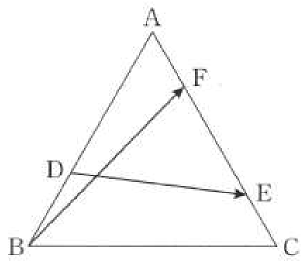
26. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은?

[14년 09월 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 $3:1$과 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$의 값은?[3점]

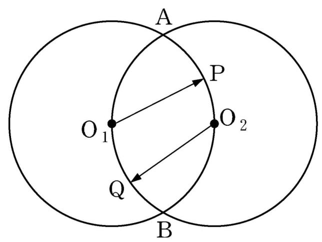
[3점][13년 09월 평가원]



① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

28. 평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[3점][08년 09월 평가원]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

29. 평면 $2x-y=0$과 평면 $x-3y+kz+2=0$이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 양의 상수 k의 값은?

[3점][07년 09월 평가원]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

30. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$에 수직이고 점 $(1,\ -5,\ 2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

[3점][10년 수능]

31. 매개변수 θ로 나타내어진 곡선 $x=4\cos\theta,\ y=4\sin\theta$에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[16년 교육청]

① $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

32. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t\ \ (0\le t\le a)$

의 길이가 $4-\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값은?

[16년 교육청]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$
④ $\frac{3}{2}\ln 3$ ⑤ $2\ln 2$

9월 대비 필수문제 1주차 7.31

1. 정답 ④

$x-y-1=0$의 기울기를 m_1,

$ax-y+1=0$의 기울기를 m_2라 하면

$m_1=1$, $m_2=a$이고

$\tan\theta=\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|$

$=\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{1}{6}$ $(\because a>1)$

따라서

$6a-6=1+a$

$5a=7$

$\therefore a=\dfrac{7}{5}$

2. 정답 ⑤

$\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로 주어진 방정식은

$2\sin x\cos x=2\cos x-2\cos^2 x$

$\cos x(\sin x+\cos x-1)=0$

$\therefore$ $\cos x=0$ 또는 $\sin x+\cos x=1$

(i) $\cos x=0$에서

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

(ii) $\sin x+\cos x=1$에서

$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 서로 다른 모든 x의 값의 합은

$$0+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$$

3. 정답 ④

$\angle POA=\alpha+\beta=\theta$ 라 하면

점 P 의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$,

점 Q 의 좌표는 $(\sqrt{2}\cos\beta, \sqrt{2}\sin\beta)$ 이다.

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 이고 $\sqrt{2}\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{8},\ \cos\beta=\frac{2\sqrt{14}}{8}$$

이다.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\beta\right)$$

$=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2\beta-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 2\beta$

$(\because \cos 2\beta=1-2\sin^2\beta,\ \sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$$

4. [정답] ③

해설

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{e}$

5. 정답 12 초월함수의 극한

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+10x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}2+10=2+10=12$

6. [정답] ④

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{ax^2+b}-1}=\dfrac{2}{3}$에서

$x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{ax^2+b}-1\right)=\sqrt{b}-1=0$

$\therefore\ b=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{ax^2+1}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\left(\sqrt{ax^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{ax^2+1}-1\right)\left(\sqrt{ax^2+1}+1\right)(1+\cos 2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos^2 2x)\left(\sqrt{ax^2+1}+1\right)}{ax^2(1+\cos 2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x\left(\sqrt{ax^2+1}+1\right)}{ax^2(1+\cos 2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(\sqrt{ax^2+1}+1\right)}{a(1+\cos 2x)}$

$=1\cdot\dfrac{4\left(\sqrt{1}+1\right)}{2a}$

$=\dfrac{4}{a}$

$\dfrac{4}{a}=\dfrac{2}{3}$이므로 $a=6$

$\therefore\ a+b=6+1=7$

7. 정답 ③

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \lim_{s\to\infty} f\left(\frac{-4s-1}{-s+1}\right)$$ (∵ $-t=s$ 로 치환)

$$= \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1-2}{t+1}\right) + \lim_{s\to\infty} f\left(\frac{-4s+4-5}{-s+1}\right)$$

