01

[풀이]

${}_8\mathrm{P}_2 = 8 \times 7 = 56$

답 ④

02

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+12x)}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+12x)}{12x} \times 4$

$= \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+12x)^{\frac{1}{12x}} \times 4$

$= \lim\limits_{t \to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \times 4$

($t = 12x$로 두면 $t \to 0$이다.)

$= (\ln e) \times 4 = 1 \times 4 = 4$

답 ④

03

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3e^{3x-2}$

$\therefore\ f'(1) = 3e$

답 ③

04

[풀이]

차집합의 성질에 의하여

$A \cap B^C = A - B = A - (A \cap B)$

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$

드모르간의 법칙에 의하여

$A^C \cup B = (A \cap B^C)^C$

여사건의 확률의 정의에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B^C)$

$= 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

답 ②

05

[풀이]

문제에서 주어진 쌍곡선의 두 초점을 각각

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$

으로 두자. (단, $c > 0$)

$c = \sqrt{a^2 + 36} = 3\sqrt{6}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore\ a^2 = 18$

답 ③

06

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 2\sec^2 2x + 3\cos x$

함수 $f(x)$는 $x = \pi$에서 미분가능하므로

미분계수의 정의에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{2h} \times 2$

$= 2f'(\pi) = 2(2-3) = -2$

답 ①

[참고]

$f(\pi) = 0$이므로

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left\{ \dfrac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} + \dfrac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h} \right\}$

$= f'(\pi) + f'(\pi) = 2f'(\pi)$

07

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\dfrac{27}{9^x} = \dfrac{3^3}{3^{2x}} = 3^{3-2x}$

이므로 문제에서 주어진 부등식은

$3^{3-2x} \geq 3^{x-9}$

밑이 1보다 크므로

$3 - 2x \geq x - 9$

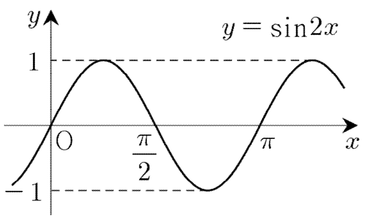
풀면

$x \leq 4$

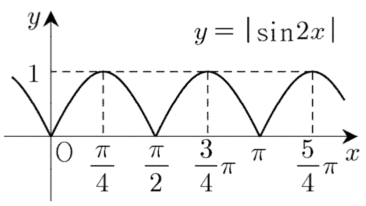
자연수 x는 1, 2, 3, 4이다.
따라서 문제에서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는 4이다.
답 ④

08

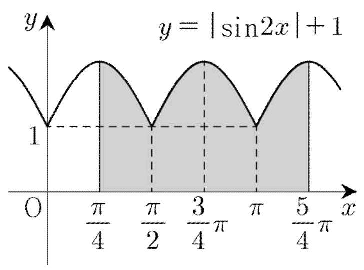
[풀이1]
실수 전체의 집합에서 $-1 \le \sin 2x \le 1$이므로
함수 $y=\sin 2x$의 치역은
$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.
실수 전체의 집합에서
$\sin 2x = \sin(2x+2\pi) = \sin 2(x+\pi)$
이므로 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.
함수 $y=\sin 2x$의 그래프는



함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는



함수 $y=|\sin 2x|+1$의 그래프는



곡선 $y=|\sin 2x|+1$은 두 직선
$x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{4}\pi$
각각에 대하여 대칭이므로 네 적분구간
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$
각각에서의 함수 $y=|\sin 2x|+1$의 정적분 값은 모두 같다.
따라서 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{4}\right)=2+\pi$$

답 ③

[참고1]
문제에서 주어진 곡선이 가진 직선에 대한 대칭성을 이용하지 않아도 넓이를 구할 수 있다.

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{|\sin 2x|+1\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin 2x+1)dx$$

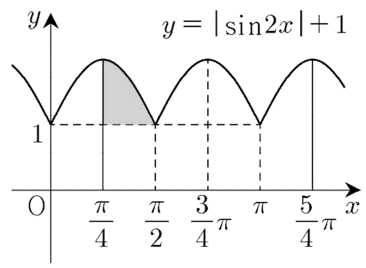
$$+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin 2x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

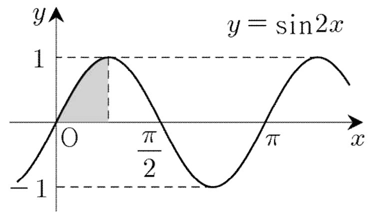
$$+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+1+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=2+\pi$$

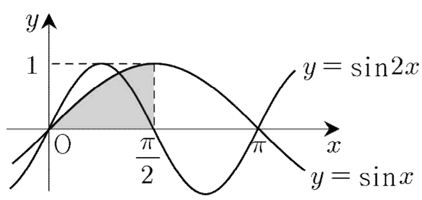
[참고2]
도형의 닮음비를 이용하여 넓이를 구해도 좋다.



[그림1]



[그림2]



[그림3]

[그림1]과 [그림2]에서 색칠된 도형의 넓이는 같다.

($\because$ 평행이동과 대칭이동을 해도 도형의 넓이는 변함이 없다.)
[그림3]에서 색칠된 도형의 넓이는 [그림2]에서 색칠된 도형의 넓이의 2배이다. 왜냐하면 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축 방향으로 2배 축소한 것이기 때문이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$이므로 [그림1]에서 색칠된 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \ S = 4\times\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\times 1 = 2+\pi$

09

[풀이]
점 $(a,\ b)$가 문제에서 주어진 곡선 위에 있으므로
$e^a - e^b = b \qquad \cdots ㉠$
음함수의 미분법에 의하여
$e^x - e^y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$
문제에서 주어진 곡선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 1이므로
$e^a - e^b \times 1 = 1$ 즉, $e^a - e^b = 1 \qquad \cdots ㉡$
㉠$-$㉡을 하여 정리하면 $b=1$
이를 ㉠에 대입하여 정리하면
$a = \ln(e+1)$
$\therefore \ a+b = 1+\ln(e+1)$
답 ①

10

[풀이1]
근무조 A와 근무조 B에서 적어도 1명씩의 귀가도우미를 선택할 경우를 아래의 표와 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

A	B	
~~3명~~	~~0명~~	
2명	1명	←경우1
1명	2명	←경우2
~~0명~~	~~3명~~	

(경우1) 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5C_2 \times {}_4C_1 = 40$
(경우2) 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$

따라서 수학적 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은
$\frac{40+30}{{}_9C_3} = \frac{70}{12\times 7} = \frac{5}{6}$
이때, ${}_9C_3$은 9명의 경찰관 중에서 3명의 귀가도우미를 선택하는 조합의 수이다.
답 ⑤

[풀이2]
여사건의 확률의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수도 있다.
근무조 A 또는 근무조 B에서만 귀가도우미를 선택할 경우를 아래의 표와 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

A	B	
3명	0명	←경우3
2명	1명	
1명	2명	
0명	3명	←경우4

(경우3) 조합의 수에 의하여 경우의 수는
${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
(경우4) 조합의 수에 의하여 경우의 수는
${}_4C_3 = 4$
따라서 수학적 확률의 정의와 여사건의 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은
$1-\frac{10+4}{{}_9C_3} = 1-\frac{14}{12\times 7} = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
이때, ${}_9C_3$은 9명의 경찰관 중에서 3명의 귀가도우미를 선택하는 조합의 수이다.
답 ⑤

11

[풀이]
$x^2-1=t$로 두면 $2xdx = dt$이고,
$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이다.
정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} xx^2\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

답 ②

12

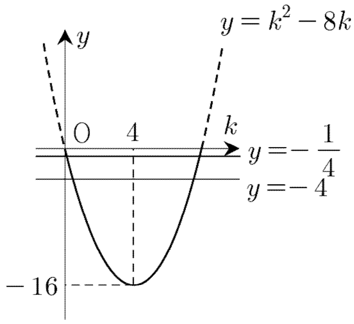
[풀이]
문제에서 주어진 함수의 도함수는
$y'=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}(=\frac{dy}{dx})$
곡선의 길이를 l이라고 하자.
$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$
$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\frac{1}{16}e^{4x}-\frac{1}{2}+e^{-4x}}dx$
$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{16}e^{4x}+\frac{1}{2}+e^{-4x}}dx$
$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}dx$
$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$
($\because$ 산술기하절대부등식에 의하여
$\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\geq 1>0$)
$=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$
($\because$ 정적분의 치환적분법)
$=\frac{1}{8}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{8}\times 4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$
($\because$ 로그의 정의와 성질)
$=\frac{3}{4}$
답 ⑤

13

[풀이]
점 P의 속도는
$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(2+\sin t,\ -\cos t)$
점 P의 가속도는
$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(\cos t,\ \sin t)$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\vec{v}\cdot\vec{a}=(2+\sin t,\ -\cos t)\cdot(\cos t,\ \sin t)$
$=2\cos t+\sin t\cos t-\cos t\sin t=2\cos t=1$
즉, $\cos t=\frac{1}{2}$
풀면
$\therefore\ t=\frac{\pi}{3}$
답 ②

14

[풀이]
진수의 조건에 의하여
$0<x<8$ 즉, $0<k<8$
직선 $x=k$ 위의 두 점 A, B의 x좌표는 각각 k, k이므로
$\overline{AB}=|$두 점 A, B의 y좌표의 차$|$
즉, $|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$
로그의 성질에 의하여
$|\log_2 k(8-k)|=2$
$\log_2 k(8-k)=2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=-2$
로그의 정의에 의하여
$k(8-k)=2^2=4$ 또는 $k(8-k)=2^{-2}=\frac{1}{4}$
정리하면
$k^2-8k+4=0$(단, $0<k<8$) $\cdots$㉠
또는
$k^2-8k+\frac{1}{4}=0$(단, $0<k<8$) $\cdots$㉡
곡선 $y=k^2-8k$와 두 직선 $y=-4$, $y=-\frac{1}{4}$의 위치관계는 다음과 같다.



따라서 이차방정식 ㉠과 ㉡은 각각 서로 다른 두 실근을 가지며, ㉠의 해집합과 ㉡의 해집합의 교집합은 공집합이다. ㉠의 서로 다른 두 실근을 각각 k_1, $k_2(k_1<k_2)$, ㉡의 서로 다른 두 실근을 각각 k_3, $k_4(k_3<k_4)$라고 하면
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$k_1k_2=4$, $k_3k_4=\frac{1}{4}$
(단, $k_3<k_1<k_2<k_4$)
따라서 구하는 값은

$k_1k_2k_3k_4=4\times\dfrac{1}{4}=1$

답 ②

[참고1]
다음과 같이 이차방정식의 근의 분리를 해도 좋다.

$f(k)=k^2-8k+4$, $g(k)=k^2-8k+\dfrac{1}{4}$

로 두고, 이차방정식 ㉠과 ㉡의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하자.

