정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ③
2. ③
3. 10
4. ⑤
5. 180
6. 21
7. 17
8. 45
9. 14
10. ⑤

[추가 과제 해설]

1) **정답** $\frac{e}{2}$

$f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)$$
$$=\frac{1}{2}f(1)=\frac{e}{2}$$

2) **정답** ①

$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=2x,\ g(x)=e^x$$
$$\therefore\ \int_0^{\ln2}x^2e^xdx=\Big[x^2e^x\Big]_0^{\ln2}-\int_0^{\ln2}2xe^xdx$$
$$=2(\ln2)^2-2\int_0^{\ln2}xe^xdx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\ln x}xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$$
$$\therefore\ \int_0^{\ln2}xe^xdx=\Big[xe^x\Big]_0^{\ln2}-\int_0^{\ln2}e^xdx=2\ln2-\Big[e^x\Big]_0^{\ln2}$$
$$=2\ln2-(2-1)=2\ln2-1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\ln2}x^2e^xdx=2(\ln2)^2-2(2\ln2-1)$$
$$=2(\ln2)^2-4\ln2+2$$

3) **정답** $\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이때 $x=\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

4) **정답** 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\int_0^1x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2$$

5) **정답** $\frac{8}{\ln3}$

$$\int_0^1\{f(x)+f(2-x)\}\,dx=\int_0^1f(x)\,dx+\int_0^1f(2-x)\,dx$$

$\int_0^1f(2-x)\,dx$ **에서** $2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1f(2-x)\,dx=\int_2^1f(t)\cdot(-1)\,dt=\int_1^2f(t)\,dt$$
$$\therefore\ \int_0^1f(x)dx+\int_0^1f(2-x)\,dx=\int_0^1f(x)dx-\int_1^2f(t)dt$$
$$=\int_0^1f(x)dx+\int_1^2f(x)dx$$
$$=\int_0^2f(x)dx=\int_0^2 3^xdx$$
$$=\left[\frac{3^x}{\ln3}\right]_0^2=\frac{9}{\ln3}-\frac{1}{\ln3}$$
$$=\frac{8}{\ln3}$$

6) **정답** ②

$e^t=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

또한 $x=-2$일 때 $t=e^{-2}$, $x=2$일 때 $t=e^2$이므로

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^2}\frac{1}{t(t+1)}dt$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\Big[\ln|t|-\ln|t+1|\Big]_{e^{-2}}^{e^2}$$
$$=\{2-\ln(e^2+1)\}-\{-2-\ln(e^{-2}+1)\}$$
$$=2-\ln(e^2+1)+2+\ln\frac{e^2+1}{e^2}$$
$$=4+\ln\frac{e^2+1}{e^2(e^2+1)}=4+(-2)$$
$$=2$$

7) 정답 ④

$f'(x)=\cos x+2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x+2\cos 2x\cos x-2\sin x\cos x\sin x$

$=\cos x(1+2\cos 2x-2\sin^2 x)$

$=3\cos x\cos 2x$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=0$ 또는 $\cos 2x=0$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 이다.

8) 정답 ①

$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$

$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x)\cdot(-4xe^{-2x^2})$

$=4e^{-2x^2}(4x^2-1)$

$=4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$

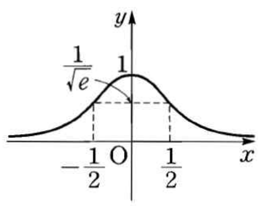
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵	1	⤵	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤷

또 $\lim_{x\to\infty}e^{-2x^2}=0$, $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x^2}=0$ 이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y|0<y\le 1\}$이다.

ㄷ. 변곡점은 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다.

이상에서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

9) 답 6

[해설] $3x^2+2y^2=6$, 즉 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$에서 $\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하면

타원의 정의에 의하여

$a+b=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=12-2ab$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\sqrt{3}\ge\sqrt{ab}$ $\quad\therefore\ ab\le 3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=12-2ab\ge 12-2\cdot 3=6$

따라서 $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 최솟값은 6이다.

10) 답 ④

[해설] 주어진 타원의 장축의 길이가 32m, 단축의 길이가 20m이므로

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$이라 할 수 있다.

