제 2 교시

수학 영역(나형)

주의사항

총 20문항, 60분입니다.

한문제가 틀리더라도 처음부터 다시 20문항을 풀어야 하는 교재입니다.

무의식을 단련하는 것은 쉽지 않습니다. 묵묵하게, 실수를 하지 않도록

틀리지 않게 계산하는 것이 이 교재의 목표입니다.

---

1. 남학생 4명과 여학생 2명을 모두 일렬로 세울 때, 남학생 사이에 여학생 2명이 서로 이웃하여 서는 경우의 수는?

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택한 후 일렬로 나열하여 네 자리의 자연수 A를 만들고, 나머지 2개의 수를 일렬로 나열하여 두 자리의 자연수 B를 만들려고 한다. $A+B$를 5로 나누었을 때 나머지가 2가 되도록 두 자연수 A, B를 만드는 경우의 수는?

① 136 ② 138 ③ 140 ④ 142 ⑤ 144

3. 5개의 소문자 a, b, c, d, e와 3개의 대문자 A, B, C를 모두 일렬로 나열할 때, '$abAcBdCe$'와 같이 모든 대문자 바로 왼쪽에는 적어도 1개 이상의 소문자가 오도록 나열하는 경우의 수는?

① 7150 ② 7200 ③ 7250 ④ 7300 ⑤ 7350

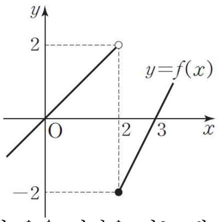
4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $\lim_{n\to\infty} nf\left(2+\frac{3}{n}\right)$의 값은?

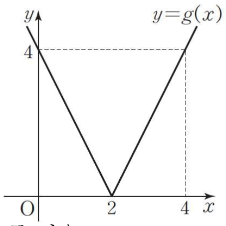
① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<0) \\ x+3 & (x\geq 0) \end{cases}$에 대하여 함수 $(x^n+k)f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 최솟값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<2) \\ 2x-6 & (x \ge 2) \end{cases}$, $g(x)=|2x-4|$의 그래프가 그림과 같다.





보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x \to 2-} f(x) = 2$

ㄴ. $\lim_{x \to 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 2+} f(x)g(x)$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ. ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = 5$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)-x^3$의 $x=2$에서의 미분계수는?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

8. 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)+g(x)=x^3+4x^2-3$

(나) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+2g(x)}{x^3+1} = 2$

$f'(1)=6$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오.

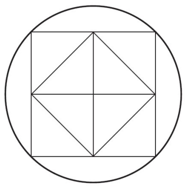
9. 1, 2, 3, 4, 5의 자연수 중에서 중복을 허락하여 5개의 수를 선택해 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 각 자리의 수 중에서 1이 한 개만 있는 자연수의 개수는?

① 1200 ② 1220 ③ 1240
④ 1260 ⑤ 1280

10. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수를 구하시오.

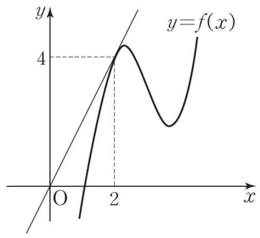
(가) $f(1)\times f(4)$는 홀수이다. (나) $f(1)+f(2)+f(3)$은 짝수이다.

11. 그림과 같이 원에 내접하는 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 작은 정사각형을 그리고, 이 작은 정사각형의 두 대각선을 그린 도형이 있다. 원의 내부에 만들어진 12개의 영역에 서로 다른 12가지의 색을 모두 사용하여 색을 칠하려고 한다. 각 영역에는 한 가지 색만을 칠하고, 모든 영역이 구분되도록 칠할 때 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① $\dfrac{12!}{8}$　② $\dfrac{12!}{6}$　③ $\dfrac{12!}{4}$
④ $\dfrac{12!}{2}$　⑤ $12!$

12. 그림과 같이 다항함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 4)$에서 원점을 지나는 직선 $g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값은?

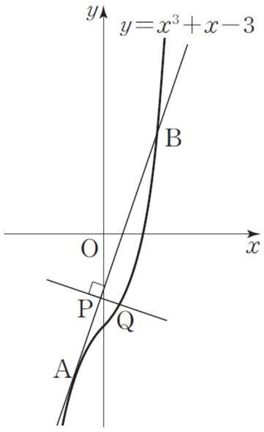


① 48　② 52　③ 56
④ 60　⑤ 64

13. 곡선 $y=x^3+x^2-2x+4$위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 두 점 A, B의 x좌표의 곱이 -2 일 때, 점 A에서의 접선의 기울기는?

