

제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $8^{\frac{1}{3}} \times 9^{-2}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{2}{81}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ 1

2. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 에 대하여 $n(A-B)$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 0

3. $\log_2 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_2 3$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

4. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_2 = 3$, $\frac{a_3}{a_1} = 4$ 일 때 a_5 의 값은? [3점]

- ① 24 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2-1}-n}$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

6. 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 를 공집합이 아닌 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하면? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

7. $\sum_{k=1}^{10} \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+1}$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 45

8. 자연수 n 에 대하여 $\frac{n(n+1)}{2}$ 을 3으로 나눈 나머지를

a_n 이라고 하자. $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 15 ③ 17 ④ 25 ⑤ 30

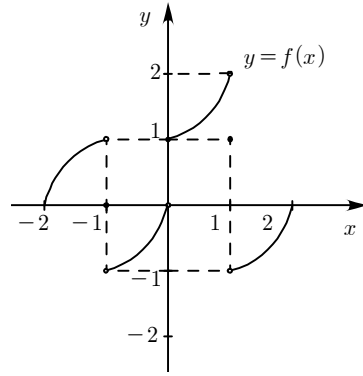
9. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 12$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

10. 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x)f(-x)$ 로 정의할 때

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 의 값은? [3점]



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 어떤 물체의 온도가 낮아지는 경우 물체의 온도는 그 물체 자체의 온도와 주위의 온도차에 의하여 결정되며 어떤 물체의 처음 온도를 T_0 , 주위의 온도를 S 라고 할 때 t 분이 지난 후의 온도 T 는

$$T = S + (T_0 - S)2^{kt} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

로 결정된다. 주위의 온도가 15° 일 때, 처음 온도가 95° 인 물체가 5분이 지난 후에 35° 로 낮아졌다. 이 물체의 온도가 20° 까지 낮아지려면 몇 분 더 걸리는지 구하면? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

12. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{2x-3}$ 이 $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족시키고 $f(1) = 2$ 일 때 $f(10)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{17}{9}$ ② $\frac{19}{11}$ ③ $\frac{21}{13}$ ④ $\frac{23}{15}$ ⑤ $\frac{25}{17}$

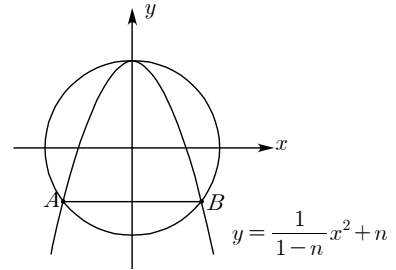
13. 1, 2, 3, 4를 모두 한번 씩만 사용하여 만든 숫자를 A 라고 하자. 이 수의 배열을 반대로 하여 만든 숫자를 B 라고 하자. 예를 들어 $A=1234$ 이면 $B=4321$ 이다. $A+B$ 의 모든 자리의 수가 짝수가 되도록 하는 A 의 개수는? [3점]
- ① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

14. 실수 x, y 에 대한 두 조건
 $p: x^2+y^2 \leq 4, \quad q: x+y \leq k$
 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 될 때 k 의 최솟값은? [4점]
- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
 ④ 4 ⑤ $6\sqrt{2}$

15. $g(x) = x^2 - 4x + 1$ 에 대하여 $t^4 = g(x)$ 를 만족시키는 실수 t 의 개수를 $f(t)$ 라고 하자. 함수 $y = f(t)$ 의 불연속점의 개수는? [4점]

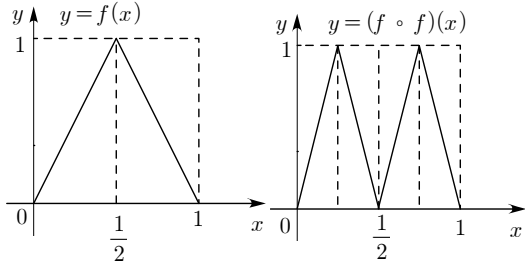
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 아래의 그림과 같이 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $y = \frac{1}{1-n}x^2 + n$ 과 중심이 원점이고 반지름의 길이가 n 인 원이 두 점 A, B 에서 만나고 있다. 선분 \overline{AB} 의 길이를 l_n 이라고 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{l_n^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

17. 아래의 그림은 $0 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 $y=f(f(x))$ 의 그래프의 개형이다.