(1) 이차방정식 ㉠의 근의 분리

판별식: $D_1/2=(-4)^2-4=12>0$

경계에서의 함숫값: $f(0)=f(8)=4$

대칭축: $x=-\dfrac{-8}{2\times1}=4$

따라서 이차방정식 ㉠은 구간 $(0,\ 8)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 ㉡의 근의 분리

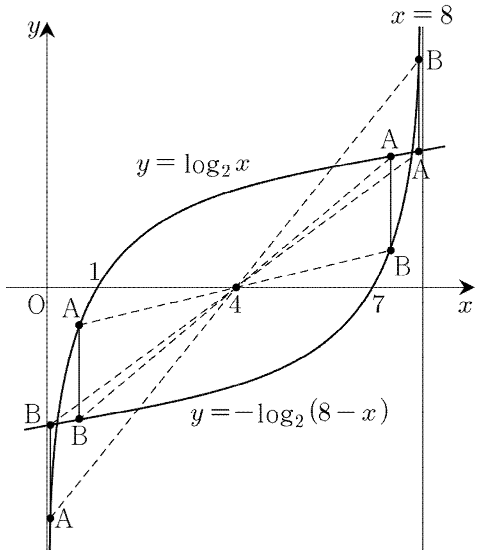
판별식: $D_2/2=(-4)^2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{63}{4}>0$

경계에서의 함숫값: $f(0)=f(8)=\dfrac{1}{4}$

대칭축: $x=-\dfrac{-8}{2\times1}=4$

따라서 이차방정식 ㉡은 구간 $(0,\ 8)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

[참고2]
서로 다른 k의 개수가 4임을 아래의 그림에서 확인할 수 있다.



15

[풀이]
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$F'(x)=f(x)$

미적분의 기본정리에 의하여

$\displaystyle\int_1^{x+1}f(t)dt=[F(t)]_1^{x+1}=F(x+1)-F(1)$

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x+1-1}$

$=1\times F'(1)=f(1)=-a=3$이므로 $a=-3$

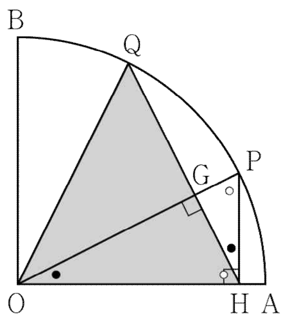
$\therefore\ f(a)=f(-3)=-3\cos(9\pi)$

$=-3\cos(2\pi\times4+\pi)=-3\cos\pi=3$

답 ⑤

16

[풀이1]
두 선분 OP, HQ의 교점을 G라고 하자.



(단, $\bullet=\theta$, $\circ=\dfrac{\pi}{2}-\theta$)

삼각형 POH의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{HPO}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 HPG의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{PGH}=\dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{HGO}=\pi-\angle\mathrm{PGH}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

두 선분 OP, HQ는 서로 수직으로 만난다.

직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$

직각삼각형 HPG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PG}}=\sin^2\theta$, $\overline{\mathrm{GH}}=\sin\theta\cos\theta$

직각삼각형 GOH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OG}}=\cos^2\theta$

(또는 다음의 방법으로 유도해도 좋다.

$\overline{\mathrm{OG}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{GP}}=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$)

직각삼각형 QOG에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{QG}}=\sqrt{1^2-\cos^4\theta}=\sqrt{(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta}=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

($\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$이다.)

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=(\triangle\mathrm{QOG}$의 넓이$)+(\triangle\mathrm{GOH}$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OG}}\,\overline{\mathrm{GQ}}+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OG}}\,\overline{\mathrm{GH}}$

$=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}+\cos\theta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos^2\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}+\cos\theta)}{2}$

$=1\times\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

답 ①

[참고]

$S(\theta)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

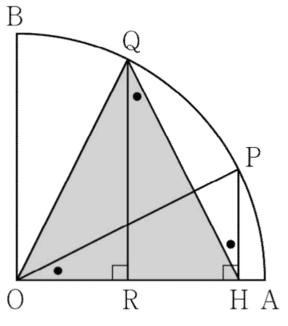
$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HO}}\,\overline{\mathrm{HQ}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})$

[풀이2]

점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 R, $\overline{\mathrm{QR}}=x$로 두자.



(단, $\bullet=\theta$)

두 직선 PH, QR이 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{HQR}=\theta=\angle\mathrm{QHP}$ (엇각)

직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$

직각삼각형 QRH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RH}}=x\tan\theta$

$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{RH}}=\cos\theta-x\tan\theta$

직각삼각형 QOR에서 피타고라스의 정리에 의하여

$1^2=(\cos\theta-x\tan\theta)^2+x^2$

정리하면

$(1+\tan^2\theta)x^2-2x\sin\theta-\sin^2\theta=0$

그런데 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$x^2\sec^2\theta-2x\sin\theta-\sin^2\theta=0$

양변에 $\cos^2\theta(\neq0)$를 곱하면

$x^2-2x\sin\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\sin\theta\cos^2\theta\pm\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta+1)}$

$=\sin\theta\cos\theta(\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+1})$

($\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이다.)

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,

$\sqrt{\cos^2\theta+1}>\cos\theta$이므로

$x=\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}\,\overline{\mathrm{QR}}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})}{2}$

$=1\times\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

답 ①

17

[풀이1]

문제에서 주어진 타원의 두 초점 중에서 $\mathrm{F}(c,\ 0)$가 아닌 점을 $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$라고 하자.

두 직각삼각형 BOF와 BOF′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}$

타원의 정의에 의하여

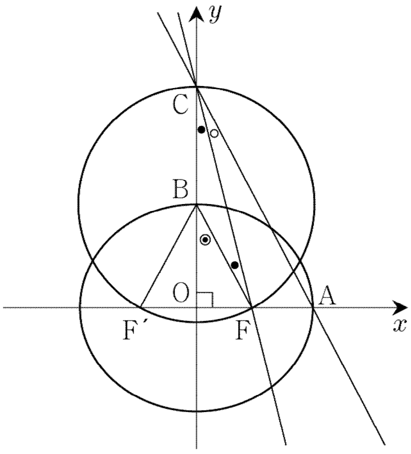
$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$

이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}=a$

문제에서 주어진 타원의 방정식에서

$c=\sqrt{a^2-b^2}$ $\cdots$ ㉠



(단, ○$=\theta$, ⦿$=2\times$●)

원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BF}}(=a)$이므로

삼각형 CBF는 이등변삼각형이다.

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{FCB}=\angle\mathrm{CFB}$

이므로

$\tan(\angle\mathrm{FCB})=\tan(\angle\mathrm{FCO})$

$=\dfrac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{CO}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{BO}}}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{4}$

양변을 제곱하면

$\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{16}$, $\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{16}$,

$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{1}{16}$

정리하면

$b=\dfrac{15}{17}a$ 즉, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{15}{17}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan\theta=\tan(\angle\mathrm{ACO}-\angle\mathrm{FCO})$

$=\dfrac{\tan(\angle\mathrm{ACO})-\tan(\angle\mathrm{FCO})}{1+\tan(\angle\mathrm{ACO})\tan(\angle\mathrm{FCO})}$

$=\dfrac{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{a}{4(a+b)}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}-\dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

$=\dfrac{36}{145}$

답 ①

[참고1] ※ 교육과정 외

$\dfrac{b}{a}$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다. (단, 교육과정 외에 해당하므로, 반드시 알아야 하는 것은 아니다.)

삼각함수의 배각의 공식에 의하여

$\tan(\angle\mathrm{FBO})=\tan(2\angle\mathrm{FCO})$

$=\dfrac{2\tan(\angle\mathrm{FCO})}{1-\tan^2(\angle\mathrm{FCO})}$

$=\dfrac{2\times\dfrac{1}{4}}{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{8}{15}$

직각삼각형 BOF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan(\angle\mathrm{FBO})=\dfrac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{BO}}}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\dfrac{8}{15}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{15}{17}$

[풀이2]

문제에서 주어진 타원의 두 초점 중에서 $\mathrm{F}(c,\ 0)$가 아닌 점을 $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$라고 하자.

두 직각삼각형 BOF와 BOF'에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$

이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}=a$

문제에서 주어진 타원의 방정식에서

$a^2=b^2+c^2$

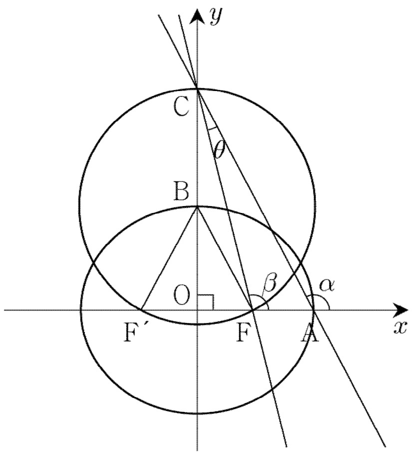
양변을 a^2으로 나누면

$1=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$

$\dfrac{b}{a}=s$, $\dfrac{c}{a}=t$로 두면

$s^2+t^2=1$ $\cdots$ ㉠

두 직선 CA, CF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BF}}(=a)$이므로 $\overline{\mathrm{CO}}=a+b$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\angle\mathrm{CFB})=\tan(\angle\mathrm{CFO}-\angle\mathrm{BFO})$

$$=\frac{\frac{a+b}{c}-\frac{b}{c}}{1+\frac{a+b}{c}\times\frac{b}{c}}=\frac{\frac{1}{\frac{c}{a}}}{1+\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\times\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1+s}{t}\times\frac{s}{t}}=\frac{1}{4}$$

정리하면

$4t-s=1(\because ㉠)$ $\cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 연립하면

$(4t-1)^2+t^2=1$, $17t^2-8t=0$,

$t(17t-8)=0$ 풀면 $t=\frac{8}{17}$

이를 ㉡에 대입하면 $s=\frac{15}{17}$

삼각비의 정의에 의하여

$\tan\alpha=\tan(\pi-\angle\mathrm{CAO})$

$=-\tan(\angle\mathrm{CAO})=-\frac{a+b}{a}$

$\tan\beta=\tan(\pi-\angle\mathrm{CFO})$

$=-\tan(\angle\mathrm{CFO})=-\frac{a+b}{c}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{c}}{1+\frac{(a+b)^2}{ac}}=\frac{-1-\frac{b}{a}+\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}}{1+\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{-1-s+\frac{1+s}{t}}{1+\frac{(1+s)^2}{t}}=\frac{\frac{(1+s)(1-t)}{t}}{1+\frac{(1+s)^2}{t}}$$

$=\frac{4(1-t)}{1+16t}(\because ㉡)$

$=\frac{36}{145}$

답 ①

[참고2]

등식 $a^2=b^2+c^2$을 $\left(\frac{a}{b}\right)^2=1+\left(\frac{c}{b}\right)^2$으로 변형하고,

$s=\frac{a}{b}$, $t=\frac{c}{b}$로 치환해도 좋다.