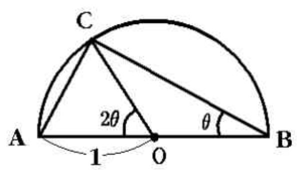
$$= \lim_{t\to\infty} f\left(1+\frac{-2}{t+1}\right) + \lim_{s\to\infty} f\left(4+\frac{5}{s-1}\right)$$

($t\to\infty$, $\frac{2}{t+1}\to+0$이고, $s\to\infty$, $\frac{5}{s-1}\to+0$)

$$= \lim_{h\to+0} f(1-h) + \lim_{h\to+0} f(4+h) =$$

$2+3=5$

8.정답:④



(i) $\angle ABC=\theta$라 하면 $\angle AOC=2\theta$

$l_1=1\cdot 2\theta=2\theta$

(ii) $\overline{AC}=2\sin\theta$, $\overline{BC}=2\cos\theta$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{r}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

$$\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\cos\theta=\frac{r}{2}(2+2\sin\theta+2\cos\theta)$$

$$\therefore\ r=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

□$ODBE$에서 $\angle DOE$는 $\pi-\theta$이므로

$l_2=r\cdot(\pi-\theta)$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)$$

(iii) $\lim_{\theta\to0}\frac{l_1}{l_2}$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta}{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(\pi-\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{(\pi-\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{1+0+1}{\pi\cdot1}=\frac{2}{\pi}$$

9. 정답 14

$f(x)=x\ln x+13x$에서

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+13=\ln x+14$

$\therefore\ f'(1)=14$

10.정답 ⑤

음함수의 미분법에 의하여

$3y^2y'=\frac{-2x}{5-x^2}+y+xy'$,

$(3y^2-x)y'=\frac{-2x}{5-x^2}+y$, $(2,2)$를 대입하여 정리하면 $10y'=-2$

$\therefore y'=-\frac{1}{5}$

11. [정답] ④

해설

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x\ (a>0)$

$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}=0$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극소값은

$f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$,

$\therefore a=e$

12. [정답] ①

[출제의도] 삼차함수의 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가 ?

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 필요충분조건은 이차방정식

$f'(x)=x^2-2ax+3a=0$

이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 것이다.

따라서 판별식을 D라 하면

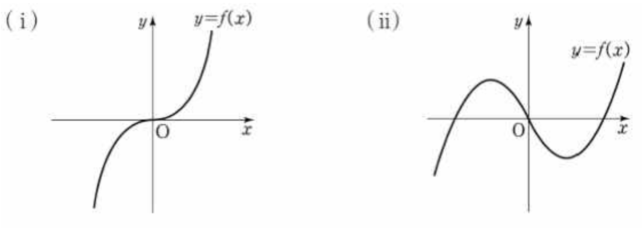
$$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$$

이므로 $0\le a\le 3$이다.

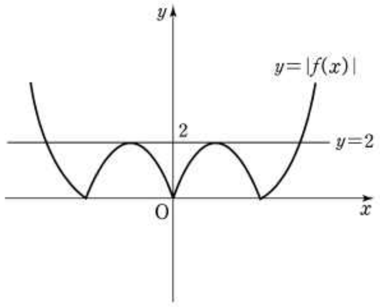
따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

13. 정답 ④

최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대해 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 $f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 유형이 가능하다.



두 가지 유형 중 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근이 4개가 가능한 것은 (ii)의 유형이다. (그림 참조)



따라서, $f(x)$의 극솟값은 -2, 극댓값은 2이다.

$f(x)=x^3-bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-b=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

$f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=-2$이므로

$$\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3-b\times\sqrt{\frac{b}{3}}=-2$$

정리하여 계산하면, $b=3$

$\therefore\ f(3)=3^3-3\times 3=18$

14. 답 ②

$\ln x=t$로 치환하면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이고, $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(a)=\int_0^{\ln a}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln a}=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(4\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$=4^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}\right\}=8f(a)$$

15. 정답 ④

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$에서 $\int_0^1 tf(t)dt=a$라 하면

$f(x)=e^{x^2}+a$이므로

$$a=\int_0^1 t\cdot f(t)\,dt=\int_0^1 t\left(e^{t^2}+a\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(t\cdot e^{t^2}+at\right)dt=\left[\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a=e-1$

16. 정답 ②

$$x_k=1+\frac{2k}{n},\ \Delta x=\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_1^3 f(x)dx$$