① -2　② 0　③ 2
④ 4　⑤ 6

14. 곡선 $y=x^3+x-3$위의 점 A$(-1,\ -5)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 선분 AB위의 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 이 곡선과 만 나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값은 a이다. $34a^2$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P는 두 점 A, B가 아니다.)



15. 어느 박물관에는 다음 표와 같이 1층에 4개의 전시관, 2층에 3개의 전시관, 3층에 2개의 전시관이 있다.

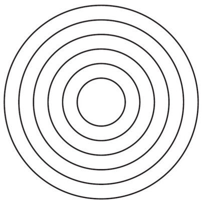
층	전시관
1층	선사관, 고대관, 중세관, 근세관
2층	테마관, 서화관, 기증관
3층	아시아관, 조각공예관

다음 조건을 만족시키도록 전시관을 관람하려고 할 때, 9개의 전시관을 한 번씩 모두 관람하는 경우의 수는?

(가) 2층에 있는 전시관은 연달아 관람을 한다.
(나) 중세관은 근세관보다 먼저 관람을 하고, 아시아관은 근세관보다 나중에 관람을 한다.

① 8!　② $3\times7!$　③ 7!　④ $3\times6!$　⑤ 6!

16. 그림과 같이 한 평면에 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6인 6개의 원으로 이루어진 도형이 있다. 반지름의 길이가 가장 큰 원의 내부에 나머지 5개의 원으로 구분된 6개의 영역 중 3개의 영역에는 빨간색, 2개의 영역에는 파란색, 1개의 영역에는 노란색을 사용하여 칠하려고 한다. 각 영역은 한 가지 색만을 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠할 때 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오.



17. $3<a<b\le 9<c\le d<14$를 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 145　② 150　③ 155　④ 160　⑤ 165

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le 2$일 때, $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b는 자연수)이다.
> (나) 2 이상의 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, $x_2 (x_1 < x_2)$에 대하여 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le 9$이다.

$f(4)$의 최댓값을 구하시오.

19. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

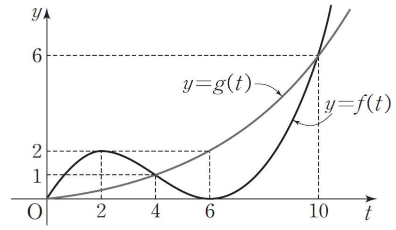
> (가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$
> (나) $f(2) + 2 < f(5)$

함수 f의 개수는?

① 41　② 42　③ 43　④ 44　⑤ 45

20. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 위치가 각각 다항함수 $f(t)$, $g(t)$이다. 두 다항함수 $y = f(t)$, $y = g(t)$의 그래프는 그림과 같고, $f'(2) = f'(6) = 0$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보 기 〉

ㄱ. $0 < t < 2$일 때, 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리 있다.
ㄴ. $2 < t < 6$일 때, 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다.
ㄷ. $6 < t < 10$일 때, 두 점 A, B의 속도가 같아지는 순간이 있다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1) 답. ⑤

남학생 4명을 먼저 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$

이 각각에 대하여 남학생과 남학생 사이의 3자리 중에서 1자리를 선택하고 이 자리에 여학생 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3\times2!$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}4!\times3\times2! &= 24\times3\times2\\ &=144\end{aligned}$$

다른 풀이

여학생 2명이 남학생 사이에 있어야 하므로 6명을 일렬로 세울 때 남학생은 맨 앞과 맨 뒤에 서야 한다. 맨 앞과 맨 뒤에 각각 남학생 1명씩을 세우는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$

이 각각에 대하여 여학생 2명을 이웃하게 세우고 나머지 2명의 남학생과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이고 이웃한 여학생의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 구하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2\times3!\times2!=4\times3\times6\times2=144$

2) 답. ⑤

$A+B$를 5로 나눈 나머지가 2가 되는 두 자연수 A, B는 다음과 같이 두 수의 일의자리의 수가 1과 6 또는 2와 5 또는 3과 4인 6가지 경우가 있다.

A	B
○○○1	○6
○○○6	○1
○○○2	○5
○○○5	○2
○○○3	○4
○○○4	○3

먼저 두 자연수 A, B가 각각 ○○○1, ○6인 경우에 '○'으로 표시된 네 자리에 1과 6이 아닌 4개의 수를 일렬로 나열하면 두 자연수 A, B가 만들어지므로 이 경우의 수는 $4!$이다.

