작성자 : 나카렌

미적분학의 기본 정리를 확실하게 이해하기

교과서의 내용을 안다는 게 무엇일까요? 개념을 정확히 안다는 게 무엇일까요? 이번에는 그 예시로서, 미적분학의 기본 정리를 확실하게 이해한다는 것이 어떤 것인지 이 글을 통해 설명하고자 합니다.

1. 정적분의 정의

구분구적법을 이용하여 넓이나 부피를 여러 번 구하다 보면, 그 때의 극한들이 비슷한 모양을 하고 있다는 것을 알 수 있습니다. 좀 더 구체적으로 말하면, x축 위의 한 구간을 잘게 잘라서 각 구간별로 (어떤 값)×(구간의 길이)를 구한 다음, 모두 더하고, 구간의 개수를 한없이 많게 해서 그 극한값이 넓이나 부피가 되는 경우가 많았다는 겁니다.

이 때, 위에서 말한 (어떤 값)은 아무렇게나 있는 값이 아니고, 그 구간 내의 x값과 관계가 있는 경우가 많습니다. **‘관계’는 ‘함수’**이므로, (어떤 값)은 그 구간 내의 x값, 특히 구간의 오른쪽 끝점의 x값의 함수라고 할 수 있습니다.

‘관계’가 ‘함수’라는 것을 처음 본다고요? 함수의 수학적인 정의 말고, 직관적인 정의를 떠올려 봅시다. x의 값에 ‘따라’ y의 값이 정해지면 함수라고 했을 겁니다. 다시 한 번 읽어보세요. x와 y 사이에 무언가 관계가 있다는 것을 말하고 있습니다. 그리고 생각해 보면, 우리가 배운 함수들은 모두 x와 y 사이의 관계가 확실하고, 모든 x에 대하여 적용되는 관계였습니다. 일차함수, 이차함수, 지수함수 등등의 분류는, x와 y 사이의 관계가 무엇인지에 따라 분류한 것입니다.

다시 구분구적법으로 돌아옵시다. 구분구적법으로 값을 구하는 것은 길고 복잡한 과정이었습니다. 극한값을 직접 계산하지 않아도 되는 다른 방법이 없을까요? 그 방법을 알아내기 위해, **구분구적법에서 공통적으로 나타나는 모양에 주목해 봅시다. 다시 말해, 일반적인 경우를 생각해 보자는 것입니다.**

그러면, 아래와 같은 모양의 극한을 생각할 수 있습니다.

> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$라고 하자. 그러면 아래의 극한을 생각해 볼 수 있다.
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

일단, $f(x)$가 연속이면 위의 극한은 항상 수렴합니다.[1] 그런데 위의 표현이 좀 기니까, 짧고 간략하게 표시해 보도록 하겠습니다. 이미 알고 있는 대로, 다음과 같이 표시합니다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

여러분이 교과서를 살펴보면 구분구적법을 배우고 난 뒤, 처음부터 다짜고짜 정적분의 정의가 등장하는 경우가 많을 겁니다. 그러면 여러분들은 ‘새로운 것이 나오는구나’ 하고 읽어보더니, ‘구분구적법과 비슷한 거네’라는 식으로 생각한 다음, ‘구분구적법 배웠으니 이제 정

1) 증명은, 고등 학교 과정 외입니다. 그렇지만, 연속이면서 단조증가하는 함수, 연속이면서 단조감소하는 함수에 대해서만 생각하면 고등 학교 과정 내에서 이해할 수 없는 것은 아닙니다. 한번 생각해 보세요.

적분 배우는구나' 라는 식으로 생각하고 정적분을 공부하는 경우가 많았을 겁니다. 그런데, 왜 정적분을 배우기 전에 구분구적법이 나왔을까요? 왜 바로 연이어서 정적분이 등장하는 걸까요?

'내용의 순서'에도, 나름의 이유가 있습니다. 구분구적법을 배우면서, 구분구적법이 불편하다는 것을 느꼈을 겁니다. 그러면, 이렇게 생각하는 게 좋습니다. '예전에 수학자들이 구분구적법에 대해 조사하고 정리한 건 없을까? 이대로는 불편해. 이대로 끝날 리는 없으니까, 이제 구분구적법에 대한 몇 가지 이론이 나오겠지?' 이러한 생각을 가지고, 정적분을 배우고, 미적분의 기본 정리와 정적분의 기본 정리를 배운 뒤, 단원 전체의 내용을 돌아 보면, 뭔가 깨달을 수 있을 겁니다. **우선 구분구적법이라는 구체적인 사례를 다룬 뒤, 구체적인 사례들을 쉽게 다루기 위해 구체적인 사례들의 공통점을 추출하고, 그 공통점과 관련된 수학적 이론을 소개하고, 그 이론을 사용하여 구체적인 사례를 쉽게 다룰 수 있게 된다는 순서가 있다는 겁니다. 이러한 순서가, '수학'입니다.**

2. 정적분을 어떻게 구해야 할까? : 함수, 그리고 미분

여기까지는, 준비 과정이었습니다. 이제, 정적분을 어떻게 하면 효과적으로 구할 수 있을지 생각해 봐야 합니다.