$f(x)=\frac{1}{x}$이므로 $\int_1^3\frac{1}{x}dx=\ln 3$

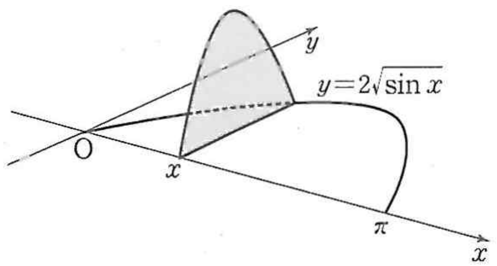
17. 정답 ③

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx=\frac{1}{2}a$$

$\therefore e-1=a$

18. 답 ③

[해설]



이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원이고, 이 반원의 지름의 길이가 $2\sqrt{\sin x}$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라
하면

$$S(x) = \frac{\pi}{2} \times (\sqrt{\sin x})^2 = \frac{\pi}{2}\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin x\, dx = \frac{\pi}{2}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(1+1) = \pi$$

19. 정답 ①

$\overline{AF} = a, \overline{BF} = b$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$에서, $a = 4, p = 3$

$b = 12$

$\therefore \overline{BD} = \overline{BF} = 12$

20. 답 17

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 초점의 좌표가 $(\pm b,\ 0)$이므로

$$a^2 - b^2 = b^2$$

$$\therefore\ a^2 = 2b^2\ \cdots\ ㉠$$

또, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 y절편이 ±1이므로

$$\pm\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \pm 1\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a^2 = \frac{4}{3},\ b^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a^2b^2 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore\ p + q = 17$$

21. 답 ①

점 (a,b)는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{5} - \frac{b^2}{4} = 1\ \cdots\ ㉠$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$의 두 초점의 좌표는 $F(3,0),\ F'(-3,0)$이다.

이 때, 사각형 $F'QFP$의 넓이는 합동인 두 삼각형 $F'QF$, FPF'의 넓이와 같으므로

$$\square F'QFP = 2 \times \triangle FPF' = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times |b|$$

$$= 6|b| = 24$$

$$\therefore\ |b| = 4\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a^2 = 25$이므로 $|a| = 5$

$$\therefore\ |a| + |b| = 5 + 4 = 9$$

22. 12. [공간도형 – 삼수선의 정리]

P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H'

H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H'

$\overline{PH'} = 3\sqrt{3}$, $\overline{PH} = 4$이므로

$\overline{HH'} = \sqrt{11}$ ($\because$삼수선의 정리)

23. 답 ⑤

두 구

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$

의 중심을 각각 $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$라 하면

두 구의 중심 사이의 거리d는

$d = \overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

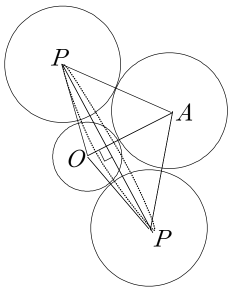
이고, 두 구의 반지름의 길이가 각각 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$이므로

$d = r_1 + r_2$

따라서, 두 구는 외접한다.

조건을 만족하는 점P의 자취는 선분OA로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취 즉, 원을 나타낸다.

오른쪽 그림에서

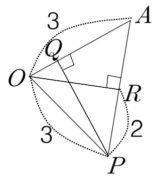


$\overline{OR} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{PQ}$$

에서 $\overline{PQ} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$



따라서, 점P의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{4}{3}\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$$

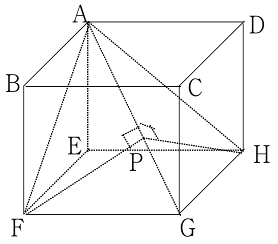
24. 답 ③

선분 FG 는 평면 ABFE 와 수직이므로

$$\overline{AF} \perp \overline{FG}$$

또, 선분 HG 는 평면 AEHD 와 수직이므로

$$\overline{AH} \perp \overline{HG}$$



따라서 정육면체의 한 모서리의 길이를 1 이라 하고, 점 F 에서 선분 AG 에 내린 수선의 발을 P 라 하면 직각삼각형 AFG 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{FG} = \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{FP}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \overline{FP}$$

$$\therefore\ \overline{FP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

그런데, 두 직각삼각형 AFG, AHG 는 합동이므로 점 H 에서 선분 AG 에 내린 수선의 발도 P 이고, $\overline{HP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 두 평면 AFG, AHG 가 이루는 각의 크기는 두 선분 FP, HP 가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{FH} = \sqrt{2}$ 이므로 삼각형 FHP 에서 제이코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \left| \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \right| = \frac{1}{2}$$

$(\because\ 0 \leq \theta < 90^\circ)$

$$\therefore\ \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

다른 풀이

점 E 를 원점으로 하고, 직선 EF를 x축, 직선 EH 를 y축, 직선 EA 를 z축으로 하는 좌표공간을 설정하자.