등식 $a^2=b^2+c^2$을 $\left(\frac{a}{c}\right)^2=\left(\frac{b}{c}\right)^2+1$로 변형하고,

$s=\frac{a}{c}$, $t=\frac{b}{c}$로 치환해도 좋다.

18

[풀이]

x좌표가 모두 0인 두 점 A, B는 y축 위에 있다.

6 이하의 자연수 m, n에 대하여

$m\neq 0$이고,

$\cos\frac{n\pi}{3}\neq 0$이므로

$(\because \frac{n\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}, \frac{n\pi}{3}\neq\frac{3\pi}{2})$

(점 C의 x좌표)$=m\cos\frac{n\pi}{3}\neq 0$

즉, 점 C는 y축 위에 있지 않다.

세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로

6 이하의 자연수 m, n에 대하여 항상 삼각형 ABC가 결정된다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times|$점 C의 x좌표$|$

$=4\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|<12$

정리하면

$$\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right| < 3 \qquad \cdots(*)$$

n의 값이 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때,

$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값은 각각

$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1

이다.

n	부등식 (*)	m
1, 2, 4, 5	$\frac{m}{2} < 3$	1, 2, 3, 4, 5
3, 6	$m < 3$	1, 2

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 순서쌍 (m, n)의 개수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$4\times5+2\times2=24$

따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$\frac{24}{6^2}=\frac{2}{3}$

답 ④

[참고]

다음과 같이 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해도 좋다.

n의 값이 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때,

$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값은 각각

$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1

이다.

m	부등식 (*)	n
1	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert \le 1 < 3$	1, 2, 3, 4, 5, 6
2	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert \le 1 < \frac{3}{2}$	1, 2, 3, 4, 5, 6
3	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert \le \frac{1}{2} < 1$	1, 2, 4, 5
4	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert \le \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$	1, 2, 4, 5
5	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert \le \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$	1, 2, 4, 5
6	$\left\lvert\cos\frac{n\pi}{3}\right\rvert < \frac{1}{2}$	×

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 순서쌍 (m, n)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$6+6+4+4+4=24$이다.

19

[풀이1]

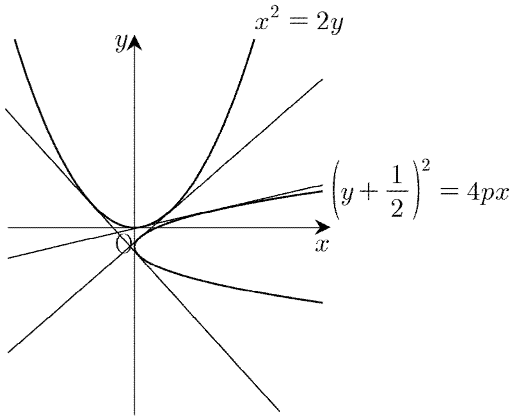
p의 절댓값 $|p|$의 값이 클수록 포물선

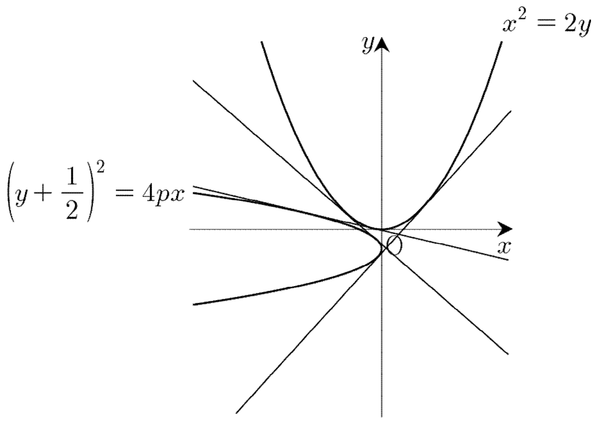
$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4px$$

의 폭은 넓어진다.

문제에서 주어진 두 포물선의 위치 관계는 다음과 같이 세 경우로 구분할 수 있다.

(경우1) 만나지 않는 경우

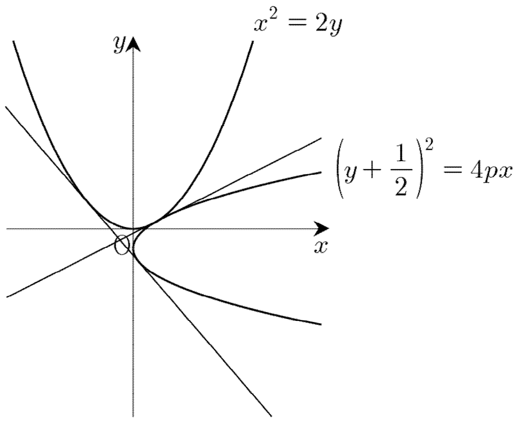


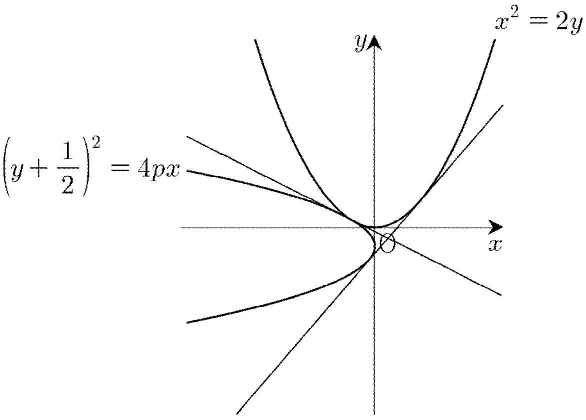


(단, 위는 p가 양수, 아래는 p가 음수)

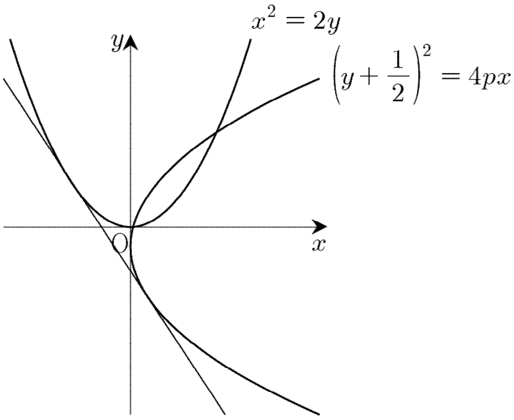
두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 3이다.

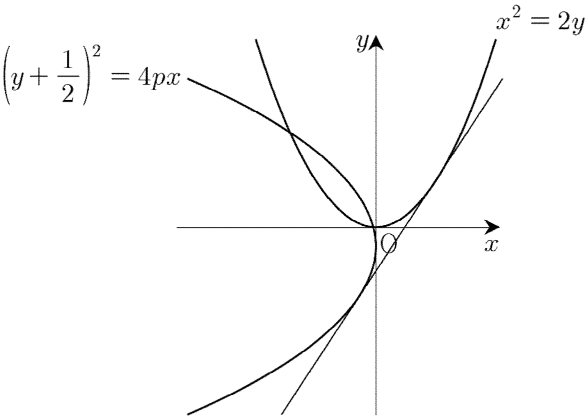
(경우2) 오직 한 점에서만 만나는 경우



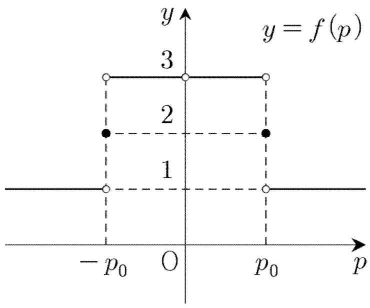


(단, 위는 p가 양수, 아래는 p가 음수)
두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 2이다.
(경우3) 서로 다른 두 점에서 만나는 경우





(단, 위는 p가 양수, 아래는 p가 음수)
두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 1이다.
(경우2)를 만족시키는 p 중에서 양수를 p_0라고 하자.
함수 $f(p)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\lim_{p\to -p_0+} f(p)=3>2=f(-p_0)$$

이고, $k\neq -p_0$일 때 문제에서 주어진 부등식은 성립하지 않으므로 $k=-p_0$이다.
이제 (경우2)에서 $p=-p_0$일 때, 두 포물선이 동시에 접하는 접선의 접점을 $(x_0,\ y_0)$이라고 하자. (단, $x_0<0$, $y_0>0$)
점 $(x_0,\ y_0)$은 두 포물선 위에 있으므로

$$x_0^2=2y_0 \qquad \cdots ㉠$$

$$\left(y_0+\frac{1}{2}\right)^2=-4p_0x_0 \qquad \cdots ㉡$$

음함수의 미분법을 이용하여 두 포물선 각각에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하자.

$2x=2\frac{dy}{dx}$에서 $\frac{dy}{dx}=x$

$2\left(y+\frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx}=-4p_0$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2p_0}{y+\frac{1}{2}}$

두 포물선 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서 각각 그은 두 접선의 기울기는 같으므로

$$x_0=-\frac{2p_0}{y_0+\frac{1}{2}} \qquad \cdots ㉢$$

㉢의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(y_0+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4p_0^2}{x_0^2}$$

이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{4p_0^2}{x_0^2}=-4p_0x_0$$

정리하면

$$x_0^3=-p_0$$

이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$$y_0+\frac{1}{2}=2x_0^2$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y_0=\frac{1}{6}$, $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ k=-p_0=x_0^3=-\frac{\sqrt{3}}{9}$

답 ③

[풀이2]

포물선 $x^2=2y$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

$x_0x=2\times\frac{y+y_0}{2}$

즉, $y=x_0x-\frac{1}{2}x_0^2(\because x_0^2=2y_0)$ $\cdots$ ㉠

이 직선이 포물선

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4px$ $\cdots$ ㉡

에 접한다고 하자.

㉠과 ㉡의 방정식을 연립하면

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4p\left(\frac{y}{x_0}+\frac{x_0}{2}\right)$

각 변을 전개하여 정리하면

$y^2+\left(1-\frac{4p}{x_0}\right)y+\frac{1}{4}-2px_0=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하자.

$D=\left(1-\frac{4p}{x_0}\right)^2-4\left(\frac{1}{4}-2px_0\right)=0$

정리하면

$x_0^3-x_0+2p=0$ (단, $p\neq 0$, $x_0\neq 0$)

만약 $x_0=0$이면 $y_0=0$이고, 포물선 $x^2=2y$ 위의 원점에서 그은 접선은 x축이다. 그런데 x축은 포물선 ㉡이 접선이 될 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $x_0\neq 0$인 것이다.

이제 곡선 $y=x_0^3-x_0$와 직선 $y=-2p$의 위치관계를 생각하자.

