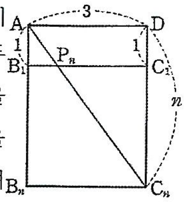
4일차 과제

1. 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 3, 세로의 길이가 n인 직사각형 AB_nC_nD에서 두 변 AB_n, DC_n 위에 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{DC_1}=1$인 점을 각각 B_1, C_1이라 하고, $\overline{B_1C_1}$과 $\overline{AC_n}$의 교점을 P_n이라 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\overline{AP_n}$의 값을 구하여라.(단, n은 $n\geq 2$인 자연수이다.)



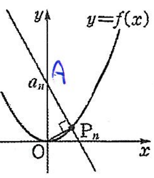
$\overline{AC_n} = \sqrt{9+n^2}$

$1 : n = \overline{AP_n} : \sqrt{9+n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9}{n}+1} = 1$

$\therefore 1$

2. 오른쪽 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $f(x)=x^2$의 그래프 위의 점 $P_n\left(\frac{1}{n}, f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 y절편을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{9}$

AP_n 의 기울기 $= -n$

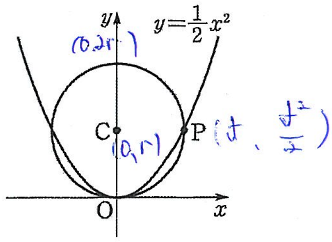
$y = -n\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$

$a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$

∴ ②

3. 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 한 점 P와 원점 O를 지나며 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 점 P가 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 원의 중심 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표를 구하여라.



$r = \sqrt{t^2 + \left(r - \frac{t^2}{2}\right)^2}$

$r = 1 + \frac{t^2}{4}$

$\lim_{t\to 0+} r = \lim_{t\to 0+}\left(1+\frac{t^2}{4}\right) = 1$

$\therefore (0, 1)$

4. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 3,\ \int_{-1}^{1} x^2f(x)dx = -2$$

가 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

$f(x) = ax + b$

$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx = \int_{-1}^{1} ax^2 dx = \frac{2}{3}a = 3$

$\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx = \frac{2}{3}b$

$f(x) = \frac{9}{2}x - 3$

$\therefore 6.$

4일차 과제

5. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=f(x),\ \int_0^1 f(x)dx=5$$

↳ 우함수

일 때, 정적분 $\int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx$의 값을 구하여라.

우 × 우 → 우
우 × 기 → 기
기 × 우 → 기
기 × 기 → 우

$\int_{-1}^{1}(2x^3 f(x) - x f(x) - f(x))dx$

기 기

$\therefore -10$

7. 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx=A,\ \int_1^3 f(x)dx=B,\ \int_1^2 f(x)dx=C$$

일 때, $\int_0^3 f(x)dx$를 A, B, C를 이용하여 나타내어라.

$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx = A-C$

$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

$= A-C+B$

$\therefore A+B-C$

→ 기함수

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이고

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx=3k-1,\ \int_0^2 f(x)dx=-5,\ \int_0^3 f(x)dx=k$$

이다. 이때, 상수 k의 값을 구하여라.

$\underbrace{\int_{-2}^{2} f(x)dx}_{=0}+\int_2^3 f(x)dx=3k-1$

$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

$k = 3k-1 - 5$

$\therefore k=3$

8. $f(x)=4x^3-x^2+3x-2$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)dt$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

$\lim_{x\to1}\frac{\int_x^1 f(t)dt}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(1)-F(x)}{x-1}$

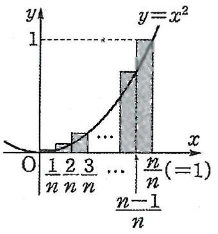
$=-f(1)$

$\therefore -4$

4일차 과제

9. 다음은 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다.

> 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 앞에서부터 차례대로
>
> $0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$
>
> 이므로 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면 구하는 넓이 S는
>
> $S=\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\quad} = \frac{1}{3}$



위의 과정에서 □ 안에 알맞은 식은?

① $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$　② $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^2}$　③ $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$

④ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^3}$　⑤ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^4}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

∴ ③

10. 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{3k}{n}\right)^3 \cdot \frac{2}{n}$ 의 값을 구하여라.

$1+\frac{3k}{n} = x$, $\frac{3}{n} = dx$.

$\int_1^4 x^3 \cdot \frac{2}{3} dx = \frac{85}{2}$

∴ $\frac{85}{2}$

11. $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 중 0, 1, 2의 값 중 어느 하나를 가진다. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 13$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 23$일 때, $\sum_{i=1}^{n} x_i{}^5$의 값을 구하여라.

$x_i = 1$ 이 a개 , $x_i = 2$가 b개.

$a+2b=13$

$a+4b=23$

$a=3$, $b=5$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^5 = 3\times1 + 5\times2^5 = 163$

∴ 163.

12. 첫째항부터 제 4항까지의 합이 24이고, 첫째항부터 제 10항까지의 합이 0인 등차수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제 p항까지의 합이 최대이고, 그때의 수열의 합이 q일 때, $p+q$의 값을 구하여라.

$a_1+a_2+a_3+a_4=24 \Rightarrow a_1+a_4=12$

$a_1+\cdots+a_{10}=0 \Rightarrow a_1+a_{10}=0$.

$a_1+a_{10}-(a_1+a_4)=-12$

$6d=-12$　$d=-2$.