세 점 $\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{F}(1,0,0)$, $\mathrm{G}(1,1,0)$ 을 지나는 평면의 방정식은 $x+z=1$ 이고,

세 점 $\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{H}(0,1,0)$, $\mathrm{G}(1,1,0)$ 을 지나는 평면의 방정식은 $y+z=1$ 이다.

이 때, 두 평면 AFG, AHG 가 이루는 각의 크기는 두 평면의 법선벡터

$\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ 이 이루는 각 중 예각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

25. [정답] ⑤

[출제의도] 좌표공간에서 두 점의 내분점을 구할 수 있는가?

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하면

$P\left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right)$이므로 $\left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right) = (0, b, 5)$

$\therefore\ a=3,\ b=2,\ a+b=5$

26. 정답 ②

$\vec{a}$ 와 $\vec{a} - t\vec{b}$ 가 수직이므로

$\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0$

$|\vec{a}|^2 - t\,\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$4 - 2t = 0$

$\therefore\ t = 2$

27. ③

$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left| -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right|^2 = \frac{25}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{10}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$

$\therefore 34 - 15 = 19$

28. 답 ②

오른쪽 그림과 같이 선분 O_1O_2의 연장선 위에 O_3를 잡고 반지름의 길이가 1인 그려 원 O_1과 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 하자.

이때, $\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1Q_1}$인 점 Q_1을 잡고 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q_1}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1Q_1}$

$= |\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_1Q_1}| \cos\theta$

$= \cos\theta$ -----㉠

이 때, 오른쪽 그림에서 네 삼각형 O_1O_2A, O_1BO_2, $O_1A_1O_3$, $O_1O_3B_1$가 정삼각형이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

따라서, ㉠은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 최대값 $\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$일 때, 최소값 -1을 가지므로

$M+m=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

29. ④

평면 $2x-y=0$의 법선벡터를

$\overrightarrow{h_1}=(2,\ -1,\ 0)$

평면 $x-3y+kz+2=0$의 법선벡터를

$\overrightarrow{h_2}=(1,\ -3,\ k)$라 하면

$$\cos 60=\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=\frac{2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10+k^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+10}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ k=\sqrt{10}\ (\because\ k>0)$

30. [09년 수능]

구하는 평면을 α라 하자.

평면 α가 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$에 수직이므로

평면 α의 법선벡터를 직선의 방향벡터 $(2, 3, 1)$로 놓을 수 있다.

평면 α는 점 $(1, -5, 2)$를 지나므로 평면 α의 방정식은

$2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$

$2x+3y+z+11=0$

$\therefore\ a=3,\ b=1,\ c=11$

$\therefore\ a+b+c=15$

답 15

31. 답 ⑤

[해설]

$x=4\cos\theta,\ y=4\sin\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=-4\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=4\cos\theta$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4\cos\theta}{-4\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}\quad(\text{단, } \sin\theta\neq 0)$$

이때 $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때,

$x=4\cos\frac{\pi}{3}=2,\ y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 곡선 위의 점의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3})$이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

즉, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점이 각각 A, B이므로

$A(8,\ 0),\ B\left(0,\ \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$이다.

따라서 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$

32.답 ③

[해설] $x=e^t\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

$y=e^t\cos t$에서 $\frac{dy}{dx}=e^t(\cos t-\sin t)$

주어진 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^a\sqrt{2}\,e^t\,dt$$

$$=\sqrt{2}\,[e^t]_0^a$$

$$=\sqrt{2}\,(e^a-1)=4-\sqrt{2}$$

에서 $\sqrt{2}\,e^a=4$, 즉, $e^a=2\sqrt{2}$이므로

$a=\ln 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}\ln 2$