수학에서 중요한 것이 무엇일까요? '관계'입니다. '함수'라는 거죠. 생각해 보면 함수는 중학교 1학년 때부터 여러 번 반복해서 배웠을 겁니다. 게다가 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 배울 때쯤에는 삼각방정식, 지수방정식, 로그방정식과 삼각부등식, 지수부등식, 로그부등식은 함수를 배울 때 부록으로 딸려오는 것이라는 취급을 받았습니다. 게다가, 미분을 배웠더니 하는 이야기라고는, '함수의 그래프를 어떻게 잘 그릴까'가 거의 전부입니다. 이쯤에서, 여러분들은 '함수가 중요하기는 중요한가보다'라는 생각을 하는 게 좋습니다.

그런데 바로 위의 문단은 왜 있는 걸까요? 비문학 지문이라고 생각해 보세요. 정적분을 편하게 구하는 방법을 이야기하려면 관계나 함수라는 개념이 필요하니까, 미리 소개하는 것이겠죠? 우리가 잘 알고 있는 건(사실은, 우리가 많이 배웠던 건) 함수니까, 관계니까, 관계에 초점을 맞추어 생각해 보도록 합시다.

일단, $f(x)$는 주어져 있고, 무엇인지 알고 있는 경우를 생각해 봅시다. $f(x)$도 뭔지 모르면, 아무 것도 할 수 없겠죠? 그러면 $\int_a^b f(x)dx$는 무엇과 관계가 있을까요? a와도 관계가 있고, b와도 관계가 있네요. 하나에만 집중합시다. 어느 관계에 주목할까요? 잘은 모르겠지만, 위에 있는 b가 좀 더 나을 것 같습니다. 즉, a나 $f(x)$가 주어져 있을 때, $\int_a^b f(x)dx$는 b와 관계가 있습니다. 이걸 어떻게 표현할까요? 당연히,

$$S(b)=\int_a^b f(x)dx$$

라고 쓰면 됩니다. 근데 좀 헷갈리니까, 아래와 같이 쓰는 게 나을 것 같습니다.

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

t라는 문자는 x와 구분하기 위해서일 뿐, 특별한 의미가 있는 건 아닙니다. 이제, 함수가 하나 탄생했군요! 이제 우리의 목표는, $S(b)$가 아니라, 함수 $S(x)$를 어떻게 하면 쉽게 구할 수 있느냐는 것입니다. $S(b)$도 구하기 힘든데, 더 복잡한 $S(x)$는 대체 어떻게 구할 거냐는

외침이 들려오는 듯하군요. **그런데, 수학에서는 하나를 구하기 위해 전체를 알고자 하는 경우가 많습니다.**

이차방정식이 인수분해가 잘 안 될 때, 근을 어떻게 구했나요? 그 때, 교과서에서는 안 그래도 인수분해가 안 돼서 골치 아픈 이차방정식을, 일반화해서 모든 계수를 문자로 두고 $ax^2+bx+c=0$이라는 식으로 두었을 겁니다. 여러분은 이 때, 주의해서 봐야 합니다. **쓸데없이 복잡하기만 할 것 같은데 왜 문자로 두고 시작하는지 그 이유를 알아야 한다**는 거죠. 그런데, 그렇게 두더니, 완전제곱식으로 정리하더니, 또 몇 번 정리하다보니, 근을 구하는 공식이 나왔습니다. 처음부터 문자 a, b, c로 시작했으니까, 어떤 이차방정식이든 근을 구하는 공식에 대입만 잘 하면 구할 수 있겠네요. **하나 하나의 경우를 생각하는 것이 아니라, 전체를 생각하면서 전체적으로 통하는 어떤 이론을 만든 다음, 각 경우에 적용하자는 겁니다.** 물론, 위에서 구분구적법에서 정적분으로 넘어가는 과정도 이에 해당되는 이야기입니다.