함수 $y=x_0^3-x_0$의 도함수는

$y'=3x_0^2-1=3\left(x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x_0-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

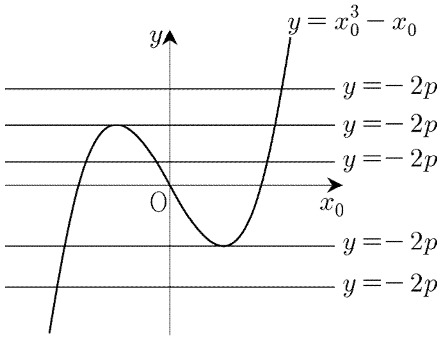
방정식 $y'=0$을 풀면

$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $y=x_0^3-x_0$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x_0	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 극대	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 극소	↗

함수 $y=x_0^3-x_0$의 그래프는 다음과 같다.



$-2p>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 또는 $-2p<-\frac{2\sqrt{3}}{9}$일 때,

$f(p)=1$

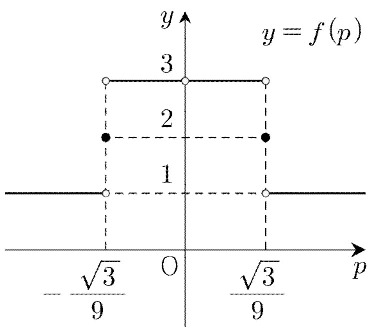
$-2p=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 또는 $-2p=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$일 때,

$f(p)=2$

$-\frac{2\sqrt{3}}{9}<-2p<\frac{2\sqrt{3}}{9}$일 때,

$f(p)=3$

이므로 함수 $f(p)$의 그래프는 다음과 같다.



$\lim_{p\to-\frac{\sqrt{3}}{9}+}f(p)=3>2=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

이고, $k\neq-\frac{\sqrt{3}}{9}$일 때 문제에서 주어진 부등식은 성립하지 않으므로 $k=-\frac{\sqrt{3}}{9}$이다.

답 ③

[참고1]

포물선 $x^2=2y$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식

을 유도하는 과정은 다음과 같다.

점 $(x_0,\ y_0)$은 포물선 $x^2=2y$ 위에 있으므로

$x_0^2=2y_0$

음함수의 미분법에 의하여

$2x=2\dfrac{dy}{dx}$ 즉, $\dfrac{dy}{dx}=x$

접선의 기울기는 x_0이므로 접선의 방정식은

$y=x_0(x-x_0)+y_0=x_0x-x_0^2+y_0$

정리하면

$y=x_0x-\dfrac{1}{2}x_0^2$

[참고2]

포물선 $x^2=2y$ 위의 접점의 x좌표와 상수 p 사이의 관계식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

문제에서 주어진 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 방정식을

$y=ax+b$ (단, $a\neq 0$) $\cdots(*)$

로 두자. ($\leftarrow y$축에 평행한 직선은 포물선 $x^2=2y$에 접하지 않으므로 제외한 것이다. 그리고 x축에 평행한 직선은 포물선 $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=4px$에 접하지 않으므로 $a\neq 0$으로 둔 것이다.)

두 포물선의 방정식과 직선 (*)의 방정식을 연립하면

$x^2=2(ax+b)$,

$\left(ax+b+\dfrac{1}{2}\right)^2=4px$

각각을 정리하면

$x^2-2ax-2b=0$, $\cdots$ ㉢

$a^2x^2+(2ab+a-4p)x+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2=0\cdots$ ㉣

두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하자.

$D_1/4=(-a)^2-(-2b)=0$

즉, $a^2+2b=0$ $\cdots$ ㉤

$D_2=(2ab+a-4p)^2-4a^2\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\left\{2a\left(b+\dfrac{1}{2}\right)-4p\right\}^2-4a^2\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=-16ap\left(b+\dfrac{1}{2}\right)+16p^2=0$

즉, $p=a\left(b+\dfrac{1}{2}\right)$ $\cdots$ ㉥

㉤을 ㉢에 대입하여 정리하면 $x=a$이고,

㉥을 ㉣에 대입하여 정리하면 $x=\dfrac{p}{a^2}$이다.

직선 $y=ax+b$가 두 포물선에 모두 접할 때,

포물선 $x^2=2y$ 위의 접점의 좌표는

$\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$이고,

포물선 $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=4px$ 위의 접점의 좌표는

$\left(\dfrac{p}{a^2},\ 2b+\dfrac{1}{2}\right)$이다.

㉤과 ㉥을 연립하면

$a^2+2\left(\dfrac{p}{a}-\dfrac{1}{2}\right)=0$

정리하면

$a^3-a=-2p$(단, $a\neq 0$, $p\neq 0$)

20

[풀이]

음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여

$c+d=2k$이어야 한다.

($\because c+d=2(n-a-b)$이고, $n-a-b$는 정수이다.)

$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.

($\because$ (짝수)+(짝수)=(짝수),

(짝수)+(홀수)=(홀수),

(홀수)+(홀수)=(짝수)

이므로, 두 정수의 합이 짝수이면 서로 합하는 두 정수는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.)

(1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우:

문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$a+b+k_1+k_2=n$

(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $k_1\geq 0$, $k_2\geq 0$)

방정식 $a+b+k_1+k_2=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_1, k_2의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ k_1,\ k_2)$의 개수는 a, b, k_1, k_2 중에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_n$와 같다. 그러므로 방정식 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_n}$이다.

이때, ${}_4\mathrm{H}_n={}_{4+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$이다.

(2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우:

문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$a+b+k_3+k_4=n-1$

(단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $k_3 \geq 0$, $k_4 \geq 0$)
방정식 $a+b+k_3+k_4=n-1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_3, k_4의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ k_3,\ k_4)$의 개수는 a, b, k_3, k_4 중에서 중복을 허용하여 $n-1$개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_{n-1}$와 같다. 그러므로 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}$이다.
이때, ${}_4\mathrm{H}_{n-1}={}_{4+n-1-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_3$이다.
(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수 a_n은

$$a_n=\boxed{{}_4\mathrm{H}_n}+\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}={}_{n+3}\mathrm{C}_3+{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m}\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}=\sum_{n=1}^{m}{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$
$$={}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_3={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{8}{}_4\mathrm{H}_n+\sum_{n=1}^{8}{}_4\mathrm{H}_{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{8}{}_{n+3}\mathrm{C}_3+\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$
$$=2\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3$$
$$=2\times{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3$$
$$=660+165-1$$
$$=\boxed{824}$$

이다.
(가): $f(n)={}_{n+3}\mathrm{C}_3$
(나): $g(n)={}_{n+2}\mathrm{C}_3$
(다): $r=824$
$\therefore\ f(6)+g(5)+r$
$={}_9\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+824=84+35+824=943$
답 ③

21

[풀이]

$x \neq \frac{\pi}{4}$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}6\sin^2 x\cos x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ -\sin x & \left(\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

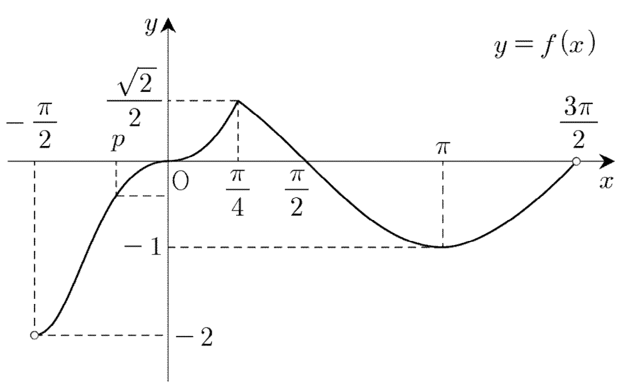
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=0$, $x=\pi$
$x \neq \frac{\pi}{4}$일 때, 함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\begin{cases}6\sin x(3\cos^2 x-1) & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

방정식 $f''(x)=0$을 풀면
$x=p$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$
(단, $-\frac{\pi}{2}<p<0$, $\cos p=\frac{\sqrt{3}}{3}$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	p	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	변곡점	↗	변곡점	↗
$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
극대, 변곡점	↘	변곡점	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x) \neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 미분가능하면
조건 (나)에서 주어진 함수의 도함수는

$$\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)' = \frac{(|f(x)-t|)'}{2\sqrt{|f(x)-t|}}$$

조건 (나)에서 주어진 함수의 $x=k$에서의 미분가능성을 표로 정리하자.

(단, $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$)

도함수의 분모	도함수의 분자	도함수	
(분모)$=0$ 또는 (분모)$\neq 0$	함수 $\|f(x)-t\|$의 $x=k$에서의 미분가능성	함수 $\sqrt{\|f(x)-t\|}$ 의 $x=k$에서의 미분가능성	
$f(k)=t$	○	?	…경우1
	×	×	…경우2
$f(k)\neq t$	○	○	…경우3
	×	×	…경우4

(단, ○는 미분가능, ×는 미분불가능)

(경우2), (경우3), (경우4)에 대한 증명은 각각 [참고2], [참고3], [참고4]이다.

(경우1)은 다음의 두 경우로 구분할 수 있다.

(1) $t=-1$, $k=\pi$인 경우

(2) $t=0$, $k=0$인 경우

각각에 대하여 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 의 $x=k$에서의 미분가능성을 판단하자.

(1) $t=-1$, $k=\pi$인 경우

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{|\cos x+1|}}{x-\pi}=\lim_{s\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos s}}{s}$$

($x-\pi=s$로 두면 $x\to\pi+$일 때, $s\to0+$)

$$=\lim_{s\to0+}\sqrt{\frac{1-\cos s}{s^2}}=\lim_{s\to0+}\sqrt{\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2\frac{1}{1+\cos s}}$$

$$=\sqrt{1^2\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{|\cos x+1|}}{x-\pi}=\lim_{s\to0-}\frac{\sqrt{1-\cos s}}{s}$$

($x-\pi=s$로 두면 $x\to\pi-$일 때, $s\to0-$)

$$=\lim_{s\to0-}-\sqrt{\frac{1-\cos s}{s^2}}=\lim_{s\to0-}-\sqrt{\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2\frac{1}{1+\cos s}}$$

$$=-\sqrt{1^2\times\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{|\cos x+1|}}{x-\pi}\neq\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{|\cos x+1|}}{x-\pi}$$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{|f(x)+1|}$ 는 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

(2) $t=0$, $k=0$인 경우

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|2\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to0+}\sqrt{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x}$$

$$=\sqrt{2\times1^2\times0}=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|2\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to0-}-\sqrt{-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x}$$

$$=-\sqrt{-2\times1^2\times0}=0$$

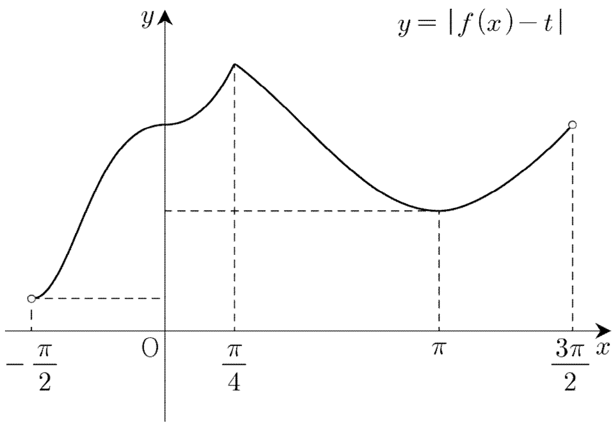
$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|2\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|2\sin^3 x|}}{x}$$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{|f(x)|}$ 는 $x=0$에서 미분가능하다.