$2a_1-6=12$　$a_1=9$

$a_n=-2n+11$

$a_5>0$, $a_6<0$　∴ $p=5$.

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=25$　∴ 30.

13. 연속하는 20개의 자연수의 합이 530일 때, 20개의 자연수 중에서 가장 큰 수는?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

$n+(n+1)+\cdots+(n+19)$ ⇒ 등차수열

$= 20 \times \frac{n+n+19}{2} = 530$

$n=17$

$\therefore 36$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$b_{2k-1} = a_1 - 2a_3 + 3a_5 - \cdots + (-1)^{k+1} \cdot ka_{2k-1},$$

$$b_{2k} = -a_2 + 2a_4 - 3a_6 + \cdots + (-1)^{k} \cdot ka_{2k}$$

로 정의되는 수열 $\{b_n\}$이

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 10$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

$b_1 = a_1$
$b_2 = -a_2$) ⊕ $-d$

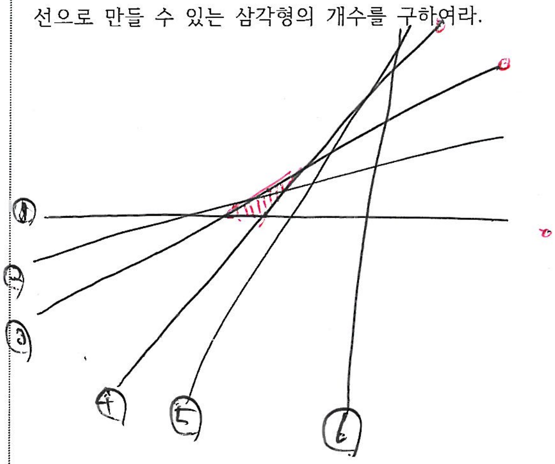
$b_3 = a_1 - 2a_3$
$b_4 = -a_2 + 2a_4$) ⊕ $-d+2d = d$

$b_5 = a_1 - 2a_3 + 3a_5$
$b_6 = -a_2 + 2a_4 - 3a_6$) ⊕ $-d+2d-3d$ $= -2d$

$-2d = 10$

$\therefore -5$

15. 한 평면 위에 있는 6개의 직선 중에서 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 6개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.



${}_6C_3$

$\therefore 20$

16. 지우와 혜리가 각각 오후 2시부터 오후 2시 30분 사이의 임의의 시간에 A지점에 가서 10분 동안 기다리기로 하였다. 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

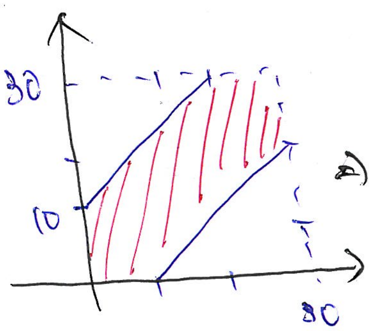
지우 도착시간 x분, $0 \le x \le 30$

혜리 〃 y분, $0 \le y \le 30$

만나려면 $|x-y| \le 10$

$y \le x+10$, $y \ge x-10$

그려!



⇒ $\frac{500}{900}$

$\therefore \frac{5}{9}$

17. 두 사건 A, B에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 독립이다.
ㄴ. A, B가 서로 독립이면 A, B^c도 서로 독립이다.
ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 A, B도 서로 독립이다.

2개만 알자.

"A, B가 공사건이 아닐 때, A, B가 배반이면 종속이다." T

유도) $P(A) \times P(B) \neq 0$

$P(A \cap B) = 0$ $\quad \therefore P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

"A, B가 독립이면 A, B^c 독립."
A^c, B " T
A^c, B^c "

$\therefore$ ㄴ, ㄷ.

18. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 임의로 한 개의 문자를 뽑을 때, b를 뽑는 사건을 $[b]$, b 또는 c를 뽑는 사건을 $[b, c]$라 하자. 사건 $[a, b, c, d]$와 서로 독립인 사건인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라. ↳ A 사건

| 보 기 |

ㄱ. $[d, f]$ ㄴ. $[c, d, e]$ ㄷ. $[c, d, e, f]$

B사건   C사건   D사건

$P(A) = \frac{2}{3}$

ㄱ. $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(B)$

$\therefore$ 종속

ㄴ. $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{3} = P(A) \times P(C)$

$\therefore$ 독립.

ㄷ. $P(D) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap D) = \frac{1}{3} \neq P(A) \times P(D)$

$\therefore$ ~~독~~ 종속

$\therefore$ ㄴ.

19. 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 신뢰도 99 %로 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 표본을 조사해야 하는가? (단, $P(|Z| \leq 3) = 0.99$)

① 100개   ② 225개   ③ 400개
④ 625개   ⑤ 900개

$|\overline{x} - m| = k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{3 \cdot 5}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

$n \geq 900$

$\therefore 900$

20. 어느 도시의 주민 525명을 임의추출하여 자전거 사용률을 조사했더니 16 %이었다. 이 도시 주민의 자전거 사용률 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은? (단, $P(|Z| \leq 2) = 0.95$)

① $0.128 \leq p \leq 0.192$ ② $0.132 \leq p \leq 0.188$
③ $0.136 \leq p \leq 0.184$ ④ $0.140 \leq p \leq 0.180$
⑤ $0.144 \leq p \leq 0.176$

$\left[\hat{p} - k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

0.16   2   525

$\therefore [0.128, 0.192]$