구하는 폭은 $y=12$와 타원 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$의 교점 사이의 거리와

같으므로 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$에서

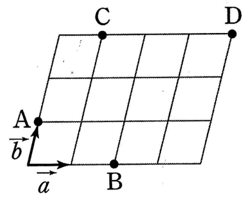
$x^2=\frac{7}{16}\cdot 10^2$ $\quad\therefore\ x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{2}$

따라서 구하는 폭은

$\frac{5\sqrt{7}}{2}\cdot 2=5\sqrt{7}(\mathrm{m})$

11) 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하면



$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=4\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ 에서

$4\vec{a}+2\vec{b}=p(2\vec{a}-\vec{b})+q(\vec{a}+2\vec{b})$

$=(2p+q)\vec{a}+(-p+2q)\vec{b}$ 따라서 $2p+q=4$, $-p+2q=2$이므로

$p=\frac{6}{5}$, $q=\frac{8}{5}$

$\therefore p-q=-\frac{2}{5}$

12) 답 ④

[해설] 정팔각형의 외접원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF})-2\overrightarrow{OA}$

$=-2\overrightarrow{OA}$

즉 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=|-2\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OA}|=8$이므로

$|\overrightarrow{OA}|=4$

따라서 구하는 팔각형의 넓이는 두 변의 길이가 4이고 그 끼인 각의 크기가 $\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$인 삼각형의 넓이의 8배이므로

$8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 45^\circ=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=32\sqrt{2}$

13) 답 3

[해설] 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle BAC=90^\circ$

즉 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}=\sqrt{2}$에서 $\triangle OCA$는 정삼각형이므로

$\angle OAB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos 30^\circ$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

14) 답 ②

[해설] $\angle B=120^\circ$이므로

$\angle ABD=\angle DBE=\angle EBF=\angle FBC=30^\circ$

ㄱ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ$

$12\times 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-48$

ㄴ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|\cos 60^\circ$

$=12\times|\overrightarrow{BE}|\times\frac{1}{2}=6|\overrightarrow{BE}|$

ㄷ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BF}|\cos 90^\circ=0$

ㄹ. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|\cos 60^\circ$

$=8\times|\overrightarrow{BE}|\times\frac{1}{2}=4|\overrightarrow{BE}|$

이상에서 그 값이 가장 큰 것은 ㄴ, 가장 작은 것은 ㄱ이다.

15) 정답 ④

(i) $f(1)=2$, $f(4)=6$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

이고, $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$이어야 하므로

2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

6 또는 7

이고, $f(4)\le f(5)\le f(6)$이어야 하므로 6, 7의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 $f(1)=2$, $f(4)=6$인 함수 f의 개수는

$15 \cdot 3 = 45$

(ⅱ) $f(1)=3,\ f(4)=4$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4

이고, $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$이어야 하므로 3, 4의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7

이고 $f(4) \le f(5) \le f(6)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

따라서 $f(1)=3,\ f(4)=4$인 함수 f의 개수는

$3 \cdot 10 = 30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$45+30=75$

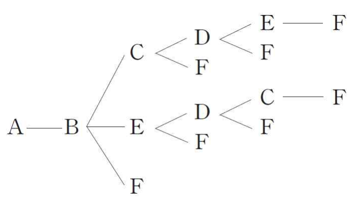
16) **정답** 21

구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a,\ b,\ c$ 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

17) **정답** 28

주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 구해 보면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7 \cdot 4 = 28$

18) **정답** 81

(ⅰ) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

이므로 $S(6,\ 4) = 20+45+65$

(ⅱ) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4) = {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 15$$

(ⅲ) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6)=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$

19) **정답** 81

(ⅰ) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

이므로 $S(6,\ 4) = 20+45+65$

(ⅱ) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4) = {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 15$$

(ⅲ) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6)=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$

20) **정답** 186

세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원 수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(ⅰ) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$

(ⅱ) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

(ⅲ) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2! = 2$

따라서 구하는 방법의 수는 $3 \cdot 31 \cdot 2 = 186$

21) **정답** ②

ㄱ. $a > b > 1$이므로

$\log_a b < \log_a a = 1,\ \log_b a > \log_b b = 1$

$\therefore\ \log_a b < \log_b a$

ㄴ. [반례] $a=3,\ b=2$이면 $3^2 > 2^3$

ㄷ. $2^a = 3^b$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$a = b\log_2 3 \qquad \therefore\ \dfrac{a}{b} = \log_2 3$