나머지 5가지 경우도 만찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$6\times4!=6\times24=144$

3) 답. ②

5개의 소문자 a, b, c, d, e를 먼저 일렬로 나열한 후, 소문자와 소문자 사이 4곳과 마지막 소문자 오른쪽 1곳의 5곳 중에서 3곳을 선택하여 3개의 대문자 A, B, C를 나열하면 된다.

5개의 소문자를 그림의 □ 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$

□ ∧ □ ∧ □ ∧ □ ∧ □ ∧

5곳의 ∧ 자리에 3개의 대문자 A, B, C를 나열하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$

따라서 구하는 경우의 수는 $5!\times{}_5\mathrm{P}_3=120\times60=7200$

다른 풀이

소문자를 모두 a로 생각하고, 대문자를 모두 A로 생각하면 대문자 바로 왼쪽에는 소문자가 와야 하므로 나열된 문자열 중에는 aA와 같은 부분이 반드시 3개가 있어야 한다.

여기서 aA를 한 문자 T라 하면 5개의 문자 T, T, T, a, a를 일렬로 나열시킨 후, A가 나열된 세 곳에는 3개의 대문자 A, B, C를 일렬로 나열시키고, a가 나열된 다섯 곳에는 5개의 소문자 a, b, c, d, e를 일렬로 나열시키면 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}\times3!\times5!=10\times6\times120=7200$

4) 답. ①

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f(2)=0$, $f'(2)=-1$

$\dfrac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때, $h\to0+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nf\left(2+\frac{3}{n}\right) &= \lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)}{h}\\ &= \lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(3)}{h}\\ &= \lim_{h\to0-}\left\{\frac{f(2+3h)-f(3)}{3h}\times3\right\}\\ &= 3f'(2)=3\times(-1)=-3\end{aligned}$$

5) 답. ②

$g(x)=(x^n+k)f(x)$라 하면

$g(x)=\begin{cases}(x^n+k)(x^2-1) & (x<0)\\ (x^n+k)(x+3) & (x\ge0)\end{cases}$

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(x^n+k)(x^2-1)=-k$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(x^n+k)(x+3)=3k$

$g(0)=3k$이므로 $-k=3k$

따라서 $k=0$

(ⅱ) 미분계수 $g'(0)$이 존재해야 하므로

$g(x)=\begin{cases}x^n(x^2-1) & (x<0)\\ x^n(x+3) & (x\ge0)\end{cases}$에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0-}\frac{x^n(x^2-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to0-}x^{n-1}(x^2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0+}\frac{x^n(x+3)}{x}\\ &= \lim_{x\to0+}x^{n-1}(x+3)\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to0-}x^{n-1}(x^2-1)=\lim_{x\to0+}x^{n-1}(x+3)$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $n\ge2$일 때, ㉠이 성립하므로 자연수 n의 최솟값은 2이다.

6) 답. ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}f(x)\times\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=2\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\times\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=(-2)\times 0=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)g(x)$ (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$h'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{x-2}$$

그런데 $g(x)=|2x-4|$에서

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\times(2x-4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}2f(x)$$
$$=2\times(-2)=-4$$
$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)\times(-2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\{-2f(x)\}$$
$$=(-2)\times 2=-4$$

이므로 $h'(2)=-4$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7) 답. ②

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)=5$$

이므로 $f'(2)=20$

$g(x)=f(x)-x^3$이라 하면 $g'(x)=f'(x)-3x^2$ 이므로

$$g'(2)=f'(2)-3\times 2^2$$
$$=20-12=8$$

8) 답. 20

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+2g(x)}{x^3+1}=2$이므로 함수 $f(x)+2g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 $f(x)$는 이차 이하의 함수이고, $g(x)$는 삼차함수이다. 이때 $f(x)$가 상수함수 또는 일차함수이면 $f'(1)=6$을 만족시킬 수 없으므로 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2\times 1+a$에서 $6=2+a$

따라서 $a=4$

$f(x)+g(x)=x^3+4x^2-3$에서

$$g(x)=x^3+4x^2-3-f(x)$$
$$=x^3+4x^2-3-(x^2+4x+b)$$
$$=x^3+3x^2-4x-3-b$$

$g'(x)=3x^3+6x-4$이므로

$g'(2)=3\times 2^2+6\times 2-4=20$

9) 답. ⑤

1, 2, 3, 4, 5의 자연수 중에서 중복을 허락하여 5개의 수를 선택해 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 5개의 자리 중에서 1이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 5

5개의 자리 중에서 1이 놓인 곳을 제외한 나머지 네 자리에는 2, 3, 4, 5의 자연수 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택해 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times 256=1280$

10) 답. 162

$f(1)\times f(4)$가 홀수이므로 $f(1)$, $f(4)$는 모두 홀수이고, 조건 (나)에서 $f(1)+f(2)+f(3)$이 짝수이므로 $f(2)+f(3)$은 홀수이다.