이제 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 위치 관계에 따른 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 의 $x=k$에서의 미분가능성을 판단하자.

- $t\le2$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

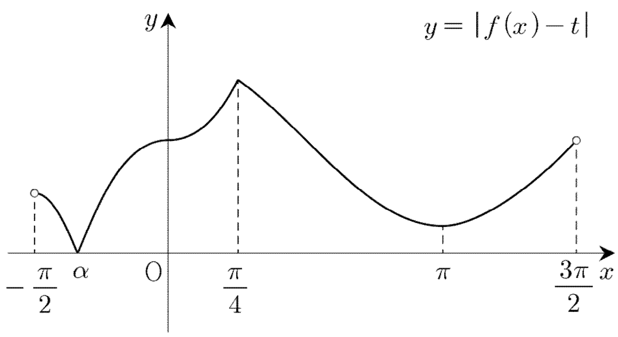
$x=\frac{\pi}{4}$(←경우4)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=1$

- $2<t<-1$

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $f(\alpha)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

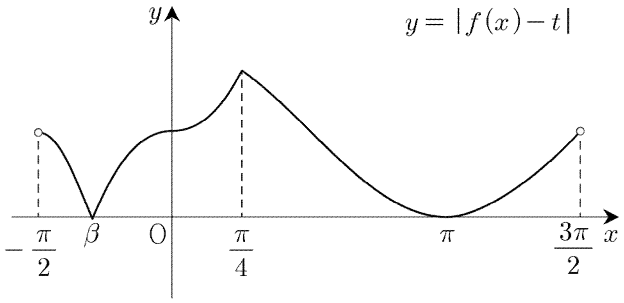
$x=\alpha(\leftarrow$경우2), $x=\dfrac{\pi}{4}(\leftarrow$경우4)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=2$

• $t=-1$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $f(\beta)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

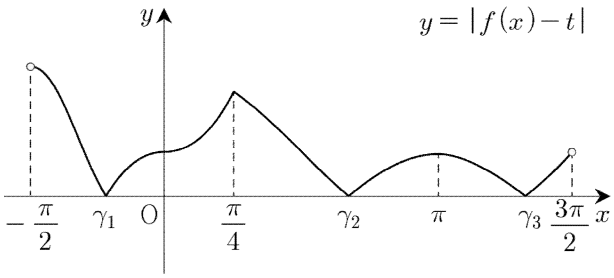
$x=\beta(\leftarrow$경우2), $x=\dfrac{\pi}{4}(\leftarrow$경우4), $x=\pi(\leftarrow$경우1)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=3$

• $-1<t<0$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $i=1,\ 2,\ 3$에 대하여 $f(\gamma_i)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

$x=\gamma_1(\leftarrow$경우2), $x=\dfrac{\pi}{4}(\leftarrow$경우4),

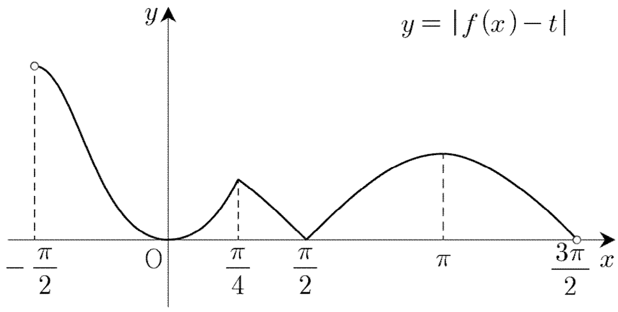
$x=\gamma_2(\leftarrow$경우2), $x=\gamma_3(\leftarrow$경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=4$

• $t=0$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

$x=\dfrac{\pi}{4}(\leftarrow$경우4), $x=\dfrac{\pi}{2}(\leftarrow$경우2)

에서 미분가능하지 않다.

반면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

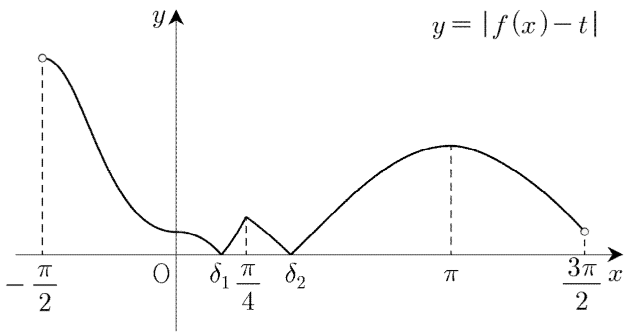
$x=0(\leftarrow$경우1)

에서 미분가능하다.

$\therefore\ g(t)=2$

• $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $i=1,\ 2$에 대하여 $f(\delta_i)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

$x=\delta_1(\leftarrow$경우2), $x=\dfrac{\pi}{4}(\leftarrow$경우4),

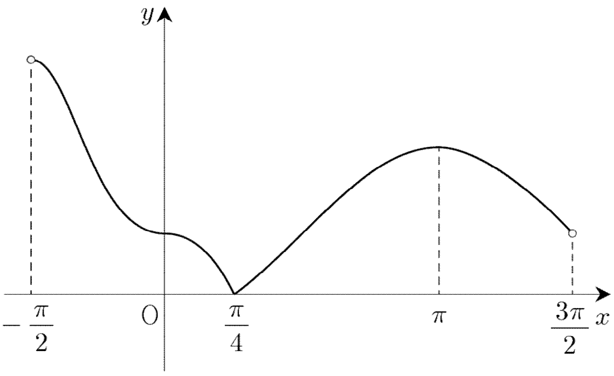
$x=\delta_2(\leftarrow$경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=3$

• $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

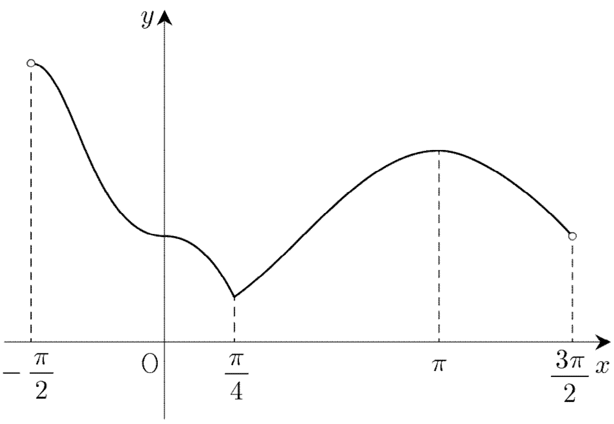
$x=\frac{\pi}{4}$ (←경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore \ g(t)=1$

• $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 경우

함수 $|f(x)-t|$ 의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

$x=\frac{\pi}{4}$ (←경우4)

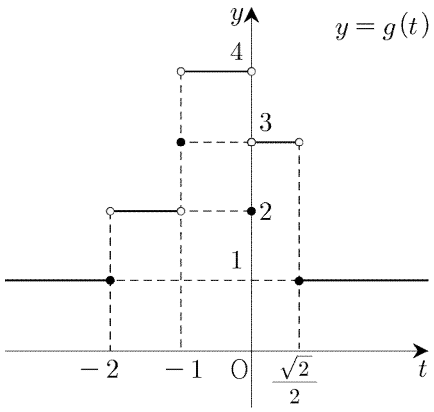
에서 미분가능하지 않다.

$\therefore \ g(t)=1$

이상에서 함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}1 & \left(t\le -2,\ t\ge \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 2 & (-2<t<-1,\ t=0)\\ 3 & \left(t=-1,\ 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 4 & (-1<t<0)\end{cases}$$

함수 $g(t)$의 그래프는



위의 그래프에서

$a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\ b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$

함수 $h(g(t))$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $h(g(t))$는

$t=-2,\ t=-1,\ t=0,\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

에서 연속이어야 한다.
함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{t\to -2+} h(g(t))=h(g(-2))$

즉, $h(2)=h(1)$

$\lim_{t\to -1+} h(g(t))=\lim_{t\to -1-} h(g(t))=h(g(-1))$

즉, $h(4)=h(2)=h(3)$

정리하면

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

$h(x)$는 사차함수이므로 인수정리에 의하여

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+d$

(단, d는 상수이다.)

(←함수 $h(x)$의 방정식을 결정하였으므로

$t=0,\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 함수 $h(g(t))$가 연속일 조건을 따져

줄 필요는 없다.)

$\therefore \ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=5\times4\times3\times2+d-4\times3\times2\times1-d+3$

$=(5-1)\times4\times3\times2+3=96+3=99$

답 ④

[참고1]

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 보여도 좋다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2\sin^3x-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$\times 2\left(\sin^2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\times 3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[참고2]

(경우2)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수 $|f(x)-t|$의 좌미분계수와 우미분계수는 각각 존재하지만, 서로 같지 않다.

$$\lim_{x\to k+}\frac{\sqrt{|f(x)-f(k)|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\sqrt{\left|\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\right|\times\frac{1}{x-k}}=\infty$$

($\because$ $\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$는 0이 아닌 상수에 수렴하지만, $\lim_{x\to k+}\frac{1}{x-k}=\infty$이기 때문이다.)

$$\lim_{x\to k-}\frac{\sqrt{|f(x)-f(k)|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}-\sqrt{\left|\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\right|\times\frac{1}{k-x}}=-\infty$$

($\because$ $\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$는 0이 아닌 상수에 수렴하지만, $\lim_{x\to k-}\frac{1}{k-x}=\infty$이기 때문이다.)

미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

[참고3]

(경우3)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to k}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k}\frac{|f(x)-t|-|f(k)-t|}{x-k}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{|f(x)-t|}+\sqrt{|f(k)-t|}}$$

$=$(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

따라서 $f(k)\neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 $x=k$에서 미분가능하면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하다.

[참고4]

(경우4)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수 $|f(x)-t|$의 좌미분계수와 우미분계수는 각각 존재하지만, 서로 같지 않다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to k+}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{|f(x)-t|-|f(k)-t|}{x-k}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{|f(x)-t|}+\sqrt{|f(k)-t|}}$$

$=$(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 우미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to k-}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

$=$(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 좌미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

만약 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=k$에서 미분가능하다고 하면 함수 $|f(x)-t|$은 $x=k$에서 미분가능하다. 이는 가정에 모순이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(k)\neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 $x=k$에서 미분가능하지 않으면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분

가능하지 않다.