다시 돌아옵시다. 문제는, $y=S(x)$의 그래프를 어떻게 그릴 거냐 하는 것이었죠. 그런데 여러분, 그래프를 그리고자 할 때는 무엇이 도움이 되던가요? 미분법입니다. 그러니 $S(x)$를 미분해 봐야 겠죠. 근데 우리는 아는 게 별로 없으니까, 정의대로 미분해야 할 것 같습니다. 그러니까,

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$$

를 생각해 보자는 거죠. 우선, $\Delta x>0$인 경우부터 생각해 봅시다. 이 때는 이렇게 쓸 수 있습니다.

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Δx가 작아지면, 뭐가 될까요? 잘 모르겠네요. 극한값을 구하기는 해야 할 거 같은데, 합의 극한을 극한의 합으로 분리해서 각각 구한다던가 인수분해한다던가 최고차항으로 나눈다던가 그런 건 여기에는 통하지 않아요. 이쯤 되면 답답해질 법도 합니다. 극한값을 구하는 다른 방법들 중, 쓸 만한 것이 없을까요?

뭔가 있습니다. 부등식과 극한이지요. 바로, 아래의 내용입니다.

$x=a$ 주변에서 $f(x)\le g(x)\le h(x)$이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$이면, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$

그런데 어디서 부등식을 얻죠? 나와 있는 건 함수 $f(t)$밖에 없는 것 같은데 말이죠. 함수와 부등식이 동시에 나오는 게 뭐가 있더라? $x=a$에서 $f(t)$가 최대이면 $f(a)\ge f(x)$가 성립하고, 항상 $f(a)\ge f(x)$이면 $x=a$에서 $f(t)$가 최대라는 게 있습니다.(이게, 최댓값의 정의입니다) 이걸 써 봅시다. $[x,x+h]$라는 닫힌 구간에서 $f(t)$는 연속이니까, 최솟값도 존재하고 최댓값도 존재합니다.(최대 최소의 정리) 그 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 합시다. 그러면,

$$m\le f(t)\le M$$

라는 게 성립합니다. 정적분이라는 것도 결국은 합이니까, $\Delta x>0$인 경우를 살펴보고 있으니까, 아래의 식이 성립합니다.

$$\int_x^{x+\Delta x} mdt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} Mdt$$

$$m\Delta x \le \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \le M\Delta x$$

$$m \le \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \le M$$

뭔가 되어 가는 것 같습니다! 게다가, Δx가 0에 한없이 가까워지면, $f(t)$가 연속이니까 m과 M은 $f(x)$에 한없이 가까워집니다. 즉,

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

이라는 거죠. $\Delta x < 0$인 경우도 비슷한 방법으로 하면,

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

이 되어서, 결과적으로

$$S'(x) = f(x)$$

가 됩니다.

여기까지의 이야기, 이해하셨나요? 아마 조금 헷갈릴 겁니다. '뭔가 맞는 것 같긴 한데 잘은 모르겠는데.'라는 생각이 들 거에요. 그래서, 교과서에서는 이해를 돕기 위하여, $f(x)$의 그래프와 $S(x)$가 나타나는 그림을 제시하고 있습니다. 이 때, 넓이가 나올 거에요. 여기서도 여러분은 이렇게 생각하는 것이 좋습니다. **'넓이와 부등식이 연관될 수 있구나. 그러면 넓이에서 부등식을 유도할 수도 있을까?'** 그런 다음 계속 교과서 공부나 개념 공부를 해 나가다 보면, 넓이에서 부등식을 유도하는 경우가 가끔 보일 겁니다. 아주 유명한 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$의 값을 구할 때, 정적분을 응용하여 수열의 합의 범위를 구하거나 부등식을 증명할 때 넓이에서 부등식을 유도하고 있습니다. 그러면, 이 때 이렇게 생각할 수 있겠죠. **'부등식을 증명하거나 유도할 때, 넓이를 이용할 수도 있구나. 이건 잘 몰랐으니까 기억해 둬야지.'** 그리고, 2009학년도 9월 모의 평가 가형에는 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_{0}^{1}f(x)dx$의 대소를 비교하는 문제가 나왔습니다. 풀이는, 잘 알려진 대로 넓이에서 부등식을 이끌어내는 것이었습니다.

어쨌든, $S(x)$의 도함수가 우리가 알고 있는 함수라는 거죠. 그러니, 우리는 $y=S(x)$의 그래프를 그릴 수 있습니다. 게다가, 우리가 앞에서 부정적분을 연습했으니까, $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분 중 하나라는 것도 알고 있습니다. 이제, $S(x)$에 대하여 많은 것을 알게 된 셈입니다. 이 내용은, 뭔가 중요하면서 쓸모 있어 보입니다. 그렇기에, 이 내용은 미적분의 기본 정리라는 이름으로 교과서에 등장하고 있습니다.