이때 $\log_2 3 > 1$이므로 $\dfrac{a}{b} > 1 \quad \therefore\ a > b$

ㄹ. [반례] $a=8,\ b=27$이면 $\log_2 8 = \log_3 27 = 3$이지만 $b > a$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

22) **정답** ①

$1 < x < 4$에서 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 4 \quad \therefore\ 0 < \log_2 x < 2$

(ⅰ) $A - B = \log_2 x^2 - (\log_2 x)^2$

$= 2\log_2 x - (\log_2 x)^2$

$= \log_2 x(2 - \log_2 x) > 0$

$\therefore\ A > B$

(ⅱ) $0 < \log_2 x \le 1$일 때

$0 < (\log_2 x)^2 \le 1,\ \log_2(\log_2 x) \le 0$

$\therefore\ (\log_2 x)^2 > \log_2(\log_2 x)$ …… ㉠

$1 < \log_2 x < 2$일 때

$1 < (\log_2 x)^2 < 4,\ 0 < \log_2(\log_2 x) < 1$

$\therefore\ (\log_2 x)^2 > \log_2(\log_2 x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B > C$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A > B > C$

23) **정답** $-\dfrac{1}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6},\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6},$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}$,

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}$ ●

∴ (주어진 식)

$=\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ ●

24) 정답 $A<B$

$A-B=x\sin y+y\sin x-(x\cos x+y\cos y)$
$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$ 인 모든 x, y $(x\neq y)$에 대하여

$\sin x<\cos y$, $\sin y<\cos x$

∴ $\sin x-\cos y<0$, $\sin y-\cos x<0$

따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로

$A-B<0$ ∴ $A<B$

25) 정답 ③

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 에서 $0<x\leq 1$이고

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=\frac{1}{2}$

∴ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because$ $0<x\leq 1$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

26) 정답 ②

$f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

∴ $x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, 극솟값은 $f(1)=0$이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $\frac{4}{e^2}$이다.

27) 정답 ③

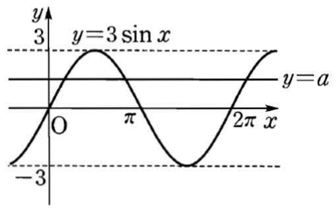
$f'(x)=ax+3\cos x+1$, $f''(x)=a-3\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $a-3\sin x=0$

∴ $3\sin x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=3\sin x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3\leq a\leq 3$

이때 $a=-3$ 또는 $a=3$이면

$f''(x)=-3(1+\sin x)$

또는 $f''(x)=3(1-\sin x)$

∴ $f''(x)\leq 0$ 또는 $f''(x)\geq 0$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

∴ $-3<a<3$

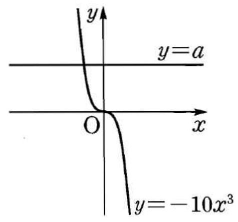
28) 정답 1

$f'(x)=5x^4+2ax+b$, $f''(x)=20x^3+2a$

$f''(x)=0$에서 $20x^3+2a=0$

∴ $-10x^3=a$

오른쪽 그림에서 곡선 $y=-10x^3$과 직선 $y=a$는 한 점에서 만나므로 방정식 $f''(x)=0$은 1개의 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.



29) 답 24

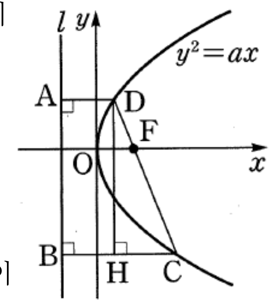
[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{FD}=k$, $\overline{FC}=2k(k>0)$로 놓으면

$\overline{AD}=\overline{BH}=\overline{CH}=k$

이므로 직각삼각형 DHC에서

$\overline{DH}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

이때 사다리꼴 ABCD의 넓이가 $192\sqrt{2}$이므로



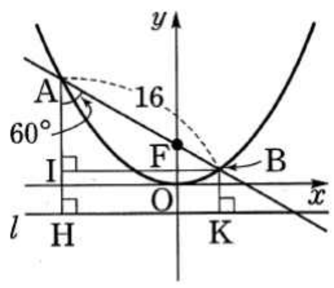
$\frac{1}{2}(k+2k)\cdot 2\sqrt{2}k=192\sqrt{2}$

$k^2=64$ ∴ $k=8(\because k>0)$

∴$\overline{CD}=3k=24$

30) 답 4

[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AH}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 AIB에서