[참고5]

$t=-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\pi$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|f(x)+1|}$

$=\sqrt{\cos x+1}$

두 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$, $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi-}(\sqrt{f(x)-t})'=\lim_{x\to\pi-}\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$$

$$=\lim_{t\to0-}\frac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}=\lim_{t\to0-}\frac{\frac{\sin t}{t}}{-2\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}}$$

($x-\pi=t$로 두면 $x\to\pi-$일 때, $t\to0-$)

$$=\frac{1}{-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi+}(\sqrt{f(x)-t})'=\lim_{x\to\pi+}\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\sin t}{t}}{2\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}}$$

($x-\pi=t$로 두면 $x\to\pi+$일 때, $t\to0+$)

$$=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[참고6]

$t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=0$에서 미분가능함을 다음과 같이 보일 수도 있다.

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|f(x)|}$

$$=\begin{cases}\sqrt{-2\sin^3x} & \left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\\ \sqrt{2\sin^3x} & \left(0\le x<\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\frac{-6\sin^2x\cos x}{2\sqrt{-2\sin^3x}}$$

$$=\frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{-2\sin x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{-\sin x}\ \cos x$$

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\frac{6\sin^2x\cos x}{2\sqrt{2\sin^3x}}$$

$$=\frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin x}\ \cos x$$

$\lim_{x\to0-}(\sqrt{f(x)-t})'=0$,

$\lim_{x\to0+}(\sqrt{f(x)-t})'=0$

따라서 $t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

[참고7]

$2<t<-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|f(x)-f(\alpha)|}$

$$=\begin{cases}\sqrt{2\sin^3\alpha-2\sin^3x} & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\alpha\right)\\ \sqrt{2\sin^3x-2\sin^3\alpha} & \left(\alpha\le x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{\cos x-2\sin^3\alpha} & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \alpha\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=(\sqrt{|f(x)-f(\alpha)|})'$

$$=\frac{-3\sin^2x\cos x}{\sqrt{2\sin^3\alpha-2\sin^3x}}$$

구간 $\left(\alpha,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=(\sqrt{|f(x)-f(\alpha)|})'$

$$=\frac{3\sin^2x\cos x}{\sqrt{2\sin^3x-2\sin^3\alpha}}$$

$\lim_{x\to\alpha-}(\sqrt{|f(x)-t|})'=-\infty$,

$\lim_{x\to\alpha+}(\sqrt{|f(x)-t|})'=\infty$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

마찬가지의 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$t=-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\gamma_1$에서 미분가능하지 않다.

$0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\delta_1$에서 미분가능하지 않다.

[참고8]

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\gamma_2$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\cos\gamma_2-2\sin^3x} & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\gamma_1\right)\\ \sqrt{2\sin^3x-\cos\gamma_2} & \left(\gamma_1\le x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{\cos x-\cos\gamma_2} & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\gamma_2\right)\\ \sqrt{\cos\gamma_2-\cos x} & (\gamma_2\le x<\gamma_3)\\ \sqrt{\cos x-\cos\gamma_2} & \left(\gamma_3\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \gamma_2\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\left(\sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|}\right)'$$

$$=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x-\cos\gamma_2}}$$

구간 $(\gamma_2,\ \gamma_3)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\left(\sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|}\right)'$$

$$=\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos\gamma_2-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\gamma_2-}\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\gamma_2+}\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\infty$$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\gamma_2$에서 미분가능하지 않다.

마찬가지의 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\gamma_3$에서 미분가능하지 않다.

$t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 미분가능하지 않다.

$0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\delta_2$에서 미분가능하지 않다.

[참고9]

$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{\left|f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sin^3x} & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x} & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\frac{-3\sin^2x\cos x}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sin^3x}}$$

구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\frac{\sin x}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)'=\infty$$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

[참고10]

함수 $h(g(t))$가 $t=0,\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 연속일 조건은 다음과 같다.

$$\lim_{t\to0+}h(g(t))=\lim_{t\to0-}h(g(t))=h(g(0))$$

즉, $h(3)=h(4)=h(2)$

$$\lim_{t\to\frac{\sqrt{2}}{2}-}h(g(t))=h\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

즉, $h(3)=h(1)$

22

[풀이]

평면벡터의 성분에 의한 연산을 하면

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 4)+(2,\ 6)=(4,\ 10)$

따라서 구하는 값은 $4+10=14$이다.
답 14

23

[풀이]

$\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=49$

답 49

24

[풀이]

$11=3+3+3+1+1$
$=3+3+5$
$=3+3+1+1+1+1+1$
따라서 방법의 수는 3이다.
(즉, 자연수 5를 홀수인 자연수로 분할하는 수와 같다.)
답 3

25

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=15e^{5x}+1+\cos x$
곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$g(3)=0$
역함수의 성질에 의하여
$f(0)=3$
역함수의 미분법에 의하여
$f'(0)\times g'(3)=1$
함수의 극한에 대한 성질, 미분계수의 정의, 역함수의 미분법에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}}$$

$$=\frac{1}{g'(3)}=f'(0)=17$$

답 17

26

[풀이1]
문제에서 주어진 함수의 도함수는

$$y'=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}\ (\because\ \text{몫의 미분법})$$

문제에서 주어진 함수의 이계도함수는

$$y''=\frac{-4(x^2+b)^2+4x\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}$$

$$=\frac{-4(x^2+b)+16x^2}{(x^2+b)^3}\ (\because\ \text{몫의 미분법})$$

점 $(2,\ a)$가 문제에서 주어진 곡선의 변곡점이므로

$$y''|_{x=2}=\frac{-4(4+b)+64}{(4+b)^3}=0\ \text{ 풀면 } b=12$$

점 $(2,\ a)$는 문제에서 주어진 곡선 위에 있으므로

$$a=\frac{2}{4+b}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=96$$

답 96

[풀이2]
문제에서 주어진 함수를 다음과 같이 두자.

$$f(x)=\frac{2}{x^2+b}$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}=-x\{f(x)\}^2$$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=-\{f(x)\}^2-2xf(x)f'(x)$
$=-\{f(x)\}^2+2x^2\{f(x)\}^3$
점 $(2,\ a)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로
$f''(2)=-\{f(2)\}^2+8\{f(2)\}^3=0$
그런데 $f(2)\neq 0$이므로

$$f(2)=\frac{1}{8}\ \text{ 즉, } f(2)=\frac{2}{4+b}=\frac{1}{8}$$

풀면 $b=12$
점 $(2,\ a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2)=a=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=96$$

답 96

27

[풀이1]
(1) a가 네 번 나오는 경우
$aaaa$
경우의 수는 1이다.
(2) a가 세 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_4C_1 = 4$이다. (아래)

$aaa○$, $aa○a$, $a○aa$, $○aaa$

각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 2이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$이다.

(3) a가 두 번 나오는 경우

a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2 = 6$이다. (아래)

$aa○○$, $a○a○$, $a○○a$,

$○aa○$, $○a○a$, $○○aa$

각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$이다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1 + 8 + 24 = 33$

답 33

[참고1]

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (2), (3)의 경우의 수를 구할 수도 있다.

(2)

a, a, a, b: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

a, a, a, c: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4 + 4 = 8$이다.

(3)

a, a, b, b: $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

a, a, b, c: $\dfrac{4!}{2!} = 12$

a, a, c, c: $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6 + 12 + 6 = 24$이다.

[풀이2]

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$이다.

(1) a가 한 번 나오는 경우

a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1 = 4$이다. (아래)

$a○○○$, $○a○○$, $○○a○$, $○○○a$

각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4 \times 8 = 32$이다.

(2) a가 나오지 않는 경우

○○○○

○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$81 - (32 + 16) = 33$

답 33

[참고2]

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (1), (2)의 경우의 수를 구할 수도 있다.

(1)

a, b, b, b: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

a, b, b, c: $\dfrac{4!}{2!} = 12$

a, b, c, c: $\dfrac{4!}{2!} = 12$

a, c, c, c: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

합의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4 + 12 + 12 + 4 = 32$이다.

(2)

b, b, b, b: 1

b, b, b, c: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

b, b, c, c: $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

b, c, c, c: $\dfrac{4!}{3!} = 4$

c, c, c, c: 1

합의 법칙에 의하여 경우의 수는

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$이다.

28

[풀이1]

b가 3의 배수이므로 n을 다음과 같이 세 경우로 구분하자.

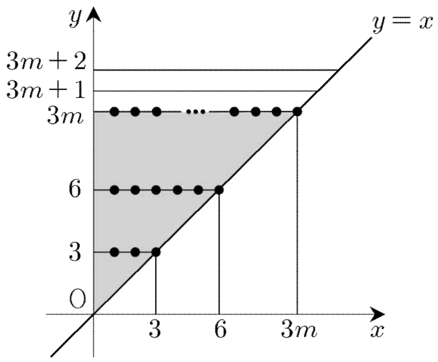
$n = 3m$, $n = 3m + 1$, $n = 3m + 2$

(단, m은 자연수이다.)

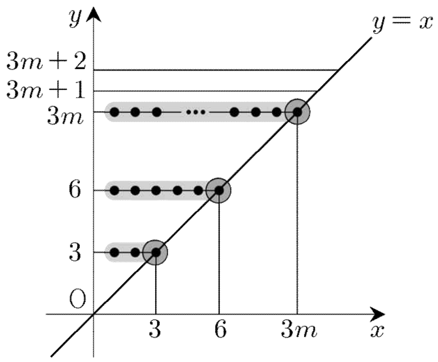
(1) $n = 3m$인 경우

집합 A에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타

내면 다음과 같다.



색칠된 영역에 속하는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고, y좌표가 3의 배수인 점만을 모두 나타내면 다음과 같다.



조건부 확률의 정의에 의하여

$$\frac{\frac{3m}{3}}{3+6+\cdots+3m}=\frac{1}{9}$$

연속된 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\frac{m}{3(1+2+\cdots+m)}$$

$$=\frac{m}{3\times\frac{m(m+1)}{2}}$$

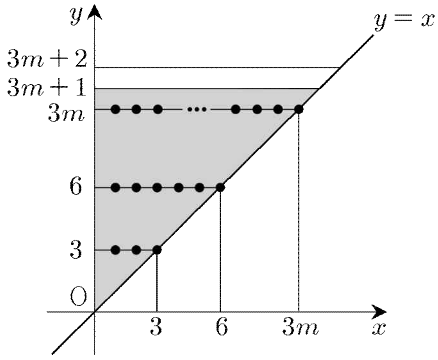
$$=\frac{2}{3(m+1)}=\frac{1}{9}$$

풀면

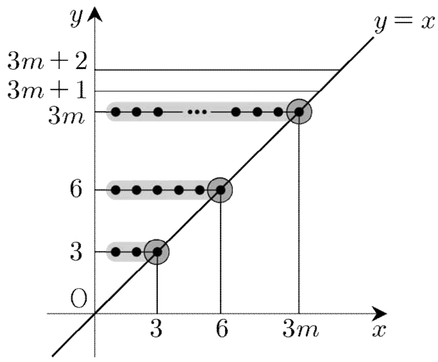
$m=5$이므로 $n=15$이다.