3. 정적분을 구하여 보기

이제, 정적분을 구하여 봅시다. $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분이니까, 부정적분만 할 줄 알면 $S(x)$를 구할 수 있고, 그런 다음 $x=b$를 대입하면 $\int_{a}^{b}f(x)dx$를 구할 수 있게 됩니다. 그런데, 여기서 문제가 하나 생깁니다. $f(x)$의 부정적분은 한 개가 아니라, 무수히 많다는 겁니다.

결국, 그 많은 부정적분 중 어느 것이 $S(x)$인지 알아내어야 합니다. 그런데, 우리는 부정

적분을 구해 보면서, 중요한 성질 하나를 알았습니다. $f(x)$의 부정적분이 무수히 많기는 하지만, 그 나름대로 규칙이 있다는 겁니다. 다시 말해, **무수히 많더라도 우리는 규칙성을 알기 때문에, 뭔가 해 볼 수 있다는 겁니다.** 구체적으로 말하면, $f(x)$의 부정적분들 중 두 개를 $F_1(x)$와 $F_2(x)$라고 한다면, $F_1(x)-F_2(x)$는 상수함수라는 겁니다.[2)] 이걸 이용하면, $f(x)$의 부정적분들 중 하나를 알면, 나머지를 모두 알 수 있습니다. 구체적으로 말하면, $f(x)$의 부정적분들 중 우리가 알고 있는 하나를 $F(x)$라고 하면, 나머지 부정적분들은 모두 $F(x)+C$의 형태라는 겁니다.

다시 정적분을 구하는 것으로 돌아옵시다. $S'(x)=f(x)$이었고, $f(x)$의 부정적분들 중 우리가 구한 한 개를 $F(x)$이라고 하면, $S(x)=F(x)+C$라는 것을 알 수 있습니다. 이제, C만 구하면 $S(x)$를 구한 겁니다. 어떻게 구할까요? 우리가 알고 있는 다른 사실이 없을까요? 그러고 보니, $S(a)=0$이었습니다. 이에서

$$0=F(a)+C$$
$$C=-F(a)$$

를 얻습니다. 이제, 우리는 $S(x)$를 구했습니다. 정리해 봅시다.

$S(x)=\int_a^x f(t)dt$라고 하자. 그러면 $S'(x)=f(x)$이다. 이 때, $f(x)$의 부정적분들 중 우리가 구한 한 개를 $F(x)$이라고 하면,

$$\int_a^x f(t)dt=S(x)=F(x)-F(a)$$

이다.

이 절의 내용은, 교과서에서 정적분의 기본 정리라고 소개되고 있습니다. 여기서, $F(x)$는 $f(x)$의 부정적분 중 무엇이든 상관이 없다는 것에 주목해야 합니다. 그러니 정적분을 계산할 때는, 상수항이 0인 함수를 $F(x)$로 사용하는 게 편리하고, 여러분들은 이미 그렇게 하고 있습니다.

4. 결론

이 모든 내용을 통틀어 부를 때는, 미적분학의 기본 정리라고 부릅니다. 요약해 보면, 이렇게 말할 수 있습니다. 구분구적법으로 넓이와 부피를 구하는 것은 많이 복잡했습니다. 그래서 구분구적법에 공통적으로 나타나던 모양의 극한값을 정적분이라 정의하고, 정적분이 가지는 일반적인 성질이 없는지 살펴보기로 했습니다. 그런 다음, 정적분이 미분과 관련이 있다는 정리를 알아 내었습니다. 이제, 이를 이용하여 편리하게 정적분을 구할 수 있고, 넓이나 부피를 쉽게 구할 수 있게 되었습니다.

교과서에서는 제가 이야기한 내용 전체가 실려 있지는 않고, 중심 내용만이 있을 겁니다. 다시 말해, 교과서에서 ‘행간을 읽어내는’ 것, 즉 교과서의 내용에서 추론을 통해 직접적으로 드러내고 있지 않는 내용을 읽어 내는 것은, 공부하는 여러분의 몫입니다. 그렇지만, 많은 수험생들이 이를 어떻게 해야 하는지, 그렇게 한다는 것은 무엇인지 잘 모르기 때문에, 이와 같은 글을 통해 보여주고자 했습니다. 교과서의 내용이 어떤 순서인지, 어떤 방식으로

2) 이는, 평행이동 등을 통해 직관적으로 이해할 수도 있고, 평균값의 정리로 증명할 수 있습니다. 둘 다, 해 보세요.