$\overline{AI}=\overline{AB}cos60^\circ=16\cdot\frac{1}{2}=8$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH}=\overline{AF}$, $\overline{BK}=\overline{BF}$이므로

$\overline{AH}+\overline{BK}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=16$

$(\overline{AI}+\overline{IH})+\overline{BK}=16$, $8+\overline{BK}+\overline{BK}=16$

$2\overline{BK}=8$ ∴ $\overline{BK}=4$

31) 답 45°

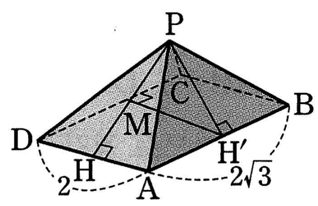
[해설]

주어진 전개도로 만든 사각뿔은 오른쪽 그림과 같다.

점 P에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=2$이므로 $\triangle PAH$에서

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\triangle PAH'$에서



$\overline{PH'}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$

점 H'에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 옆면 PAB와 밑면 $ABCD$가 이루는 각의 크기는 $\overline{PH'}$과 $\overline{MH'}$이 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $\angle PH'M=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\overline{MH'}}{\overline{PH'}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

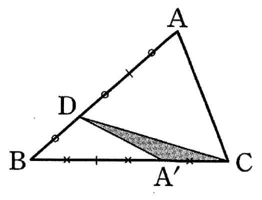
∴$\theta=45^\circ$

32) 답 $\frac{1}{6}$

[해설]

선분 BC를 삼등분하는 점 중 점 C와 가까운 점을 A'이라 하면 선분 CD를 접는 선으로 하여 평면 ABC를 접을 때, 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로

의 정사영이 점 A'이므로 오른쪽 그림에서 $\triangle ADC$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\triangle A'DC$ 이다.



즉 $\triangle A'CD=\triangle ADC\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle A'CD}{\triangle ADC}$$

$\triangle A'CD=S$라 하면

$$\triangle ADC=2\triangle BCD=2\times3\triangle A'CD$$
$$=6\triangle A'CD=6S$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{S}{6S}=\frac{1}{6}$$

33) 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[해설] 두 평면 $2x+y-z=1$, $x-2y-z=2$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{n_2}=(1,\ -2,\ -1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+1\times(-2)+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{6}$$

이때 $\triangle$ABC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$4\sqrt{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

34) 답 $\dfrac{\pi}{4}$

[해설] 두 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$의 교선을 포함하는 평면 α의 방정식은

$$2y+2z-7=0$$

평면 α의 법선벡터는 $(0,\ 2,\ 2)$이고 xy평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|2\times1|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$$

35) **정답** ⑤

7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot2!}=420$$

C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot2!}=60$$

이때 C와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$$60\cdot2=120$$

따라서 구하는 방법의 수는 $420-120=300$

[다른 풀이]

C, D를 제외한 5개의 문자 A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!\cdot2!}=10$

이때 A, A, A, B, B의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 C, D를 나열하는 방법의 수는 ${}_6P_2=30$

따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot30=300$

36) **정답** 136

[전략] $f(3)$의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

[풀이]

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 f는 함수가 아니다.

(ⅱ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2

따라서 f의 개수는

$${}_3\Pi_2\cdot{}_2\Pi_3=3^2\cdot2^3=72$$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2 또는 3 또는 4

따라서 f의 개수는

$$1\cdot{}_4\Pi_3=1\cdot4^3=64$$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$72+64=136$$

37) **정답** 9

$\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r\,x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}C_r\,x^{10-(n+1)r}$$

상수항은 $10-(n+1)r=0$일 때이므로 $(n+1)r=10$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 $(r,\ n)$은

$$(1,\ 9),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1)$$

따라서 n의 최댓값은 9이다.

38) **정답** ⑤

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_r\,x^r$

$x^r=x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_2=55$

39) **정답** ③

빨간 공이 x번, 노란 공이 y번 나온다고 하면

$$x+y=5,\ x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

따라서 7점을 얻으려면 빨간 공이 3번, 노란 공이 2번 나와야 하므로

구하는 확률은 ${}_5C_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$

40) **정답** $\dfrac{11}{64}$

(ⅰ) 소수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{8}\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{64}$$

(ⅱ) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{8}\cdot{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{11}{64}$