(2) $n=3m+1$인 경우

집합 A에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



색칠된 영역에 속하는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고, y좌표가 3의 배수인 점만을 모두 나타내면 다음과 같다.



조건부 확률의 정의에 의하여

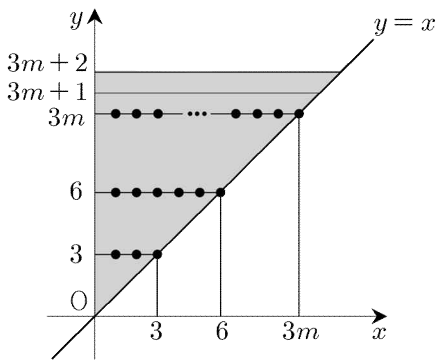
$$\frac{\frac{3m}{3}}{3+6+\cdots+3m}=\frac{1}{9}$$

(1)과 마찬가지의 방법으로

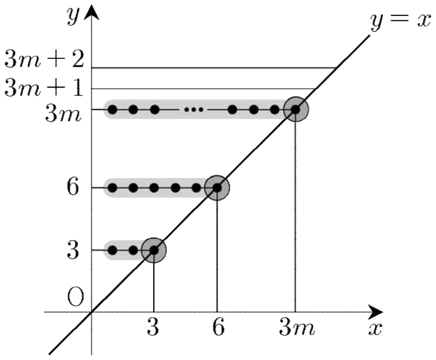
$m=5$이므로 $n=16$이다.

(3) $n=3m+2$인 경우

집합 A에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



색칠된 영역에 속하는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고, y좌표가 3의 배수인 점만을 모두 나타내면 다음과 같다.



조건부 확률의 정의에 의하여

$$\frac{\frac{3m}{3}}{3+6+\cdots+3m}=\frac{1}{9}$$

(1)과 마찬가지의 방법으로

$m=5$이므로 $n=17$이다.

(1), (2), (3)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$15+16+17=48$이다.

답 48

[풀이2]

점 $(a,\ b)$는 집합 A의 원소이므로

$0 \le a \le b \le n$ $\cdots(*)$

(단, a와 b는 자연수)

b는 3의 배수이므로

$b=3k$(단, k는 자연수)

으로 두자. 이를 (*)에 대입하면

$0 \le a \le 3k \le n$

a가 가질 수 있는 값은

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 3k$

이에 대응되는 점 $(a,\ b)$는 각각

$(1,\ 3k),\ (2,\ 3k),\ (3,\ 3k),\ \cdots,$

$(3k,\ 3k)$

이때, 점 $(a,\ b)$의 개수는 $3k$이고,

$a=b$인 점 $(a,\ b)$의 개수는 1이다.

이제 n을 다음과 같이 세 경우로 구분하자.

$n=3m,\ n=3m+1,\ n=3m+2$

(단, m은 자연수이다.)

(1) $n=3m$인 경우

이를 (*)에 대입하면

$0 \le a \le 3k \le 3m$

k는 m 이하의 자연수이므로

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\frac{1\times m}{\sum_{k=1}^{m}3k}=\frac{m}{3\times\frac{m(m+1)}{2}}=\frac{1}{9}$$

풀면

$m=5$이므로 $n=15$

(2) $n=3m+1$인 경우

$0 \le a \le 3k \le 3m+1$

k는 m 이하의 자연수이므로

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\frac{1\times m}{\sum_{k=1}^{m}3k}=\frac{m}{3\times\frac{m(m+1)}{2}}=\frac{1}{9}$$

풀면

$m=5$이므로 $n=16$

(3) $n=3m+2$인 경우

$0 \le a \le 3k \le 3m+2$

k는 m 이하의 자연수이므로

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\frac{1\times m}{\sum_{k=1}^{m}3k}=\frac{m}{3\times\frac{m(m+1)}{2}}=\frac{1}{9}$$

풀면

$m=5$이므로 $n=17$

(1), (2), (3)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

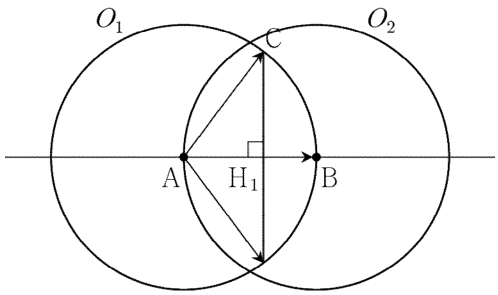
$15+16+17=48$이다.

답 48

29

[풀이1]

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하자.



조건 (가)에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos(\angle CAB)=\frac{\overline{AH_1}}{\overline{CA}}=\frac{3}{5}$ $\cdots㉠$

원의 정의에서 $\overline{AC}=5$이므로

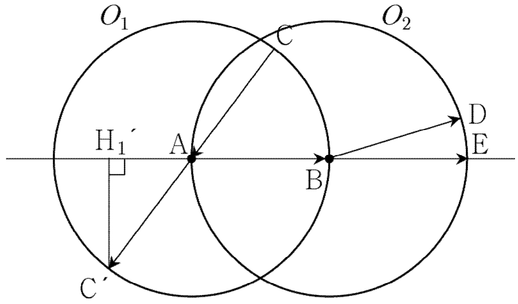
$\overline{AH_1}=3$

직각삼각형 CAH_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{CH_1}=4$ $\cdots㉡$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 원 O_1 위의 점 C는 2개다. 이 중에서 한 점을 위의 그림처럼 C라고 하자. (다른 한 점을 C라고 해도 동일한 결과를 얻는다.)

직선 AC가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서 점 C가 아닌 점을 C′, 점 C′에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}'$라고 하자. 그리고 직선 AB가 원 O_2와 만나는 두 점 중에서 점 A가 아닌 점을 E라고 하자.



조건 (나)에서 주어진 등식을 변형하자.
벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=5\times5\times\cos(\pi-\angle\mathrm{CAB})$$
$$+5\times5+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=5\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)+5\times5+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=30$$

(※ 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$을 다음과 같이 계산해도 좋다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH_1'}}=-5\times3=-15)$$

정리하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=20$$

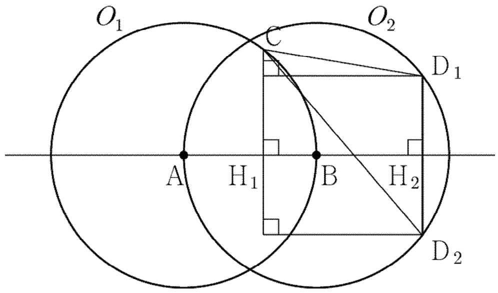
벡터의 내적의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=5\times5\times\cos(\angle\mathrm{DBE})=20$$

정리하면

$$\cos(\angle\mathrm{DBE})=\frac{4}{5}$$

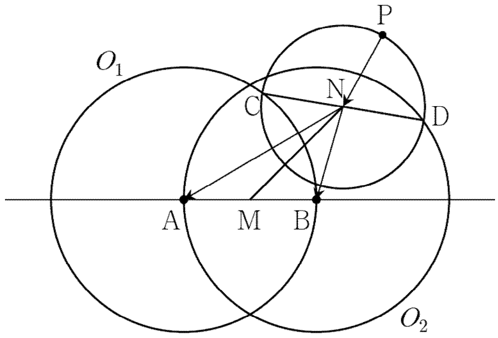
이를 만족시키는 원 O_2 위의 점 D는 2개다. 이 두 점을 각각 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$라 하고, 점 $\mathrm{D_1}$에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자. 이때, 점 $\mathrm{D_2}$에서 직선 AB에 내린 수선의 발은 $\mathrm{H_2}$이다.



피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD_1}}=\sqrt{(4+2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{37}<9$$
$$\overline{\mathrm{CD_2}}=\sqrt{(4+2)^2+(4+3)^2}=\sqrt{85}>9$$

이므로 조건 (나)를 만족시키는 점 D는 점 $\mathrm{D_1}$뿐이다.
이제 점 $\mathrm{D_1}$을 점 D라고 하자.
두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라고 하자.



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}}+\overrightarrow{\mathrm{NA}},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}$$

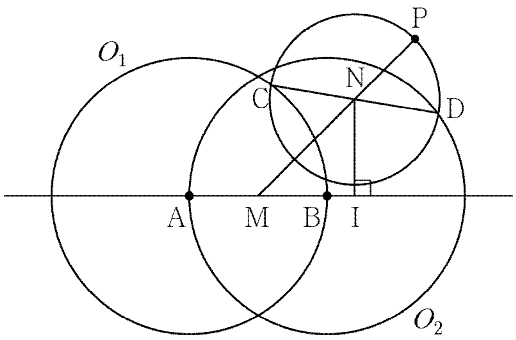
벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PN}}+\overrightarrow{\mathrm{NA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PN}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{NA}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}}{2}+\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}$$
$$=\underbrace{|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}}_{\text{변하지 않는 값}}+\underbrace{2\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NM}}}_{\text{변하는 값}}$$

(∵ 벡터의 내분점에 대한 공식에 의하여

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{NA}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{NM}})$$
$$\le|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NM}}$$

(단, 등호는 세 점 M, N, P가 이 순서대로 일직선 위에 있을 때 성립한다.)
다시 말하면 아래 그림과 같이 세 점 M, N, P가 이 순서대로 일직선 위에 있을 때, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$은 최댓값을 갖는다.
점 N에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



점 I는 선분 H_1H_2의 중점이므로

$\overline{H_1I}=\frac{\overline{H_1B}+\overline{BH_2}}{2}=\frac{2+4}{2}=3$

세 선분 $\overline{BI}$, $\overline{MI}$, $\overline{NI}$의 길이는 각각

$\overline{BI}=\overline{H_1I}-\overline{H_1B}=3-2=1$

$\overline{MI}=\overline{MB}+\overline{BI}=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$

$\overline{NI}=\frac{\overline{CH_1}+\overline{DH_2}}{2}=\frac{7}{2}$

직각삼각형 NMI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{NM}=\frac{7}{2}\sqrt{2}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\overrightarrow{PN}|^2=\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2=\frac{37}{4}(\because \overline{CD}=\sqrt{37})$

$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB})$

$=|\overrightarrow{NI}|^2+\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$=|\overrightarrow{NI}|^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$(\because \overline{AI}\perp\overline{IN},\ \overline{BI}\perp\overline{IN})$

$=\left(\frac{7}{2}\right)^2+6\times 1=\frac{73}{4}$

$2\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{NM}=2\times\frac{\sqrt{37}}{2}\times\frac{7}{2}\sqrt{2}=\frac{7}{2}\sqrt{74}$

$\therefore\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le\frac{37}{4}+\frac{73}{4}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$

(단, 등호는 세 점 M, N, P가 이 순서대로 일직선 위에 있을 때 성립한다.)