내용이 전개되는지, 어떤 아이디어를 사용하는지 등에 주목하라는 것입니다. 그렇기에, 이 글에서는 그러한 부분들 중 중요한 문장을 진하게 표시해 두었습니다.

물론, 이렇게 자세하게 알아야 할 필요가 있는지에 대한 의문이 있을 수 있습니다. 그렇지만, 교과서에서 내용을 전개하는 방법이나, 사용되는 아이디어라는 것은 한 마디로 '수학적 사고방식'이라고 할 수 있습니다. '수학적 사고방식'을 구사하는 정도의 차이는, 결국 문제 해결력의 차이로 이어지게 됩니다. 심지어 특정한 '수학적 사고방식'을 할 수 있는 문제도 나오곤 합니다.(그러나 올해에는 나올 가능성이 높지 않다고 봅니다) 교과서만 공부했는데 점수가 잘 나온다던지, 문제 풀이를 많이 하지는 않았는데 문제를 잘 푼다던지 하는 사람들은, '수학적 사고방식'을 잘 익혔기 때문에 그렇게 된 것입니다.

수리 가형은 왜 어렵게 느껴질까요? 왜 수리 가형을 잘 하려면 어느 정도의 머리가 필요하다고 여겨질까요? 우선은, '수학적 사고방식'을 구사할 수 있는 정도의 차이가 수리 가형에 꽤 영향을 주기 때문입니다. 그렇지만, '수학적 사고방식'을 구사할 수 있는 정도는 선천적으로만 정해지지 않습니다.(다시말해, 유전적으로만 정해지는 것이 아닙니다) 유전적으로 정해지는 요소나 비율이 없다고는 할 수 없겠지만, 후천적인 노력으로 향상시킬 수 있는 부분이 상당히 많습니다. 그러나, 수학을 가르치는 사람들 중에서 '수학적 사고방식'을 더 잘 구사할 수 있게 하는 것에 관심이 있는 사람들은, 많지 않습니다. 그렇기 때문에, 수리 가형은 어렵게 느껴지고, 마치 '벽'으로 느껴지는 것입니다.

더 나아가, 어려운 수학 문제들(논술이나 경시대회 등)이 어려운 이유도, 이와 관련이 있습니다. 그렇기 때문에, 수리 가형 공부, 경시대회 공부, 논술 공부 등이 완전히 별개가 아니라, 어느 정도씩 겹치게 되는 것입니다.

고등 학교 과정의 교과서를 살펴보면서, 그 안에 녹아 있는 '수학적 사고방식'을 인지할 수 있는 범위까지 인지하고, 이를 정리하여 이를 바탕으로 수학을 가르치는 게, 바람직하다고 생각합니다. 또한, 수학을 가르치는 사람들은 자신이 빠뜨린 것은 없는지 계속적으로 돌아보면서 자신을 향상시키려고 해야 한다고 생각합니다. 그러나, 실제는 이와 멀어 보입니다. 기출 문제 분석이라는 말은 널리 퍼져 있지만, 기출 문제의 원천인 교과서 분석이라는 말은 아직 많이 듣지 못했습니다.

다시 말해, '기출 문제에서 이러이러한 사고방식이 출제되더라' 라는 것에 머무르지 않고, 교과서를 분석해서 '교과서를 보면 이러이러한 사고방식이 있는데, 아직 출제되지 않았다. 그렇지만 앞으로 나올지도 모르니, 한번 여유가 있는 사람들은 이것도 생각해 두면 좋을 듯하다' 라고 말하는 사람이 필요하다는 것입니다. 가능하다면, 제가 이런 이야기를 조금씩 풀어 놓고 싶습니다.

입시가 임박한 사람들은, 공부하는 방식을 바꾸는 게 쉽지 않습니다. 그러나, 지금 이 내용을 공부하기 시작한 사람이라면, 이 글을 읽어 보면서 교과서 공부를 철저하게 한다는 것이 어떤 것인지 생각해 보는 것이 좋습니다. 이를 통해, 분명 얻는 것이 있을 것입니다.

마지막으로, 미적분학의 기본 정리를 처음으로 제대로 이해했을 때 도움을 받았던 책, 『숨마쿰라우데 미분과 적분』의 두 저자분들과 대학교에 입학한 뒤 수학을 공부하면서 도움을 많이 받았던 책『선형대수와 군』을 쓰신 이인석 교수님께 감사드립니다.