(ⅰ) $f(2)$는 짝수, $f(3)$은 홀수일 때,

$f(2)$의 값은 2, 4, 6 중 하나이므로 이 경우의 수는 3이다.

이 각각에 대하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$는 모두 홀수이므로 이 경우의 수는 세 개의 숫자 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 3개를 선택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 이 경우의 함수의 개수는

$3\times 27=81$

(ⅱ) $f(2)$는 홀수, $f(3)$은 짝수일 때,

$f(3)$의 값은 2, 4, 6 중 하나이므로 이 경우의 수는 3이다.

이 각각에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$는 모두 홀수이므로 이 경우의 수는 세 개의 숫자 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 3개를 선택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

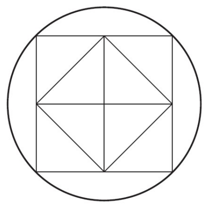
따라서 이 경우의 함수의 개수는

$3\times 27=81$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$81+81=162$

11) 답. ③



12가지의 색 중 두 번째로 큰 정사각형의 내부에 원형으로 배열된 4개의 직각이등변삼각형의 내부에 색을 칠하는 경우의 수는

$\dfrac{{}_{12}\mathrm{P}_4}{4}$

이 각각에 대하여 나머지 8가지 색으로 나머지 8개의 영역에 색을 칠하는

경우의 수는 $8!$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_{12}\mathrm{P}_4}{4}\times 8! = \frac{12!}{4}$$

12) 답. ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$에서 원점을 지나는 직선에 접하므로

$$f(2)=4,\ f'(2)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2$$

$g(x)=x^3f(x)$에서 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 12f(2)+8f'(2) \\ &= 12\times 4+8\times 2=64 \end{aligned}$$

13) 답. ④

$y=x^3+x^2-2x+4$에서 $y'=3x^2+2x-2$

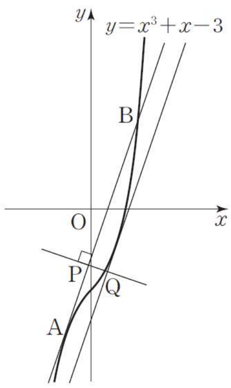
구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $3x^2+2x-2=m$, 즉 $3x^2+2x-2-m=0$의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-2-m}{3}=-2,\ -2-m=-6$$

따라서 $m=4$

14) 답. 32

그림과 같이 점 Q에서의 접선의 기울기와 직선 AB의 기울기가 같을 때, 선분 PQ의 길이가 최대이다.



$y=x^3+x-3$에서 $y'=3x^2+1$이므로 직선 AB의 기울기는

$3\times(-1)^2+1=4$

점 Q의 x좌표를 q라 하면

$3q^2+1=4,\ 3(q-1)(q+1)=0$

이때 $q\neq -1$이므로 $q=1$

직선 AB의 방정식은 $y=4(x+1)-5$, 즉 $4x-y-1=0$이고, 점 Q의 좌표는 $(1,\ -1)$

$$a=\frac{|4\times 1-(-1)-1|}{\sqrt{16+1}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

따라서 $34a^2=34\times\frac{16}{17}=32$

15) 답. ③

2층에 있는 전시관은 연달아 관람을 해야 하므로 3개의 전시관을 하나의 전시관 A로 생각하고, 중세관, 근세관, 아시아관은 이 순서대로 관람을 해야 하므로 모두 전시관 B로 생각한다.

선사관, 고대관, A관, B관, B관, B관, 조각공예관을 관람하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!}$

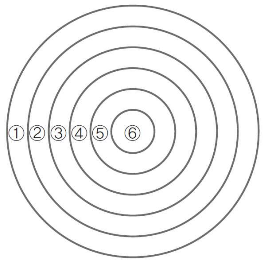
이 각각에 대하여 2층에 3개의 전시관을 관람하는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$

따라서 첫 번째로 관람하는 B관은 중세관, 두 번째로 관람하는 B관은 근세관, 세 번째로 관람하는 B관은 아시아관으로 생각하면 9개의 전시관을 한 번씩 모두 관람하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!}\times 3!=7!$$

16) 답. 10

가장 바깥쪽 영역부터 가장 안쪽 영역을 차례대로 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥ 영역이라 하자.