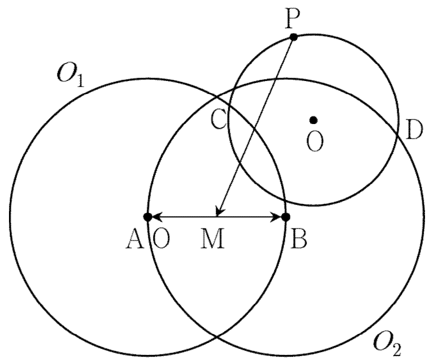
$\therefore\ a+b=31$

답 31

[참고]

두 점 C, D의 상대적인 위치를 결정한 후에, 다음과 같이 두 벡터의 내적의 최댓값을 구해도 좋다.

두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, O라고 하자.



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}$

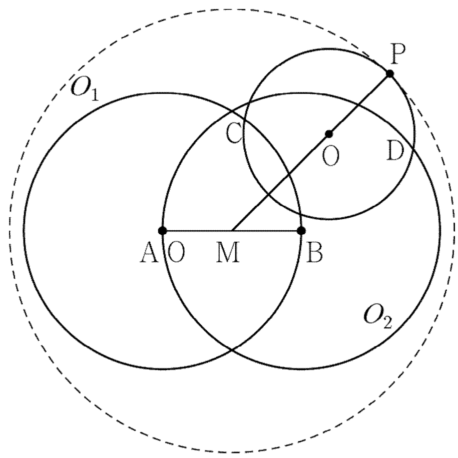
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})$

$=|\overrightarrow{PM}|^2+\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

$=|\overrightarrow{PM}|^2-\frac{25}{4}(\because \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB})$

두 점 P, M 사이의 거리가 최대일 때, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$은 최댓값을 갖는다.



직선 MO가 원 O와 만나는 두 점 중에서 점 M에서 거리가 먼 점을 P라고 하자.

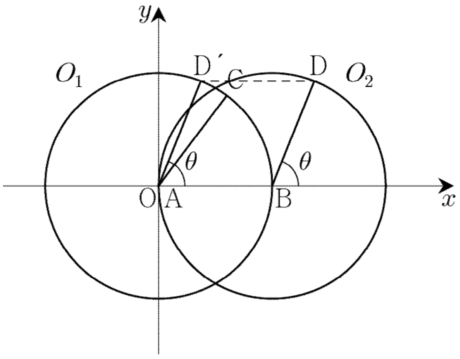
$\overline{MP}=\overline{MO}+\overline{OP}=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$

(두 선분 MO, OP의 길이를 구하는 것은 위의 풀이를 참고하면 된다. 또는 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각 A(0, 0), B(5, 0), C(3, 4), D(9, 3)이 되도록 좌표평면을 도입하면 두 점 M, O의 좌표는 각각 M$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, O$\left(6,\ \frac{7}{2}\right)$이므로 두 점 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{MO}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$이다.)

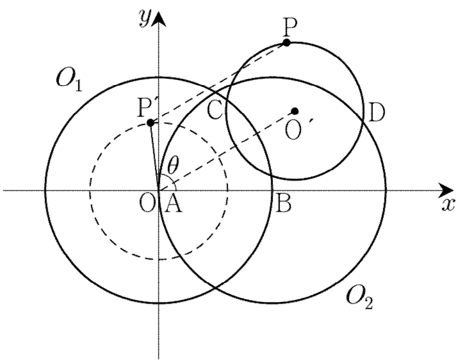
$\therefore\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$

(단, 등호는 세 점 M, O, P가 이 순서대로 일직선 위에 있을 때 성립한다.)

[풀이2]
두 점 A, B의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(5,\ 0)$이 되도록 좌표평면을 도입하자.



삼각함수의 정의에 의하여
점 C의 x좌표는 3, y좌표는 4 또는 -4이다.(조건(가))
점 C의 y좌표를 4로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
즉, 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(3,\ 4)$이다.
점 D를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점을 D′라고 하자. 이때, 점 D′는 원 O_1 위에 있다.
시초선(x축의 양의 방향)과 동경 OD′가 나타내는 각의 크기를 θ라고 하자.
삼각함수의 정의에 의하여
$\mathrm{D}'(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$
평행이동을 다시 하면
$\mathrm{D}(5+5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$
$=(5,\ 0) \cdot (2+5\cos\theta,\ -4+5\sin\theta)$
$=10+25\cos\theta=30$
풀면 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$
점 D의 x좌표는 9, y좌표는 3 또는 -3이다.
점 D의 y좌표가 3인 경우: $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{37}<9$
점 D의 y좌표가 -3인 경우: $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{85}>9$
점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(9,\ 3)$이다.
선분 CD의 중점을 O′라고 하자.



내분점의 공식에 의하여
$\mathrm{O}'\left(6,\ \dfrac{7}{2}\right)$
점 P를 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{7}{2}$만큼 평행이동한 점을 P′라고 하자.
시초선(x축의 양의 방향)과 동경 OP′가 나타내는 각의 크기를 θ라고 하자.
삼각함수의 정의에 의하여
$\mathrm{P}'\left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$
벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO}'}+\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}}$
$=\left(6,\ \dfrac{7}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$
$=\left(6+\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
$=\left(-6-\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ -\dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$
$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
$=\left(-1-\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ -\dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$
$=\dfrac{55}{2}+\dfrac{7\sqrt{37}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$
$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$로 두자.(단, $0\le\theta<2\pi$)
함수 $f(\theta)$의 도함수는
$f'(\theta)=\cos\theta-\sin\theta$
방정식 $f'(\theta)=0$을 정리하면
$\tan\theta=1$ 즉, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$
$f'(\theta)=\cos\theta(1-\tan\theta)$(단, $\cos\theta\ne0$)
$\theta=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 $\sqrt{2}$이다.
$\theta=\dfrac{5\pi}{4}$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $-\sqrt{2}$이다.
그리고 $f(0)=1$, $\displaystyle\lim_{\theta\to2\pi-}f(\theta)=1$이므로 함수 $f(\theta)$의 최

댓값은 $\sqrt{2}$이다.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}$

(단, 등호는 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore\ a+b=31$

답 31

30

[풀이1]

접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

이 직선의 방정식에 $x=0$, $y=g(t)$를 대입하면

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$$\int_{-4}^{4}g(t)dt=-\int_{-4}^{4}tf'(t)dt+\int_{-4}^{4}f(t)dt$$

$$=-\left[tf(t)\right]_{-4}^{4}+2\int_{-4}^{4}f(t)dt$$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$$=-4f(4)-4f(-4)+2\int_{-4}^{4}f(t)dt$$

정리하면

$$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}g(t)dt \qquad \cdots(*)$$

문제에서 주어진 항등식을 변형하면

$$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{t^2+1}$$

$$\int_0^x g(t+1)dt-\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$\int_1^{x+1}g(t)dt-\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}dt$$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$$\int_x^{x+1}g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}dt$$

($\because$ 정적분의 성질)

$$\int_x^{x+1}g(t)dt=\int_0^1 g(t)dt+\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln(x^2+1)$$

($\because$ 정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 g(t)dt=-\int_0^1 tf'(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-\left[tf(t)\right]_0^1+2\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-f(1)+2\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2},$$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}dt=\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=\ln(x^2+1))$$

다시 쓰면

$$\int_x^{x+1}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln(x^2+1)$$

x에 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3을 대입하면

$$\int_{-4}^{-3}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln17$$

$$\int_{-3}^{-2}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln10$$

$$\int_{-2}^{-1}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln5$$

$$\int_{-1}^{0}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln2$$

$$\int_{0}^{1}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}$$

$$\int_{1}^{2}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln2$$

$$\int_{2}^{3}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln5$$

$$\int_{3}^{4}g(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}+\ln10$$

변변히 더하면

$$\int_{-4}^{-4}g(t)dt$$

$$=-32-\ln17-4\ln10+\ln17+4\ln10$$

$$=-32$$

이를 (*)에 대입하면

$$\therefore\ 2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(x)dx=16$$

답 16

[풀이2]

접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

이 직선의 방정식에 $x=0$, $y=g(t)$를 대입하면

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$=2f(t)-\{tf(t)\}'$

이를 문제에서 주어진 항등식에 대입하면

$g(t+1)-g(t)$

$=2f(t+1)-2f(t)$

$-\{(t+1)f(t+1)\}'+\{tf(t)\}'$

$=\dfrac{2t}{t^2+1}$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^x g(t+1)dt-\int_0^x g(t)dt$$

$$=2\int_0^x f(t+1)dt-2\int_0^x f(t)dt$$

$$-\int_0^x \{(t+1)f(t+1)\}'dt+\int_0^x \{tf(t)\}'dt$$

$$=\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}dt$$

정적분의 치환적분법과 미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_x^{x+1} g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$$

$$=2\int_x^{x+1} f(t)dt-2\int_0^1 f(t)dt$$

$$-\int_x^{x+1}\{tf(t)\}'dt+\int_0^1\{tf(t)\}'dt$$

$$=\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}dt \qquad \cdots(*)$$

여기서

$$\int_0^1 f(t)dt=-\frac{\ln 10}{4},$$

$$\int_0^1 \{tf(t)\}'dt=[tf(t)]_0^1=f(1)=4+\frac{\ln 17}{8},$$

$$\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}dt=\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=\ln(x^2+1)$$

이고, 이를 (*)에 대입하여 정리하면

$$2\int_x^{x+1} f(t)dt-\int_x^{x+1}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln(x^2+1)-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

x에 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3을 대입하면

$$2\int_{-4}^{-3} f(t)dt-\int_{-4}^{-3}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 17-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{-3}^{-2} f(t)dt-\int_{-3}^{-2}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 10-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{-2}^{-1} f(t)dt-\int_{-2}^{-1}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 5-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{-1}^{0} f(t)dt-\int_{-1}^{0}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 2-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{0}^{1} f(t)dt-\int_{0}^{1}\{tf(t)\}'dt$$

$$=-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{1}^{2} f(t)dt-\int_{1}^{2}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 2-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{2}^{3} f(t)dt-\int_{2}^{3}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 5-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

$$2\int_{3}^{4} f(t)dt-\int_{3}^{4}\{tf(t)\}'dt$$

$$=\ln 10-\frac{\ln 10}{2}-4-\frac{\ln 17}{8}$$

변변히 더하면

$$2\int_{-4}^{4} f(t)dt-\int_{-4}^{4}\{tf(t)\}'dt$$

$=\ln 17+4\ln 10-4\ln 10-32-\ln 17$

$=-32$

미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{-4}^{4}\{tf(t)\}'dt=[tf(t)]_{-4}^{4}$$

$=4f(4)+4f(-4)$

이므로

$$2\int_{-4}^{4} f(t)dt-4\{f(4)+f(-4)\}=-32$$

정리하면

$$\therefore\ 2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx=16$$

답 16