이 때 집합 $\{x \mid f(f(f(x))) = 0 \text{ 또는 } \frac{2}{3}, 0 \leq x \leq 1\}$ 의 모든 원소의 합은? [4점]

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ 5 ⑤ 7

18. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \text{ 일 때, 다음은}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n+1}$ (*)이 성립함을 수학적 귀납적으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$ 일 때, (좌변) = $\frac{1}{2}$, (우변) = $\frac{1}{2}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{m+1} \text{ 이다.}$$

$n=m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k} &\geq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{a_{m+1}} = \frac{1}{m+1} + (\text{가}) \times \frac{1}{a_m} \\ &= \frac{1}{m+1} + (\text{가}) \times \frac{m-1}{m+1} \times \frac{m-2}{m} \times \dots \\ &\qquad \qquad \qquad \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m+1} + (\text{나}) = (\text{다}) \times \frac{1}{m+2} \geq \frac{1}{m+2}$$

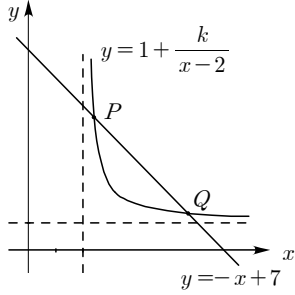
그러므로 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(m), g(m), h(m)$ 이라고 할 때, $f(2)g(2)h(2)$ 의 값은? [4점]

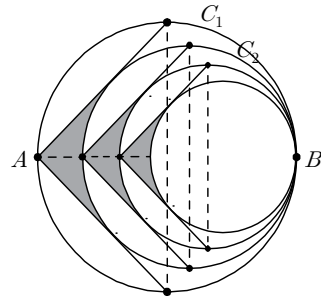
- ① $\frac{5}{96}$ ② $\frac{5}{72}$ ③ $\frac{5}{48}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

19. 그림과 같이 유리함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 7$ 가 만나는 두 점을 P, Q 라 하자. 두 점의 x 좌표의 곱이 15일 때, 이 두 점과 점 $(2, 1)$ 을 지나 는 원의 반지름의 값은? (단, $k > 0$) [4점]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 C_1 이 있다. 호 AB 의 중점을 각각 P, Q 라 하자. 선분 AP , 선분 AQ 와 원 C_1 에 동시에 내접하는 원 C_2 를 그린다. 선분 AP , 선분 AQ 와 원 C_2 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 AB 와 만나는 원 C_2 위의 점을 A_1 , 호 A_1B 의 중점을 각각 P_1, Q_1 이라 하자. 선분 A_1P_1 , 선분 A_1Q_1 과 원 C_2 에 동시에 내접하는 원 C_3 을 그린다. 같은 방법으로 만들어지는 둘러싸인 부분의 넓이에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색 칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값 은? [4점]



- ① $\frac{3}{4}(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
 ② $\frac{3}{4}(2\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
 ③ $\frac{4}{7}(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
 ④ $\frac{4}{7}(2\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
 ⑤ $(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

21. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 는 자연수이고

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 이다. 두 집합

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

$B = \{\log_2 a_1, \log_2 a_2, \log_2 a_3, \log_2 a_4, \log_2 a_5\}$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $n(A \cap B) = 2$

(나) $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 104이다.

이때, $a_2 + \log_2 a_3$ 의 값은? [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 12 ④ 17 ⑤ 18

단답형

22. ${}_n P_2 = 20$ 일 때 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 조건 $p: x \leq -3$ 또는 $x > 5$, $q: a \leq x \leq b$ 에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한 a 의 값의 최댓값을 M , b 의 값의 최솟값을 m 이라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x)$ 에 대하여

$h(x) = f(x) - g(x)$ 는 모든 실수에서 연속인 함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 3$ 일 때 $g(0) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 의 값을 구하시오.

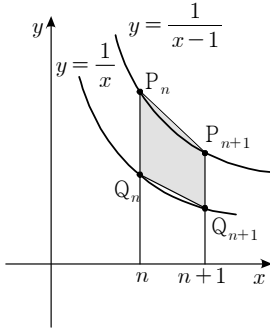
[3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n \times 2^n} - 3 \right) = 1$ 일 때,

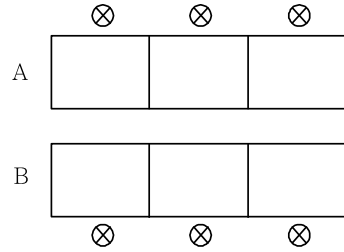
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(2n+1) \times 2^{n-1}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 세 점 $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 만나도록 하는 k 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $10(M+m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 곡선 $y = \frac{1}{x-1}$ 위의 점 $P_n\left(n, \frac{1}{n-1}\right)$ ($n=2, 3, \dots$)
 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 만나는
 점을 Q_n 이라고 하자. 사각형 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ 의 넓이를
 S_n 이라고 할 때, $220 \sum_{n=2}^{10} S_n$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 남학생 3명과 여학생 3명이 있다. 이 6명의 학생이
 그림과 같은 A, B 책상에 있는 6개의 좌석에 모두 앉
 을 때 남학생과 여학생이 서로 마주보도록 앉는 경우의
 수를 구하시오. [4점]



29. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음의 조건을 만족한다.

$$(가) a_1 \geq 0$$

$$(나) a_{10} + a_{12} \leq 40$$

$$(다) a_2 + a_4 \leq 24$$

이때 $a_3 + a_5$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 A 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수를 f 라고 하자.

(가) 함수 f 는 일대일 대응이다.

(나) 어떤 양수 d 에 대하여

$$d = f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n)$$

을 만족하는 정의역 A 의 원소 n 이 존재한다.

예를 들어 $f(1) = 5, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 4$ 는 조건을 만족하는 함수이다. 이때, 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.