빨간색, 파란색, 노란색이 칠해지는 영역을 각각 a, b, c라 하면 빨간색이 칠해지는 3개의 영역은 서로 이웃하지 않아야 하므로 문제의 조건을 만족시키도록 각 영역을 칠하는 경우는 다음과 같이 4가지 경우가 있다. 여기서 □는 파란색 또는 노란색이 칠해지는 영역이다.

	①	②	③	④	⑤	⑥
(ⅰ)	a	□	a	□	a	□
(ⅱ)	□	a	□	a	□	a
(ⅲ)	a	□	a	□	□	a
(ⅳ)	a	□	□	a	□	a

(ⅰ), (ⅱ)일 때, 3개의 □ 대신 3개의 문자 $b,\ b,\ c$를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$2\times\frac{3!}{2!}=2\times 3=6$$

(ⅲ), (ⅳ)일 때, 3개의 □ 중 이웃한 두□에는 서로 다른 두 문자 $b,\ c$를 일렬로 나열하고 나머지 1개의 □에는 나머지 문자 b를 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$2\times 2!\times 1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$6+4=10$

17) 답. ②

$3 < a < b \le 9 < c \le d < 14$ ⋯⋯㉠

㉠에서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 두 자연수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

이 각각에 대하여 자연수 c, d의 순서쌍 (c, d)는 10, 11, 12, 13 중에서 중복을 허락하여 두 자연수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_2 = {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

따라서 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$15\times10 = 150$

18) 답. 32

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to2-}\frac{ax^2+bx-4a-2b}{x-2} \\ &= \lim_{x\to2-}\frac{a(x-2)(x+2)+b(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to2-}\{a(x+2)+b\} \\ &= 4a+b \end{aligned}$$

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(c) \le 9$

x_1, x_2가 2이상의 임의의 서로 다른 두 실수이므로 $x > 2$에서 $f'(x) \le 9$이다.

즉, $4a+b \le 9$

a, b는 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 1)$이다.

$f(4)$가 최대가 되려면 $f(2)$가 최대이고, 조건 (나)에서

$x \ge 2$일 때, $f'(x) = 9$이어야 한다.

$f(2) = 4a+2b$의 값이 최대가 되는 $(a,\ b)$는 $(1,\ 5)$이므로 $f(2)$의 최댓값은 $f(2) = 2^2+5\times2 = 14$이다.

$f(4)$가 최대가 되도록 하는 $f(x)$는 $x > 2$에서 $f(x) = 9x-4$이므로 $f(4)$의 최댓값은 $f(4) = 32$이다.

19) 답. ⑤

함수 f의 공역은 X이므로 $f(5) \le 5$이고, 조건 (나)에서 $f(2)+2 < f(5)$이므로 $f(2) \le 2$이어야 한다.

(i) $f(2) = 1$이면 $f(1) = 1$이고, $f(5) > 3$이므로 $f(5) = 4$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4중에서 중복을 허락하여 두 수를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2$와 같으므로 이 경우의 함수 f의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$

$f(5) = 5$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5중에서 중복을 허락하여 두 수를 택하는 중복조합의 수 ${}_5\mathrm{H}_2 = {}_6\mathrm{C}_2$와 같으므로 이 경우의 함수 f의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(ii) $f(2) = 2$이면 $f(1) = 1$ 또는 $f(1) = 2$이고, $f(5) > 4$이므로 $f(5) = 5$이다. 따라서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5중에서 중복을 허락하여 두 수를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2$와 같으므로 이 경우의 함수 f의 개수는 $2\times{}_5\mathrm{C}_2 = 2\times10 = 20$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $10+15+20 = 45$

20) 답. ⑤

ㄱ. $0 < t < 2$일 때, $f(t) > g(t)$이므로 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리 있다. (참)

ㄴ. $2 < t < 6$일 때, $f'(t) < 0$이고 $g'(t) > 0$이므로 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)

ㄷ. $h(t) = f'(t) - g'(t)$라 하면 함수 $h(t)$는 닫힌 구간 $[6,\ 10]$에서 연속이고, $f'(6) = 0$, $g'(6) > 0$에서 $h(6) = f'(6) - g'(6) < 0$, $f'(10) > g'(10)$에서 $h(10) = f'(10) - g'(10) > 0$이므로 사이값 정리에 의하여 $h(c) = 0$, 즉 $f'(c) = g'(c)$인 c가 열린 구간 $(6,\ 10)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.